ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 109–136.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ $\mathbf{C}[0;T]$

Пусть U — множество допустимых управлений, $T > 0$, задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, такая, что множество сужений функций из $W = W[0;T]$ на $[0;\tau]$ совпадает с $W[0;\tau]$, $F[\cdot;u]\colon W \to W$ — управляемый вольтерров оператор, $u \in U$. Для операторного уравнения $x = F[x;u]$, $x \in W$, вводится система сравнения в форме функционально-интегрального уравнения в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. Устанавливается, что при естественных предположениях относительно оператора F для сохранения (относительно малых вариаций правой части) глобальной разрешимости операторного уравнения достаточно сохранения глобальной разрешимости указанной системы сравнения. Сам по себе этот факт аналогичен некоторым результатам, установленным автором ранее. Центральный результат статьи составляет ряд признаков устойчивой глобальной разрешимости функционально-интегральных уравнений, упомянутых выше, без предположения типа локальной липшицевости правой части. В качестве содержательного примера, представляющего самостоятельный интерес, рассматривается нелинейная нестационарная система Навье–Стокса в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: эволюционное вольтеррово уравнение второго рода общего вида, функционально-интегральное уравнение, система сравнения, сохранение глобальной разрешимости, единственность решения, нелинейная нестационарная система Навье–Стокса.

DOI: 10.35634/vm240108

Введение

Пусть $W = W[0;T]$ — произвольное банахово пространство функций, заданных на отрезке $[0;T]$ (это могут быть функции со значениями в другом банаховом пространстве X), $W[0;\tau]$ для $\tau \in (0;T]$ — порожденные им пространства сужений. В данной статье изучается управляемое эволюционное операторное уравнение второго рода общего вида с вольтерровым оператором правой части, рассматриваемое на пространстве $W = W[0;T]$. Выявляются достаточные условия *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР) и единственности решения. Термин УСГР В. И. Суминым, положившим начало широкому изучению этой проблемы, а вслед за ним и его учениками (А. В. Чернов, И. В. Лисаченко), используется для обозначения локального (в смысле малого приращения по управлению правой части на фиксированном элементе состояния) сохранения глобальной разрешимости. Особенность данной статьи состоит в том, что для изучаемого операторного уравнения вводится система сравнения в форме функционально-интегрального уравнения в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. Устанавливается, что при естественных предположениях относительно оператора правой части для УСГР операторного уравнения достаточно УСГР системы сравнения. Сама по себе идея введения системы сравнения в виде функционально-интегрального уравнения (или неравенства) в ряде работ автора использовалась ранее при построении признаков *тотально глобальной разрешимости* (ТГР), или *тотального сохранения глобальной разрешимости* (тотально — по всем допустимым управлениям), см., например, [1]. Центральный результат статьи составляет ряд признаков УСГР функционально-интегральных уравнений, упомянутых выше, без предположения типа локальной липшицевости правой части. В качестве содержательного примера, представляющего самостоятельный интерес, рассматривается нелинейная нестационарная система Навье–Стокса в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Об актуальности проблемы УСГР и истории вопроса подробно сказано в [2, введение]; см. также подробные обзоры в [3–5]. Поэтому отметим лишь кратко основные моменты. Проблема УСГР актуальна при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления, вычислении градиентов функционалов в таких задачах и обосновании соответствующих численных методов оптимизации. Нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный — см. показательные примеры в [6, 7], [8, введение, п. 2], [9]. Ранее при исследовании УСГР управляемых распределенных систем уже использовалась возможность сведения таких систем к вольтеррову функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или, более общо, в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций (см. определения вольтерровых операторов и уравнений в [6, 8], обзоры в [3–5]). При доказательстве признаков УСГР соответствующих абстрактных уравнений использовалась «цепочечная технология», основанная на последовательном продолжении решения вдоль цепочки вольтерровых множеств оператора правой части (в частности, вдоль оси времени).

Сделаем небольшое пояснение. Для оператора F, действующего из одного пространства $E = E(\Pi)$ функций, определенных на $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, в другое подобное пространство, множество $H \subset \Pi$ называется вольтерровым, если при отображении F значения на H функций-образов не зависят от значений на $\Pi \setminus H$ функций-прообразов. Кортеж вольтерровых множеств вида $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi$ называется вольтерровой цепочкой оператора F. Предположим, например, что рассматривается уравнение вида

$$x = F[x], \quad x \in E = E(\Pi).$$

Если $x \in E$ — решение этого уравнения, H — вольтеррово множество оператора F, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества H, то за счет равенства $P_H F = P_H F P_H$ элемент $P_H x$ является решением H-локального аналога уравнения:

$$z = P_H F[z], \quad z \in P_H E.$$

Его решение $z \in P_H E$ называется H-локальным решением исходного уравнения. При «цепочечной технологии» производится продолжение локальных решений уравнения вдоль вольтерровой цепочки оператора F до глобального решения, то есть решения на множестве Π изменения независимых переменных. Первый шаг состоит в доказательстве разрешимости H_1-локального уравнения. Здесь стандартным подходом является использование принципа сжимающих отображений. Если, скажем, оператор F не выводит из некоторого замкнутого множества $X \subset B_M(0) \subset E$, где $B_M(0)$ — шар с центром в нуле радиуса M, то на этом пути требуется оценка вида

$$\Big\| P_{H_1}\big(F[z_1] - F[z_2]\big)\Big\| \leqslant \mathcal{N}_{H_1}(M)\, \|z_1 - z_2\|, \quad \forall\, z_1, z_2 \in E, \quad \|z_i\| \leqslant M, \quad i = 1, 2.$$

И для обеспечения сжимаемости величина $\mathcal{N}_{H_1}(M)$ должна быть меньше единицы. Добиваться этого можно различными способами. Но здесь уже присутствует локальная липшицевость оператора $P_{H_1} F$, а она, как правило, «транслируется» в локальную липшицевость оператора F. Если, например, F является оператором *типа Гаммерштейна*, то есть

$F[z]=\theta+AG[z]$, где $\theta\in E$, $A\colon E_1\to E$ — линейный ограниченный оператор, для которого вольтеррова цепочка $\{H_i,\ i=\overline{0,k}\}$ оператора F является вольтерровой δ-цепочкой: $\|P_hAP_h\|<\delta$, $h=H_i\setminus H_{i-1}$, $i=\overline{1,k}$, $G\colon E\to E_1$, то

$$\Big\|P_{H_1}\big(F[z_1]-F[z_2]\big)\Big\|\leqslant\|P_{H_1}AP_{H_1}\|\,\big\|G[z_1]-G[z_2]\big\|.$$

Стало быть, если оператор G обладает свойством локальной липшицевости:

$$\big\|G[z_1]-G[z_2]\big\|\leqslant\mathcal{N}_0(M)\,\|z_1-z_2\|,\quad\forall\,z_1,z_2\in E,\quad\|z_i\|\leqslant M,\quad i=1,2,$$

то необходимая нам оценка получается при $\mathcal{N}_{H_1}(M)=\|P_{H_1}AP_{H_1}\|\,\mathcal{N}_0(M)$, и для сжимаемости достаточно малости величины $\delta>0$. Ясно, что в данной ситуации оператор F обладает свойством локальной липшицевости. В случае представления $F[z]=f\big(\cdot,A[z]\big)$, где $A\colon E\to E_1$ — линейный ограниченный оператор (со свойствами, аналогичными описанным выше), $G[y]=f(\cdot,y)\colon E_1\to E$ — оператор внутренней суперпозиции, уравнение $z=F[z]$ называется *функциональным вольтерровым уравнением* (В. И. Сумина). Описанная схема применялась для доказательства УСГР управляемых уравнений различного вида: функциональных вольтерровых уравнений и уравнений второго рода общего вида в пространстве $L_\infty^m(\Pi)$ — см., например, [6, 8]; функциональных вольтерровых уравнений в пространстве $L_p^m(\Pi)$ — об этом см. обзор и теоретические основы в [5]; уравнений типа Гаммерштейна, функциональных вольтерровых уравнений и уравнений общего вида в банаховых идеальных пространствах [10]; эволюционных уравнений в пространствах $L_p(0,T;X)$ и $\mathbf{C}(0,T;X)$ [2, 4].

Итак, мы проиллюстрировали, как использование принципа сжимающих отображений «транслируется» в требование локальной липшицевости оператора F. Однако вместо принципа сжимающих отображений (на первом и последующих шагах вдоль цепочки), вообще говоря, можно использовать принцип Шаудера (на всем множестве Π), и здесь уже локальная липшицевость оператора F не требуется. Существенное препятствие на этом пути — требование компактности оператора F (или предкомпактности множества $F[X]$). Однако для функционально-интегральных уравнений в пространстве $\mathbb{R}$ это препятствие не столь велико. Указанное наблюдение явилось основной отправной точкой и стимулом написания данной статьи.

Вопрос об УСГР имеет много общего с вопросом ТГР. В ряде работ автора, см., например [1], для установления ТГР, помимо «цепочечной технологии», использовалось предположение о разрешимости некоторого мажорантного (по всем допустимым управлениям) уравнения. Эта идея родственна классической теореме Уинтнера [11, § III.5, теорема 5.1, с. 43].

В данной статье мы также объединяем две технологии («цепочечную технологию» и технологию мажоризации), но уже для доказательства свойства УСГР эволюционных вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида. Это объединение двух подходов оказывается, по мнению автора, достаточно эффективным. Кроме того, мы доказываем ряд признаков (не предполагающих выполнения тех или иных аналогов условия Липшица) разрешимости функционально-интегральных уравнений (см. § 4), которые используются (или могут быть использованы) для мажоризации.

§ 1. Предварительные построения и соглашения

Пусть U — множество допустимых управлений, $T>0$ и задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau\in(0;T]$, такая, что множество сужений функций из $W=W[0;T]$ на $[0;\tau]$ совпадает с $W[0;\tau]$, причем норма сужения функции из W в $W[0;\tau_1]$ не превосходит ее нормы в $W[0;\tau_2]$ при $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant T$. Будем предполагать, что для каждого $u \in U$ задан управляемый оператор $F[\cdot;u]\colon W \to W$, обладающий свойством вольтерровости: $F[x;u](t) = F[y;u](t)$ при $t \in [0;\tau]$ для всех $x, y \in W$ таких, что $x(t) = y(t)$ при $t \in [0;\tau]$. Будем рассматривать уравнение вида

$$x = F[x;u], \quad x \in W. \tag{1.1}$$

Для этого уравнения устанавливается признак сохранения глобальной разрешимости (устойчивости существования глобальных решений) при вариациях управления, достаточно мало меняющих правую часть. Отдельно рассматриваются случаи компактного вложения пространства W в некоторое более широкое пространство и непрерывности операторов $F[\cdot;u]$, $u \in U$, и выполнения локально-интегрального аналога условия Липшица относительно указанных операторов. Во втором случае доказывается также единственность решения. В первом случае применяется теорема Шаудера, во втором — технология продолжения решения по времени. При этом, и в том, и в другом случае инвариантное относительно оператора множество Ω строится, исходя из факта разрешимости в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$ функционально-интегрального уравнения вида

$$\beta(t) = \alpha(t) + R\left(\int_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s, \beta(s)\big)\,\beta(s)\Big|\,ds\right), \quad t \in [0;T], \tag{1.2}$$

при заданном $R \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$, $R(0) = 0$, и всех $\alpha \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме (при $\alpha = 0$ уравнение имеет тривиальное решение $\beta = 0$). Отметим сразу, что это не единственный способ выбора формы мажорантного функционально-интегрального уравнения. В § 4 мы рассматриваем и другие возможные формы, начиная с более простых для исследования, и затем уже, переходя к форме, указанной выше. Там же устанавливаются признаки устойчивой глобальной разрешимости упомянутых функционально-интегральных уравнений, не использующие предположений, аналогичных условию Липшица, и тем самым, представляющие самостоятельный интерес. В § 5 в качестве примера применения абстрактной теории рассматривается нелинейная нестационарная система Навье–Стокса в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Для дальнейшего следует отметить, что вольтерровость оператора $F\colon W \to W$ позволяет определить естественное сужение этого оператора $F_{[0;\tau]}\colon W[0;\tau] \to W[0;\tau]$ формулой $F_{[0;\tau]} = S_{[0;\tau]}FQ_{[0;\tau]}$, где $Q_{[0;\tau]}$ — оператор продолжения с $[0;\tau]$ на $[0;T]$ (в силу вольтерровости F способ этого продолжения не имеет значения; но для лебеговых пространств мы всегда будем иметь в виду продолжение нулем), $S_{[0;\tau]}$ — оператор сужения с $[0;T]$ на $[0;\tau]$. В общем случае оператор продолжения $Q_{[0;\tau]}$ нельзя понимать как продолжение нулем. Поскольку, с учетом вольтерровости, способ продолжения сам по себе не важен, нам достаточно, чтобы продолжение для любой функции $x \in W[0;\tau]$ до функции из $W[0;T]$ существовало. Поэтому мы и требуем, чтобы множество сужений функций из $W[0;T]$ на отрезок $[0;\tau]$ не просто содержалось в $W[0;\tau]$, а именно совпадало с этим пространством. Вольтерровость оператора F позволяет рассматривать локальные аналоги уравнения (1.1) в пространствах $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$. Это обстоятельство мы далее будем использовать без специальных оговорок.

Пусть $\mathcal{N}(t,s)$ — функция, удовлетворяющая следующему условию.

$(\mathbf{N}_1)$ Функция $\mathcal{N}(t,s)$ измерима по $t \in [0;T]$, непрерывна по $s \in \mathbb{R}$ и такова, что:

$$\mathcal{N}\big(\cdot, x(\cdot)\big) \in L_1[0;T] \ \text{ для всех } \ x \in L_\infty[0;T].$$

Будем предполагать, что при $u = \overline{u} \in U$ уравнение (1.1) имеет решение $x = \overline{x}$, и соответственно, выполнено следующее условие.

($\mathbf{F}_1$) Для всех $u \in U$, $t \in (0;T]$, $\Delta x \in W$, $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ таких, что $\|\Delta x\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, имеем: $\big\|F[\overline{x}+\Delta x;u] - F[\overline{x};u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant R\Big[\big\|\mathcal{N}\big(\cdot,\beta(\cdot)\big)\beta(\cdot)\big\|_{L_1[0;t]}\Big]$, где $R\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная строго возрастающая функция, $R(0) = 0$.

Сделаем также следующее предположение.

($\mathbf{S}$) $\exists\, \alpha \geqslant 0$: мажорантное уравнение (1.2) при $\alpha(t) \equiv \alpha$ имеет решение $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* ($\mathbf{S}$). *Тогда* $\forall\, u \in U$: $\big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W \leqslant \alpha$, *и* $\forall\, t \in (0;T]$ *оператор* $F_{[0;t]}[\cdot;u]$ *не выводит из множества*

$$\Omega_t = \Big\{x \in W[0;t]\colon \big\|x - \overline{x}\big\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s),\ s \in [0;t]\Big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $t = T$. Очевидно, что $\beta \geqslant 0$. Поэтому множество $\Omega_T \neq \varnothing$. Выберем произвольно $x \in \Omega_T$ и рассмотрим $F[x;u] - \overline{x} = F[x;u] - F[\overline{x};\overline{u}] = \big\{F[x;u] - F[\overline{x};u]\big\} + \big\{F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\}$.

Отсюда, с учетом условия ($\mathbf{F}_1$), $\big\|F[x;u] - \overline{x}\big\|_{W[0;s]} \leqslant R\Big(\big\|\mathcal{N}(\cdot,\beta)\beta\big\|_{L_1[0;s]}\Big) + \alpha$, $s \in [0;T]$.

Учитывая, что β — решение уравнения (1.2), получаем: $\big\|F[x;u] - \overline{x}\big\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$. $\square$

Замечание 1. Как показано в § 4, теоремы 7–9, для выполнения условия ($\mathbf{S}$) достаточно реализации хотя бы одного из следующих предположений.

($\mathbf{S}_1$) $R(s) = s$ и число $\alpha \geqslant 0$ достаточно мало.

($\mathbf{S}_2$) Функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s) \leqslant \mu s$ в окрестности нуля, $\mu > 0$, а число $\alpha \geqslant 0$ достаточно мало.

($\mathbf{S}_3$) Функция $\mathcal{N}(s,x)$ неотрицательна и не убывает по $x \geqslant 0$, а функция $R(\cdot)$ и число $\alpha \geqslant 0$ таковы, что $\inf\limits_{\sigma>0} \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int_0^T \mathcal{N}\big(t,\alpha+R(\sigma)\big)\big\{\alpha+R(\sigma)\big\}\,dt < 1$.

($\mathbf{S}_4$) При заданном $\alpha \geqslant 0$ финальное время $T > 0$ достаточно мало.

Более того, при выполнении условия ($\mathbf{S}_1$) найдется константа $\gamma > 0$ такая, что для соответствующих решений справедлива равномерная оценка $\|\beta - \alpha\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \gamma\alpha$. При выполнении условия ($\mathbf{S}_2$) решения удовлетворяют равномерной оценке $\|\beta - \alpha\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant R\big(\psi(\alpha)\big)$, с непрерывной, строго возрастающей функцией $\psi(\cdot)$, $\psi(0) = 0$. В соответствии с теоремой 1 в представленных здесь оценках можно считать $\alpha \equiv \big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$ (при условии достаточной малости этой нормы). Из уравнения (1.2) очевидно, что функция $\beta(\cdot)$ неотрицательна.

Замечание 2. В последующих двух параграфах будем доказывать сохранение глобальной разрешимости уравнения (1.1) при двух различных группах предположений.

Помимо предположений ($\mathbf{N}_1$), ($\mathbf{F}_1$), ($\mathbf{S}$), рассмотрим случай, когда мажорантное уравнение содержит в своей правой части параметрическое семейство функций. Этот случай заслуживает рассмотрения в связи с тем, что на практике оператор правой части может быть интегральным с ядром, зависящим от внешних независимых переменных, в частности, может иметь вид свертки функций. Пусть V — произвольное множество параметров, $\big\{\mathcal{N}_v\colon v \in V\big\}$ — семейство функций, удовлетворяющее условиям

($\mathbf{N}_V$) 1) $\mathcal{N}_v \in L_1^+[0;T]$ для всех $v \in V$;

2) существует константа $M > 0$ такая, что $\sup\limits_{v\in V} \int\limits_0^T \mathcal{N}_v(s)\,ds \leqslant M$;

3) для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого измеримого множества $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h < \delta$, имеем: $\sup\limits_{v\in V} \int\limits_h \mathcal{N}_v(s)\,ds < \varepsilon$.

Сформулируем предположения относительно оператора правой части.

($\mathbf{F}_V$) При произвольно заданном $\sigma \geqslant 0$ найдутся набор параметров $V = V[\sigma]$ и число $\nu = \nu[\sigma] \geqslant 0$ такие, что для всех $u \in U$, $t \in (0;T]$, $x, \Delta x \in W$, $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$, $\|\beta\| \leqslant \sigma$ таких, что $\|\Delta x\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, $\|x\|_{W[0;T]} \leqslant \sigma$, имеем:

$$\big\|F[x+\Delta x;u] - F[x;u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant \sup_{v\in V[\sigma]} \int\limits_0^t \mathcal{N}_v(s)\beta^\nu(s)\|\Delta x\|_{W[0;s]}\,ds,$$

где $\big\{\mathcal{N}_v\colon v \in V[\sigma]\big\}$ — семейство, удовлетворяющее условиям ($\mathbf{N}_V$).

Соответственно, мажорантное уравнение определим следующим образом.

$$\beta(t) = \alpha(t) + \sup_{v\in V[\sigma]} \int\limits_0^t \mathcal{N}_v(s)\big|\beta(s)\big|^{\nu+1}\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{1.3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* ($\mathbf{F}_V$) *и* $V = V[\sigma]$, $\nu = \nu[\sigma]$ — *указанные там набор параметров и число, отвечающие конкретно заданному числу* $\sigma > \|\overline{x}\|_W$. *Тогда для всех достаточно малых* $\alpha \in \mathbf{C}[0;T]$, *уравнение* (1.3) *имеет решение* $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$, $\|\beta\| \leqslant \sigma$, $\|\beta\| \leqslant C\|\alpha\|$, *и при этом* $\forall\, u \in U\colon \big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_{W[0;s]} \leqslant \alpha(s)$, $s \in [0;T]$, *и* $t \in [0;T]$ *оператор* $F_{[0;t]}[\cdot;u]$ *не выводит из множества* Ω_t (*см. формулировку теоремы* 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость уравнения (1.3) и выполнение указанных оценок следуют непосредственно из теоремы 11 (см. § 4). Дальнейшее доказательство получается очевидной компиляцией из доказательства теоремы 1. □

§ 2. Случай компактного вложения

Предположим, что Z — линейное нормированное пространство и выполнены следующие условия.

($\mathbf{F}_2$) Пространство W компактно вложено в Z; $\|.\|_Z \leqslant C\|.\|_W$.

($\mathbf{F}_3$) Оператор F допускает расширение до ограниченного оператора $Z \to W$ и непрерывного оператора $Z \to Z$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* ($\mathbf{N}_1$), ($\mathbf{F}_1$)–($\mathbf{F}_3$), ($\mathbf{S}$). *Тогда для всех* $u \in U$, $\big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W \leqslant \alpha$ *уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке* $\|x - \overline{x}\|_Z \leqslant C\|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой 1 существует неотрицательная функция $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ такая, что $\forall\, u \in U$ с достаточно малой нормой $\big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$ оператор $F[\cdot;u]$ не выводит из множества $\Omega = \Omega_T$. Далее управление u будем считать фиксированным и для краткости будем обозначать $F = F[\cdot;u]$. Очевидно, что множество Ω выпукло в W. Следовательно, его замыкание $\overline{\Omega}$ в пространстве Z тоже будет выпукло.

Покажем, что $F\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$. Выберем произвольно $x \in \overline{\Omega}$. Тогда существует последовательность $\{x_k\} \subset \Omega\colon \|x_k - x\|_Z \to 0$. Согласно условию $(\mathbf{F}_3)$, $F[x_k] \to F[x]$ в Z. При этом $F[x_k] \in \Omega$. Отсюда ясно, что $F[x] \in \overline{\Omega}$.

Покажем, что образ $F\overline{\Omega}$ предкомпактен (иначе говоря, относительно компактен) в Z. По определению множества Ω, $\|x - \overline{x}\|_W \leqslant \beta(T)$ для всех $x \in \Omega$. Выберем произвольно $x \in \overline{\Omega}$. Тогда снова существует последовательность $\{x_k\} \subset \Omega\colon \|x_k - x\|_Z \to 0$. Рассмотрим

$$\|x - \overline{x}\|_Z \leqslant \|x - x_k\|_Z + \|x_k - \overline{x}\|_Z \leqslant \|x - x_k\|_Z + C\,\|x_k - \overline{x}\|_W \leqslant \|x - x_k\|_Z + C\beta(T).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем: $\|x - \overline{x}\|_Z \leqslant C\beta(T)$. Стало быть, множество $\overline{\Omega}$ ограничено в Z. Согласно условию $(\mathbf{F}_3)$, образ $F\overline{\Omega}$ ограничен в W, и в силу условия $(\mathbf{F}_2)$, предкомпактен в Z. Теперь можно воспользоваться теоремой Шаудера [12, § XVI.3, с. 627], откуда получаем, что оператор $F = F[\cdot;u]\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ имеет неподвижную точку $x = x[u] \in \overline{\Omega}$. Поскольку оператор F действует в пространство W, то $x[u] \in W$. При этом, по построению, $\|x[u] - \overline{x}\|_Z \leqslant C\beta(T)$. □

§ 3. Случай локально-интегрального аналога условия Липшица

В этом параграфе будем предполагать выполненным следующее условие.

$(\mathbf{F}_4)$ Для всех $u \in U$, $t \in [0;T]$, $x_1, x_2 \in W[0;t]$, $\|x_i\|_{W[0;s]} \leqslant \gamma(s)$, $s \in [0;t]$, $y_i = F_{[0;t]}[x_i;u]$, $i = 1,2$, при $\gamma \in \mathbf{C}[0;T]$, имеем:

$$\|y_1 - y_2\|_{W[0;t]} \leqslant K\Big(\big\|\chi_h \mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;t]}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]}, \quad \mathcal{N}_1[\gamma] \in L_1[0;T],$$

где $K \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, $K(0) = 0$, $h = h[x_1,x_2]$ — множество, не содержащее никакого отрезка вида $[0;s] \subset [0;t]$, для которого $x_1\big|_{[0;s]} = x_2\big|_{[0;s]}$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* $(\mathbf{F}_4)$. *Тогда для любого* $u \in U$ *уравнение* (1.1) *не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая от противного, предположим, что нашлись два решения $x = x_1$, $x = x_2$. Положим $\eta = x_1 - x_2$, $F = F[\cdot;u]$. $\gamma(t) \equiv \max\big\{\|x_i\|_{W[0;T]}, i = 1,2\big\}$, $t \in [0;T]$. Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега и непрерывности функции $K(s)$, $K(0) = 0$) выполняется неравенство

$$K\Big(\big\|\chi_h \mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;T]}\Big) \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]\colon 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Согласно условиям $(\mathbf{F}_4)$, (3.1),

$$\|\eta\|_{W[0;t_1]} = \big\|F[x_1] - F[x_2]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant K\Big[\big\|\mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;t_1]}\Big]\|\eta\|_{W[0;t_1]} \leqslant \frac{\|\eta\|_{W[0;t_1]}}{2}.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{2}\|\eta\|_{W[0;t_1]} \leqslant 0$, то есть $\|\eta\|_{W[0;t_1]} = 0$.

Предположим, мы уже доказали, что $\|\eta\|_{W[0;t_{i-1}]} = 0$. Так как $\eta = F[x_1] - F[x_2]$, то согласно условию $(\mathbf{F}_4)$, вольтерровости оператора F и предположению индукции (откуда $x_1(t) = x_2(t)$ при $t \in [0; t_{i-1}]$), а также условию (3.1), получаем:

$$\|\eta\|_{W[0;t_i]} \leqslant K\Big[\big\|\mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big]\|\eta\|_{W[0;t_i]} \leqslant \frac{\|\eta\|_{W[0;t_i]}}{2} \Rightarrow \|\eta\|_{W[0;t_i]} = 0.$$

По индукции, делаем вывод, что $\|\eta\|_W = 0$, то есть $x_1 = x_2$ в W. □

Замечание 3. Если $W \subset L_p(0,T;V)$, то в условии $(\mathbf{F}_4)$ неравенства $\|x_i\|_{W[0;s]} \leqslant \gamma(s)$ можно заменить следующими: $\big\|x_i(s)\big\|_V \leqslant \gamma(s)$, $i = 1,2$, без нарушения справедливости утверждения теоремы 4. Действительно, в этом случае в начале доказательства достаточно просто взять $\gamma(t) = \max\big\{\|x_i(t)\|_V,\ i = 1,2\big\}$.

Сделаем еще одно (не слишком обременительное) предположение.

$(\mathbf{F}_5)$ Для всех $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, $x \in W[0;t_1]$ существует продолжение $\widetilde{x} \in W[0;t_2]$, $\widetilde{x}\big|_{[0;t_1]} = x$, сохраняющее норму: $\|\widetilde{x}\|_{W[0;t_2]} = \|x\|_{W[0;t_1]}$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{N}_1)$, $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_4)$, $(\mathbf{F}_5)$, $(\mathbf{S})$. *Тогда для всех* $u \in U$, $\big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W \leqslant \alpha$ *уравнение* (1.1) *имеет решение* $x = x[u] \in W$ *(единственное согласно теореме* 4*), и справедлива оценка:* $\|x - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ *при* $t \in [0;T]$*; а стало быть,* $\|x - \overline{x}\|_W \leqslant \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 существует неотрицательная функция $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ такая, что $\forall\, u \in U$ с достаточно малой нормой $\big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$ и $t \in (0;T]$ оператор $F[\cdot;u]$ не выводит из множества Ω_t. Далее такое управление u будем считать фиксированным и для краткости будем обозначать $F = F[\cdot;u]$. Положим $\gamma(t) = \beta(t) + \|\overline{x}\|_{W[0;t]}$, $t \in [0;T]$. Покажем, что уравнение (1.1) имеет решение. Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполняется неравенство (3.1) при любом измеримом подмножестве $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Используя вольтерровость оператора F, будем рассматривать локальные аналоги уравнения (1.1):

$$x = F_j[x], \quad x \in W[0;t_j], \quad F_j = F_{[0;t_j]}, \quad j \in \overline{1,k}. \tag{3.2}$$

Разрешимость уравнений (3.2) будем доказывать индукцией по $j = \overline{1,k}$.

1. Определим множество $Y_1 = \Omega_{t_1}$. Очевидно, что оно замкнуто в $W[0;t_1]$ и не пусто, так как содержит $x = \overline{x}\,\big|_{[0;t_1]} \in W[0;t_1]$. В соответствии со сказанным выше, $F_1\colon Y_1 \to Y_1$. Установим сжимаемость оператора F_1 на множестве Y_1. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in Y_1$ и положим: $y = F_1[x]$, $\widetilde{y} = F_1[\widetilde{x}]$. Согласно условию $(\mathbf{F}_4)$, а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (3.1), получаем:

$$\|y-\widetilde{y}\|_{W[0;t_1]} = \big\|F_{[0;t_1]}[x]-F_{[0;t_1]}[\widetilde{x}]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant K\Big[\big\|\mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;t_1]}\Big]\|x-\widetilde{x}\|_{W[0;t_1]} \leqslant \frac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{W[0;t_1]}.$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (3.2) при $j = 1$ имеет единственное решение в множестве Y_1.

2. Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали существование функции $x = x_{i-1} \in W[0;t_{i-1}]$, являющейся решением уравнения (3.2) при $j = i-1$ и удовлетворяющей оценке $\|x_{i-1} - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $x = x_i \in W[0;t_i]$, являющейся решением уравнения (3.2) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке $\|x_i - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;t_i]$.

3. Положим $Y_i = \big\{x \in W[0;t_i]\colon \|x-\overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t),\ t\in(t_{i-1};t_i];\ x\big|_{[0;t_{i-1}]} = x_{i-1}\big\}$. Очевидно, функция $\beta(t)$ неубывающая (так как в правой части (1.2) свободный член и подынтегральное выражение неотрицательны). Поэтому, с учетом условия $(\mathbf{F}_5)$, существует продолжение $\widetilde{x}\in W[0;t_i]$, $\widetilde{x}\big|_{[0;t_{i-1}]} = x_{i-1}-\overline{x}$, функции $x_{i-1}(t)-\overline{x}(t)$, сохраняющее норму:

$$\|\widetilde{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \|\widetilde{x}\|_{W[0;t_i]} = \|x_{i-1}-\overline{x}\|_{W[0;t_{i-1}]} \leqslant \beta(t_{i-1}) \leqslant \beta(t) \quad \forall\, t\in[t_{i-1};t_i].$$

Это означает, что множество Y_i непусто. Очевидно, что $Y_i \subset \Omega_{t_i}$. И по построению, $F_i\colon \Omega_{t_i}\to\Omega_{t_i}$. В частности, $FY_i\subset\Omega_{t_i}$, следовательно, $\forall\, x\in Y_i$ имеем: $\big\|x-\overline{x}\big\|_{W[0;t]}\leqslant\beta(t)$, $t\in(t_{i-1};t_i]$. А в силу вольтерровости оператора F, $F_i[x]\big|_{[0;t_{i-1}]} = F_{i-1}[x_{i-1}] = x_{i-1}$. Таким образом, $F_iY_i\subset Y_i$, то есть $F_i\colon Y_i\to Y_i$.

4. Установим сжимаемость оператора F_i на множестве Y_i. Выберем произвольно элементы $x,\widetilde{x}\in Y_i$ и положим: $y = F_i[x]$, $\widetilde{y} = F_i[\widetilde{x}]$. Согласно условию $(\mathbf{F}_4)$, вольтерровости оператора F и определению множества Y_i, откуда следует, что

$$x(t) = \widetilde{x}(t) = x_{i-1}(t), \quad y(t) = \widetilde{y}(t) = F_{i-1}[x_{i-1}](t) = x_{i-1}(t) \ \text{ при } \ t\in[0;t_{i-1}],$$

а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (3.1), получаем:

$$\|y-\widetilde{y}\|_{W[0;t_i]} = \big\|F_{[0;t_i]}[x]-F_{[0;t_i]}[\widetilde{x}]\big\|_{W[0;t_i]} \leqslant K\Big[\big\|\mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big]\|x-\widetilde{x}\|_{W[0;t_i]} \leqslant \frac{\|x-\widetilde{x}\|_{W[0;t_i]}}{2}.$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (3.2) при $j=i$ имеет единственное решение в множестве Y_i.

5. По индукции заключаем, что уравнение (3.2) при $j=k$ имеет решение $x=x_k\in W$, удовлетворяющее оценке: $\|x-\overline{x}\|_{W[0;t]}\leqslant\beta(t)$ при $t\in[0;t_k=T]$. Остается заметить, что x является решением уравнения (1.1), и сослаться на теорему 1. □

Замечание 4. В соответствии с теоремой 2, утверждение теоремы 5 останется справедливым, если в нем условия $(\mathbf{N}_1)$, $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{S})$ заменить условием $(\mathbf{F}_V)$, при $\sigma > \|\overline{x}\|_W$. Но, разумеется, функция $\beta(\cdot)$ на этот раз будет пониматься как решение уравнения (1.3). При выполнении условия $(\mathbf{F}_V)$ утверждения теорем 4, 5 останутся справедливыми и без выполнения условия $(\mathbf{F}_4)$. Отличие в доказательствах только в том, что все выражения вида $K\Big(\big\|\chi_h\mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;t]}\Big)$ заменятся выражением $\omega(t)\equiv 2^\nu\|\gamma\|^\nu \sup\limits_{v\in V[\sigma]}\int\limits_0^t \chi_h(s)\mathcal{N}_v(s)\,ds$, при произвольном $\sigma > \|\gamma\|_{\mathbf{C}[0;T]}$. Это ясно из следующей цепочки неравенств, см. условие $(\mathbf{F}_V)$ (здесь $h=[\tau;t]$, в предположении, что $\Delta x = x_1-x_2 = 0$ на $[0;\tau)$; $\beta(s)=2\gamma(s)$ для теоремы 4, $\beta(s)\leqslant\gamma(s)$ для теоремы 5):

$$\big\|F_{[0;t]}(x_1)-F_{[0;t]}(x_2)\big\|_{W[0;t]} \leqslant \sup_{v\in V[\sigma]}\int\limits_0^t \mathcal{N}_v(s)\beta^\nu(s)\chi_h(s)\|\Delta x\|_{W[0;s]}\,ds \leqslant \omega(t)\,\|\Delta x\|_{W[0;t]}.$$

§ 4. Устойчивая глобальная разрешимость функционально-интегральных уравнений

Проблеме разрешимости интегральных уравнений Гаммерштейна и Гаммерштейна–Вольтерра посвящена достаточно обширная литература, см., например, [13–20]. Отметим работы, наиболее близкие в том или ином смысле к материалу данной статьи.

В [21] рассматривается интегральное уравнение, зависящее от параметра $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$u(x) = v(x) + \lambda\int\limits_{I_a^b} k(x,y)f\big(y,u(y)\big)\,dy, \quad x=(x_1,x_2)\in I_a^b = \prod_{i=1}^2 [a_i;b_i],$$

в пространстве функций ограниченной вариации. При соответствующих предположениях доказывается существование глобального решения для всех достаточно малых $\lambda \in \mathbb{R}$, а также (при $\lambda = 1$) локального (на достаточно малом подмножестве I_a^b) решения в вольтерровом случае. Аналогичный результат для одномерного случая см. в [22, 23].

В [24] рассматривается обобщенное интегральное уравнение типа Гаммерштейна:

$$u(x) = F\left(x, u(x), \int\limits_{\Omega} K\big[x, y, f(y, u(y))\big]\, dy, v\right), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ — ограничено.}$$

Решение ищется в пространстве непрерывных функций на Ω. Функции K и F непрерывны. Предполагается, что функции f, K, F удовлетворяют условию Липшица по переменной состояния, причем константы Липшица определенным образом согласованы ([24, условие (H_2)]). Кроме того, накладываются специальные условия [24, (H_3), (H_4)] на порядок роста и зависимость от параметра. Доказывается существование и единственность глобального решения, а также непрерывная зависимость от параметра v.

Что касается существования точного решения и аналитических и численных методов решения интегральных уравнений с нелинейностями конкретного вида, см. [25].

Пусть заданы: $T > 0$, $y \in \mathbf{C}[0;T]$, функция $\mathcal{N}\colon [0;T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $(\mathbf{N}_1)$, а также непрерывная строго возрастающая нечетная функция $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(0) = 0$. Рассмотрим функционально-интегральное уравнение:

$$z(t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}\big(s, y(s) + R[z(s)]\big)\big|y(s) + R[z(s)]\big|\, ds, \quad t \in [0;T]. \tag{4.1}$$

Ясно, что при $y = 0$ уравнение (4.1) имеет решение $z = 0$. Далее мы собираемся доказать, что глобальная (на отрезке $[0;T]$) разрешимость уравнения (4.1) сохраняется для всех достаточно малых $y \in \mathbf{C}[0;T]$. Если бы правая часть обладала свойством локальной липшицевости по z, то для доказательства этого факта можно было бы использовать известные результаты об устойчивости существования глобальных решений функциональных вольтерровых уравнений. Для этого потребовалась бы липшицевость функции $\mathcal{N}(t,s)$ по s, но мы этого не постулируем (о единственности решения речь не идет). Устойчивая глобальная разрешимость уравнения (4.1) доказывается в два этапа. Сначала мы доказываем глобальную разрешимость некоторого мажорантного уравнения для всех достаточно малых $y(t)$ — здесь применяется стандартная технология продолжения решения по шкале времени (но разрешимость шаговых (локальных) аналогов уравнения доказывается с помощью теоремы Шаудера вместо принципа сжимающих отображений). Затем, пользуясь глобальной разрешимостью мажорантного уравнения, мы можем указать множество Ω, инвариантное для оператора правой части, который, к тому же, оказывается компактным. Поэтому для исходного уравнения становится возможным использование теоремы Шаудера о неподвижной точке. Этот подход в известной степени схож с подходом, примененным в [26, § 20.4, пример 2, с. 414].

Теорема 6. *Пусть функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s) \leqslant \mu s$ в окрестности нуля при $s \geqslant 0$, $\mu > 0$. Тогда уравнение (4.1) для всех $y \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме, имеет по крайней мере одно решение $z \in \mathbf{C}[0;T]$. Кроме того, существует непрерывная строго возрастающая функция $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\gamma(0) = 0$ и каждое из упомянутых решений удовлетворяет оценке $\|z\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)$. Более того, в случае $R(s) = s$ в качестве $\gamma(\cdot)$ можно указать функцию вида $\gamma(s) = Cs$ при некоторой константе $C > 0$.*

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $\mathcal{N}(t,s)$ удовлетворяет условию* $(\mathbf{N}_1)$. *Тогда для любого $M>0$ и соответственно, $\mathcal{N}_0(t)=\max\limits_{s\in[-M;M]}\big|\mathcal{N}(t,s)\big|$ имеем: $\mathcal{N}_0\in L_1[0;T]$.*

Доказательство следует непосредственно из [27, лемма 6] (это один из вариантов теоремы измеримого выбора). Пользуясь леммой 1, определим функции:

$$\mathcal{N}_0(t)=\max_{s\in[-1;1]}\big|\mathcal{N}(t,s)\big|,\quad \overline{\mathcal{N}}(t,s)=\begin{cases}\mathcal{N}_0(t), & |s|\leqslant 1,\\ \big|\mathcal{N}(t,s)\big|, & |s|>1.\end{cases}$$

Непосредственно из леммы 1 вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для всякого $x\in L_\infty[0;T]$ имеем: $\overline{\mathcal{N}}\big(\cdot,x(\cdot)\big)\in L_1[0;T]$.*

Лемма 2 позволяет рассмотреть уравнение

$$z(t)=\int\limits_0^t\overline{\mathcal{N}}\Big(s,y(s)+R\big[z(s)\big]\Big)\Big\{|y(s)|+\big|R[z(s)]\big|\Big\}\,ds,\quad t\in[0;T].\tag{4.2}$$

Очевидно, что $\big|\mathcal{N}(t,s)\big|\leqslant\overline{\mathcal{N}}(t,s)$. Поэтому уравнение (4.2) естественно рассматривать как мажорантное для исходного уравнения (4.1). Ясно также, что все решения уравнения (4.2) неотрицательны. Определим оператор $F\colon\mathbf{C}[0;T]\to\mathbf{C}[0;T]$ формулой:

$$F[x](t)=\int\limits_0^t\mathcal{N}\Big(s,y(s)+R\big[x(s)\big]\Big)\,\Big|y(s)+R\big[x(s)\big]\Big|\,ds,\quad x\in\mathbf{C}[0;T].$$

Лемма 3. *Оператор F непрерывен и компактен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность следует непосредственно из [27, лемма 7].

Для произвольного $m>0$ определим множество $\Omega=\big\{x\in\mathbf{C}[0;T]\colon\|x\|_{\mathbf{C}[0;T]}\leqslant m\big\}$.

Докажем предкомпактность множества $F\Omega$ в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. В соответствии с теоремой Арцела–Асколи [12, § I.5, теорема 4, с. 47], достаточно установить равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства $F\Omega$. Равномерная ограниченность вытекает непосредственно из леммы 1. Пусть $\mathcal{N}_0(t)$ — функция из леммы 1 при $M=\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}+\widehat{R}(m)$, $\widehat{R}(m)=\max\limits_{s\in[-m;m]}\big|R(s)\big|$. Выберем произвольно $x\in\Omega$, а также $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$ и оценим

$$\big|F[x](t_2)-F[x](t_1)\big|\leqslant\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big|\mathcal{N}\Big(s,y(s)+R\big[x(s)\big]\Big)\Big|\,\Big\{\big|y(s)\big|+\big|R\big[x(s)\big]\big|\Big\}\,ds\leqslant M\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathcal{N}_0(s)\,ds.$$

Отсюда, с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега, получаем равностепенную непрерывность семейства $F\Omega$. □

Лемма 4. *Пусть функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s)\leqslant\mu s$ для всех $s\in[0;1]$, $\mu>0$. Тогда уравнение* (4.2) *для всех $y\in\mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме, имеет по крайней мере одно решение $z\in\mathbf{C}[0;T]$, $z\geqslant 0$. Кроме того, существует непрерывная строго возрастающая функция $\gamma\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что $\gamma(0)=0$ и каждое из упомянутых решений удовлетворяет оценке $\|z\|_{\mathbf{C}[0;T]}\leqslant\gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)$; $\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}+\|R(z)\|_{\mathbf{C}[0;T]}\leqslant 1$. Более того, в случае $R(s)=s$ в качестве $\gamma(\cdot)$ можно указать функцию вида $\gamma(s)=Cs$ при некоторой константе $C>0$.*

Доказательство. По условию, $R(s) \leqslant \mu s$ для всех $s \in [0;1]$. Отсюда получаем: $s \leqslant R^{-1}(\mu s)$, или $t \leqslant \mu R^{-1}(t)$, $t = \mu s$, $t \in [0;\mu]$. С учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега, выберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_h \mathcal{N}_0(s)\,ds \leqslant \frac{1}{2\mu} \tag{4.3}$$

для всякого измеримого подмножества $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем разбиение отрезка $[0;T]\colon 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Потребуем выполнения условий:

$$\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \alpha, \quad \alpha + C_{k,\alpha} \leqslant 1, \quad C_{k,\alpha} \leqslant \mu, \tag{4.4}$$

где $C_{i,\alpha}$ — члены параметрической последовательности, определяемой рекуррентными соотношениями: $C_{i,\alpha} = R\left(\dfrac{\alpha}{\mu} + 2R^{-1}(C_{i-1,\alpha})\right)$, $C_{0,\alpha} = 0$, откуда

$$R^{-1}(C_{i-1,\alpha}) + \frac{\alpha + \mu\,R^{-1}(C_{i,\alpha})}{2\mu} = R^{-1}(C_{i,\alpha}), \quad i = \overline{1,k}. \tag{4.5}$$

Определим оператор $G\colon \mathbf{C}[0;T] \to \mathbf{C}[0;T]$ формулой

$$G[x](t) = \int\limits_0^t \overline{\mathcal{N}}\Big(s, y(s) + R\big[x(s)\big]\Big)\Big\{|y(s)| + \big|R[x(s)]\big|\Big\}\,ds.$$

Доказательство разрешимости уравнения (4.2) будем проводить последовательными продолжениями по отрезкам разбиения. При этом мы не будем вводить отдельного обозначения для сужений оператора G на $\mathbf{C}[0;t_i]$, используя то же самое обозначение G. Надеемся, что это не должно привести к недоразумениям.

1. Докажем, что уравнение (4.2) разрешимо на $[0;t_1]$. Определим множество

$$\Omega_1 = \left\{x \in \mathbf{C}[0;t_1]\colon \|x\|_{\mathbf{C}[0;t_1]} \leqslant R^{-1}(C_{1,\alpha}) = \frac{\alpha}{\mu},\ x \geqslant 0\right\}; \quad \text{напомним, что } \ C_{1,\alpha} = R(\alpha/\mu).$$

Очевидно, что множество Ω_1 замкнуто в $\mathbf{C}[0;t_1]$ и не пусто, так как содержит ноль.

2. Докажем, что $G\colon \Omega_1 \to \Omega_1$. Выберем произвольно $x \in \Omega_1$ и положим $z = G[x]$. Учитывая, что согласно (4.4),

$$\|y\|_{\mathbf{C}[0;t_1]} + \|R(x)\|_{\mathbf{C}[0;t_1]} = \|y\|_{\mathbf{C}[0;t_1]} + R\big(\|x\|_{\mathbf{C}[0;t_1]}\big) \leqslant \alpha + C_{1,\alpha} \leqslant 1,$$

и кроме того, $\big|R(x)\big| = R(x)$ для $x \geqslant 0$, имеем: $z(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \mathcal{N}_0(s)\big\{|y(s)| + \big|R[x(s)]\big|\big\}\,ds$ $\forall\, t \in [0;t_1]$. Отсюда, с учетом (4.3), (4.4), получаем оценку:

$$\|z\|_{\mathbf{C}[0;t_1]} \leqslant \frac{1}{2\mu}\big\{\alpha + R\big(\|x\|_{\mathbf{C}[0;t_1]}\big)\big\} \leqslant \frac{1}{2\mu}\left\{\alpha + R\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right\} \leqslant \frac{1}{2\mu}\,2\alpha = \frac{\alpha}{\mu}.$$

Таким образом, $z \in \Omega_1$.

3. Как уже пояснялось выше, для $x \in \Omega_1$ имеет место представление

$$G[x] = G_0[x] = \int\limits_0^t \mathcal{N}_0(s)\big\{|y(s)| + \big|R[x(s)]\big|\big\}\,ds.$$

Совершенно аналогично лемме 3 устанавливается, что оператор G_0, рассматриваемый как оператор $\mathbf{C}[0;t_1] \to \mathbf{C}[0;t_1]$, является непрерывным и компактным. Очевидно, что множество Ω_1 выпукло, замкнуто и ограничено в пространстве $\mathbf{C}[0;t_1]$. Из его ограниченности и компактности оператора получаем, что образ $G_0\Omega_1$ предкомпактен в $\mathbf{C}[0;t_1]$. Пользуясь наконец теоремой Шаудера [12, § XVI.3, с. 627], заключаем, что существует $z = z_1 \in \Omega_1 : z_1 = G_0[z_1] = G[z_1]$, то есть z_1 является решением уравнения (4.2) на $[0;t_1]$.

4. Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали, что на отрезке $[0;t_{i-1}]$ уравнение (4.2) имеет решение $z = z_{i-1} \in \mathbf{C}[0;t_{i-1}]$, удовлетворяющее оценкам: $z_{i-1} \geqslant 0$, $\|z_{i-1}\|_{\mathbf{C}[0;t_{i-1}]} \leqslant R^{-1}(C_{i-1,\alpha})$. Исходя из этого предположения, докажем, что на отрезке $[0;t_i]$ уравнение (4.2) имеет решение $z = z_i \in \mathbf{C}[0;t_i]$, удовлетворяющее оценкам: $z_i \geqslant 0$, $\|z_i\|_{\mathbf{C}[0;t_i]} \leqslant R^{-1}(C_{i,\alpha})$. Определим множество

$$\Omega_i = \Big\{ x \in \mathbf{C}[0;t_i] \colon x\big|_{[0;t_{i-1}]} = z_{i-1},\ \|x\|_{\mathbf{C}[t_{i-1};t_i]} \leqslant R^{-1}(C_{i,\alpha}),\ x \geqslant 0 \Big\}.$$

Очевидно, что Ω_i выпукло и замкнуто в $\mathbf{C}[0;t_i]$, и не пусто, так как содержит функцию

$$x(t) = \begin{cases} z_{i-1}(t), & t \in [0;t_{i-1}], \\ z_{i-1}(t_{i-1}), & t \in [t_{i-1};t_i] \end{cases} \quad \text{(ясно, что } C_{i-1,\alpha} < C_{i,\alpha}\text{)}.$$

5. Докажем, что $G \colon \Omega_i \to \Omega_i$. Выберем произвольно $x \in \Omega_i$ и положим $z = G[x]$. Учитывая, что согласно (4.4),

$$\|y\|_{\mathbf{C}[0;t_i]} + \|R(x)\|_{\mathbf{C}[0;t_i]} = \|y\|_{\mathbf{C}[0;t_i]} + R\big(\|x\|_{\mathbf{C}[0;t_i]}\big) \leqslant \alpha + C_{i,\alpha} \leqslant \alpha + C_{k,\alpha} \leqslant 1,$$

получаем:

$$z(t) = \int_0^t \mathcal{N}_0(s)\big\{|y(s)| + R[x(s)]\big\}\, ds \geqslant 0 \quad \forall\, t \in [0;t_i]. \tag{4.6}$$

В частности, $\forall\, t \in [0;t_{i-1}]$ имеем: $z(t) = \displaystyle\int_0^t \mathcal{N}_0(s)\Big\{|y(s)| + R\big[z_{i-1}(s)\big]\Big\}\, ds$, то есть

$$z(t) = \int_0^t \overline{\mathcal{N}}\big(s, y(s) + z_{i-1}(s)\big)\Big\{|y(s)| + \big|R[z_{i-1}(s)]\big|\Big\}\, ds = G[z_{i-1}](t) = z_{i-1}(t).$$

В то же время, $\forall\, t \in [t_{i-1};t_i]$ при $\mathcal{N}_0[y](s) \equiv \mathcal{N}_0(s)\big\{|y(s)| + R[x(s)]\big\}$ имеем:

$$z(t) = \int_0^{t_{i-1}} \mathcal{N}_0[y](s)\, ds + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{N}_0[y](s)\, ds = \int_0^{t_{i-1}} \mathcal{N}_0(s)\Big\{|y(s)| + R\big[z_{i-1}(s)\big]\Big\}\, ds + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{N}_0[y](s)\, ds =$$

$$= G_{i-1}[z_{i-1}](t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{N}_0[y](s)\, ds = z_{i-1}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{N}_0[y](s)\, ds.$$

Отсюда, с учетом (4.3), (4.5) и предположения индукции, получаем оценку:

$$\|z\|_{\mathbf{C}[t_{i-1};t_i]} \leqslant R^{-1}(C_{i-1,\alpha}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}_0(s)\, ds \big\{\|y\|_{\mathbf{C}[t_{i-1};t_i]} + \|R(x)\|_{\mathbf{C}[t_{i-1};t_i]}\big\} \leqslant$$

$$\leqslant R^{-1}(C_{i-1,\alpha}) + \frac{1}{2\mu}\big\{\alpha + C_{i,\alpha}\big\} \leqslant R^{-1}(C_{i-1,\alpha}) + \frac{1}{2\mu}\big\{\alpha + \mu\, R^{-1}(C_{i,\alpha})\big\} = R^{-1}(C_{i,\alpha}).$$

Таким образом, $z \in \Omega_i$.

6. Аналогично пункту 3, убеждаемся, что к оператору G, рассматриваемому как оператор $\Omega_i \to \Omega_i$, применима теорема Шаудера, откуда получаем, что существует $z = z_i \in \Omega_i$: $z_i = G[z_i]$, то есть z_i является решением уравнения (4.2) на $[0; t_i]$.

7. По индукции заключаем, что уравнение (4.2) имеет решение $z \in \mathbf{C}[0;T]$, удовлетворяющее оценкам: $z \geqslant 0$, $\|z\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant R^{-1}(C_{k,\alpha})$. В частности, см. (4.4), можно считать, что $\alpha = \|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}$. И по построению, $\big\|R(z)\big\|_{\mathbf{C}[0;T]} + \|y\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \alpha + C_{k,\alpha} \leqslant 1$.

Осталось положить $\gamma(\alpha) = C_{k,\alpha}$. Более того, если $R(s) = s$, то $\mu = 1$, $C_{k,\alpha} = C_k\alpha$, где $\{C_i\}$ — числовая последовательность: $C_i = 1 + 2C_{i-1}$, $C_0 = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 6. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $R(s) \leqslant \mu s$ для всех $s \in [0;1]$, $\mu > 0$. По лемме 4, для каждой функции $y \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малой по норме, существует решение $z = \overline{z} \geqslant 0$ мажорантного уравнения (4.2) такое, что $\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]} + \big\|R(\overline{z})\big\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant 1$. Будем предполагать, что $\mathcal{N}_0(t)$ — функция из леммы 1 при $M = 1$, $\Omega = \Big\{x \in \mathbf{C}[0;T]\colon \big|x(t)\big| \leqslant \overline{z}(t),\ t \in [0;T]\Big\}$. Очевидно, что множество Ω выпукло, замкнуто и ограничено в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. Кроме того, согласно лемме 3 его образ $F\Omega$ предкомпактен в $\mathbf{C}[0;T]$, причем оператор F непрерывен. Покажем, что $F\colon \Omega \to \Omega$. Выберем произвольно $x \in \Omega$ и положим $z = F[x]$. Для произвольного $t \in [0;T]$ оценим:

$$\big|z(t)\big| \leqslant \int_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s, y(s) + R[x(s)]\big)\Big| \Big\{\big|y(s)\big| + \big|R[x(s)]\big|\Big\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \mathcal{N}_0(s)\Big\{\big|R[\overline{z}(s)]\big| + \big|y(s)\big|\Big\}\, ds = \int_0^t \overline{\mathcal{N}}\big(s, R[\overline{z}(s)] + y(s)\big)\Big\{\big|R[\overline{z}(s)]\big| + \big|y(s)\big|\Big\}\, ds = \overline{z}(t),$$

учитывая, что $\overline{z}$ есть решение уравнения (4.2). Итак, $z \in \Omega$, то есть $F\colon \Omega \to \Omega$. Пользуясь наконец теоремой Шаудера [12, § XVI.3, с. 627], заключаем, что $\exists\, z \in \Omega$: $z = F[z]$. То есть z — решение уравнения (4.1). При этом $\|z\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \|\overline{z}\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant \gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)$. $\square$

Рассмотрим функционально-интегральное уравнение:

$$x(t) = y(t) + R\left(\int_0^t \mathcal{N}\big(s, x(s)\big)\big|x(s)\big|\, ds\right), \quad t \in [0;T]. \tag{4.7}$$

Делая замену $z = R^{-1}(x - y)$, сводим его к уравнению (4.1). Стало быть, справедлива следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s) \leqslant \mu s$ в окрестности нуля при $s \geqslant 0$, $\mu > 0$. Тогда уравнение (4.7) для всех $y \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме, имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathbf{C}[0;T]$. Кроме того, существует непрерывная строго возрастающая функция $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\gamma(0) = 0$ и каждое из упомянутых решений удовлетворяет оценке $\|x - y\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant R\Big(\gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)\Big)$. Более того, в случае $R(s) = s$ в качестве $\gamma(\cdot)$ можно указать функцию вида $\gamma(s) = Cs$ при некоторой константе $C > 0$.*

Теорема 8. *Пусть функция $\mathcal{N}(s, x)$ неотрицательна и не убывает по $x \geqslant 0$, а функции $R(\cdot)$ и $y(\cdot) \geqslant 0$ таковы, что $M = \inf\limits_{\sigma > 0} \dfrac{1}{\sigma} \displaystyle\int_0^T \mathcal{N}\Big(t, y(t) + R(\sigma)\Big)\Big\{y(t) + R(\sigma)\Big\}\, dt < 1$. Тогда уравнение (4.7) имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathbf{C}[0;T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и раньше, достаточно доказать разрешимость уравнения (4.1). Будем рассматривать оператор $F\colon \mathbf{C}[0;T]\to\mathbf{C}[0;T]$, определяемый формулой

$$F[x](t)=\int\limits_0^t \mathcal{N}\Big(s,y(s)+R[x(s)]\Big)\,\Big|y(t)+R[x(s)]\Big|\,dt.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon\in(0;1-M)$. Согласно условиям теоремы, $\exists\,\sigma>0$:

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^T \mathcal{N}\Big(t,y(t)+R(\sigma)\Big)\,\Big\{y(t)+R(\sigma)\Big\}\,dt<1-\varepsilon<1.$$

Определим множество $\Omega=\big\{x\in\mathbf{C}[0;T]\colon x\geqslant 0,\ \|x\|_{\mathbf{C}[0;T]}\leqslant\sigma\big\}$. Получаем:

$$0\leqslant F[x](t)\leqslant\int\limits_0^t \mathcal{N}\Big(s,y(s)+R(\sigma)\Big)\,\Big\{y(s)+R(\sigma)\Big\}\,ds<\sigma\quad\forall\,x\in\Omega,\quad t\in[0;T],$$

то есть $F[x]\in\Omega$. Таким образом, $F\colon\Omega\to\Omega$. Очевидно, что Ω выпукло, замкнуто и ограничено. По лемме 3, образ $F\Omega$ предкомпактен в $\mathbf{C}[0;T]$ и оператор F непрерывен. Поэтому согласно теореме Шаудера, F имеет неподвижную точку на Ω. □

Теорема 9. *Для всех достаточно малых $T>0$ уравнение (4.7) имеет по крайней мере одно решение $x\in\mathbf{C}[0;T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как и раньше, достаточно доказать разрешимость уравнения (4.1). Если $T<1$, продолжим функцию $y(t)$ по непрерывности на $[0;1]$. Положим $M=\|y\|_{\mathbf{C}[0;1]}+R(1)$. Для константы M найдем функцию $\mathcal{N}_0(s)$ из формулировки леммы 1. В соответствии с абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, для всякого достаточно малого $T\in(0;1]$ получим $M\int\limits_0^T\mathcal{N}_0(s)\,ds\leqslant 1$. Определим множество $\Omega=\big\{x\in\mathbf{C}[0;T]\colon\|x\|_{\mathbf{C}[0;T]}\leqslant 1\big\}$. Для произвольных $x\in\Omega$, $t\in[0;T]$ оценим $\big|F[x](t)\big|$:

$$\left|\int\limits_0^t \mathcal{N}\Big(s,y(s)+R\big[x(s)\big]\Big)\,\Big|y(s)+R\big[x(s)\big]\Big|\,ds\right|\leqslant M\int\limits_0^T\mathcal{N}_0(s)\,ds\leqslant 1,$$

то есть $F[x]\in\Omega$. Таким образом, $F\colon\Omega\to\Omega$. Очевидно, что Ω выпукло, замкнуто и ограничено. По лемме 3, образ $F\Omega$ предкомпактен в $\mathbf{C}[0;T]$ и оператор F непрерывен. Поэтому согласно теореме Шаудера, F имеет неподвижную точку на Ω. □

Рассмотрим функционально-интегральное уравнение:

$$x(t)=y(t)+R\left(\int\limits_0^t\Big|\mathcal{N}\big(s,x(s)\big)\Big|\,ds\right),\quad t\in[0;T],\tag{4.8}$$

предполагая, что выполнено следующее условие.

($\mathbf{N}_2$) Функция $\mathcal{N}(t,\xi)$ непрерывно дифференцируема по $\xi\in\mathbb{R}$ и вместе с производной $\mathcal{N}'_\xi(t,\xi)$ измерима по $t\in[0;T]$, причем: $\mathcal{N}(t,0)\equiv 0$; $\mathcal{N}\big(\cdot,x(\cdot)\big)\in L_1[0;T]$ для всех $x\in\mathbf{C}[0;T]$; $\mathcal{N}'_\xi\big(\cdot,x(\cdot)\big)\in L_1[0;T]$ для всех $x\in L_\infty[0;T]$.

Теорема 10. *Пусть функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s) \leqslant \mu s$ в окрестности нуля при $s \geqslant 0$, $\mu > 0$. Тогда уравнение (4.8) для всех $y \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме, имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathbf{C}[0;T]$. Кроме того, существует непрерывная строго возрастающая функция $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\gamma(0) = 0$ и каждое из упомянутых решений удовлетворяет оценке $\|x - y\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant R\Big(\gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)\Big)$. Более того, в случае $R(s) = s$ в качестве $\gamma(\cdot)$ можно указать функцию вида $\gamma(s) = Cs$ при некоторой константе $C > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения здесь почти полностью аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 7. Достаточно лишь заметить, что в соответствии с теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме имеем:

$$\int_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s, x(s)\big)\Big|\, ds = \int_0^t \left|\int_0^1 \mathcal{N}'_\xi\big(s, \theta\, x(s)\big)\, d\theta\right| \big|x(s)\big|\, ds. \qquad \square$$

Пусть V — произвольное множество параметров, $\big\{\mathcal{N}_v\colon v \in V\big\}$ — семейство функций, удовлетворяющее условиям $(\mathbf{N}_V)$. Рассмотрим $\forall\, \nu \geqslant 0$ следующее уравнение:

$$x(t) = y(t) + R\left(\sup_{v\in V} \int_0^t \mathcal{N}_v(s)\big|x(s)\big|^{\nu+1}\, ds\right), \quad t \in [0;T], \tag{4.9}$$

где, так же, как и раньше, $R\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная строго возрастающая функция, $R(0) = 0$. Делая замену $z = R^{-1}(x - y)$, легко сводим его к уравнению

$$z(t) = \sup_{v\in V} \int_0^t \mathcal{N}_v(s)\big|y(s) + R[z(s)]\big|^{\nu+1}\, ds, \quad t \in [0;T]. \tag{4.10}$$

Теорема 11. *Пусть функция $R(\cdot)$ допускает оценку $R(s) \leqslant \mu s$ в окрестности нуля, $\mu > 0$. Тогда уравнение (4.9) для всех $y \in \mathbf{C}[0;T]$, достаточно малых по норме, имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathbf{C}[0;T]$. Кроме того, существует непрерывная строго возрастающая функция $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\gamma(0) = 0$ и каждое из упомянутых решений удовлетворяет оценке $\|x - y\|_{\mathbf{C}[0;T]} \leqslant R\Big(\gamma\big(\|y\|_{\mathbf{C}[0;T]}\big)\Big)$. Более того, в случае $R(s) = s$ в качестве $\gamma(\cdot)$ можно указать функцию вида $\gamma(s) = Cs$ при некоторой константе $C > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и раньше, достаточно доказать разрешимость и оценить решение уравнения (4.10). Доказательство получается очевидной компиляцией доказательства леммы 4. Укажем лишь основные моменты, заслуживающие внимания.

1. *Свойства супремума.* Для произвольных функций $\varphi(v)$, $\psi(v)$, очевидно, имеем:

$$\sup_{v\in V} \varphi(v) = \sup_{v\in V}\big\{\varphi(v) - \psi(v) + \psi(v)\big\} \leqslant \sup_{v\in V}\big\{\varphi(v) - \psi(v)\big\} + \sup_{v\in V} \psi(v),$$

откуда

$$\sup_{v\in V} \varphi(v) - \sup_{v\in V} \psi(v) \leqslant \sup_{v\in V}\big\{\varphi(v) - \psi(v)\big\} \leqslant \sup_{v\in V}\big|\varphi(v) - \psi(v)\big|,$$

и таким образом,

$$\Big|\sup_{v\in V} \varphi(v) - \sup_{v\in V} \psi(v)\Big| \leqslant \sup_{v\in V}\big|\varphi(v) - \psi(v)\big|, \quad \Big|\sup_{v\in V} \varphi(v)\Big| \leqslant \sup_{v\in V}\big|\varphi(v)\big|.$$

2. Так же, как при доказательстве леммы 4, итерационно поддерживаются оценки: $z(t) \geqslant 0$, $\big|y(t)\big| + R\big(z(t)\big) \leqslant 1$. С учетом этого,

$$\int_\tau^t \mathcal{N}_v(s)\big|y(s) + R[z(s)]\big|^{\nu+1}\, ds \leqslant \int_\tau^t \mathcal{N}_v(s)\, ds \Big\{\|y\|_{\mathbf{C}[\tau;t]} + \big\|R[z]\big\|_{\mathbf{C}[\tau;t]}\Big\}.$$

3. С учетом пунктов 1, 2 и условия $(\mathbf{N}_V)$, вместо (4.3) будет: $\sup\limits_{v\in V}\int\limits_h \mathcal{N}_v(s)\, ds < \dfrac{1}{2\mu}$.

Остальные изменения очевидны. □

Замечание 5. Как видно из доказательства, утверждение теоремы 11 останется справедливым и при замене $\sup\limits_{v\in V}$ на $\operatorname{vrai}\sup\limits_{v\in V}$, где V — измеримое множество.

§ 5. Пример: система Навье–Стокса

Здесь мы будем опираться на некоторые факты и результаты, представленные в [28]. Поэтому для большего удобства отсылок к этой работе будем использовать следующую, принятую в ней, экономную («тензорную») систему обозначений. Прежде всего, в выражениях с индексами будем предполагать суммирование по повторяющимся индексам (с учетом соответствующей размерности). Для векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ скалярное произведение: $a \cdot b = a_i b_i$ $\left(= \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right)$; тензорное произведение: $a \otimes b = (a_i b_j)$ (матрица с указанными элементами). Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ скалярное произведение $A : B = A_{ij}B_{ij}$ $\left(= \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n A_{ij}B_{ij}\right)$. Для функции $\varphi(\xi, t)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\varphi_{,k} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}$, $\partial_t\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$. Для вектор-функции (векторного поля) $x = x(\xi, t)\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$:

$$x_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}, \quad \partial_t x = (\partial_t x_i) = (\partial_t x_1, \partial_t x_2, \partial_t x_3); \quad \nabla x = (x_{i,j}), \quad \operatorname{div} x = x_{i,i}, \quad (x\cdot\nabla)x = (x_j x_{i,j}).$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$: $\mathcal{E}(\xi) = \dfrac{1}{4\pi|\xi|}$, $\Gamma(\xi, t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{|\xi|^2}{4t}\right\}$, а также

$$K_{ijk}(\xi, t) = \frac{\partial K_{ij}}{\partial \xi_k}(\xi, t), \quad K_{ij}(\xi, t) = \Gamma(\xi, t)\delta_{ij} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi, t), \quad \Phi(\xi, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(\xi - \eta)\Gamma(\eta, t)\, d\eta.$$

Здесь K_{ij} — это так называемый тензор Озеена (Oseen tensor). Кроме того, будем обозначать $\mathbf{C}_0^{\infty,3}(Q)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых вектор-функций $x = x(\xi, t)\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ с компактным носителем в области Q; $\mathcal{D}'(Q)$ — пространство распределений, действующих на вектор-фунции, заданные в Q; $\langle p, \varphi\rangle$ — значение распределения $p \in \mathcal{D}'(Q)$ на функции $\varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty,3}(Q)$; $BMO(\Omega)$ — множество функций с ограниченным средним колебанием на Ω, с нормой $\|f\|_{BMO(\Omega)}$, равной величине:

$$\sup_{B(x_0,r)\subset\Omega} \frac{1}{\operatorname{mes} B(0,r)} \int\limits_{B(x_0,r)} \big|f - [f]_{B(x_0,r)}\big|\, d\xi, \quad [f]_{B(x_0,r)} = \frac{1}{\operatorname{mes} B(0,r)} \int\limits_{B(x_0,r)} f(\xi)\, d\xi.$$

В области $Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0; T)$, $T > 0$, рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса:

$$\partial_t x - \Delta x + (x \cdot \nabla)x + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} x = 0. \tag{5.1}$$

Существуют различные способы определения обобщенного решения системы (5.1). Проблема в том, что не удается указать класс, в котором при заданном начальном условии решение системы существует и единственно. Поэтому по отдельности выделяются классы единственности и классы существования. Традиционный способ определения ограниченного обобщенного решения системы (5.1) состоит в следующем. Вектор-функцию $x \in L^3_\infty(Q_T)$ будем называть ограниченным обобщенным решением системы (5.1), если

$$\int\limits_{Q_T} \big(x \cdot (\partial_t \varphi + \Delta\varphi) + x \otimes x : \nabla\varphi\big)\, d\xi\, dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty,3}(Q_T), \quad \operatorname{div}\varphi = 0$$

(это выражение получается умножением первого из уравнений (5.1) на функцию φ и последующим интегрированием по частям), а также условию бездивергентности:

$$\int\limits_{Q_T} x \cdot \nabla\varphi\, d\xi\, dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty,3}(Q_T).$$

Давление p восстанавливается по x стандартным способом как распределение:

$$\langle p, \operatorname{div}\varphi\rangle = \int\limits_{Q_T} \big(x \cdot (\partial_t \varphi + \Delta\varphi) + x \otimes x : \nabla\varphi\big)\, d\xi\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty,3}(Q_T)$$

(выражение в правой части при отсутствии соленоидальности поля φ зануляться не обязано). Задача (5.1) имеет бесконечно много обобщенных решений (в т. ч. и классических) в указанном смысле. В частности, всякая функция $x(\xi,t) = b(t)$ при $b \in L^3_\infty(0;T)$ является ее решением. При достаточной гладкости $b(t)$ это сразу видно из (5.1) при $p(\xi,t) = -b'(t)\cdot\xi$. Отсюда ясно, что наложение начального условия (в смысле следов)

$$x(\xi,0) = u(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{5.2}$$

еще не дает возможности однозначно выделить частное решение: от начального значения $b(0)$ функцию $b(t)$ можно продолжить как угодно (в том числе гладко) и любое из таких продолжений будет решением задачи Коши для системы (5.1). В [28, 1.2, 1.3] предлагается следующий подход к определению (слабого ограниченного) решения задачи Коши для системы (5.1). Прежде всего, рассматривается линеаризованная система

$$\partial_t x - \Delta x + \nabla p = -\operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} x = 0, \quad x\big|_{t=0} = u,$$

где $F = (F_{ij})$, $F_{ij}\colon Q_T \to \mathbb{R}$ — гладкое тензорное поле, $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — гладкое соленоидальное векторное поле. По F давление p определяется не однозначно, а с точностью до произвольной гармонической функции (и не только). Поэтому множество всех возможных представлений давления p сужается до так называемого канонического представления:

$$p_F(\xi,t) = -\frac{1}{3}\operatorname{tr} F(\xi,t) + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B(x,\delta)} \nabla^2\mathcal{E}(\xi-\eta) : F(\eta,t)\, d\eta.$$

При сделанных предположениях оказывается, что задача Коши для линеаризованной системы имеет единственное решение и это решение определяется формулой:

$$x_i(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(\xi-\eta,t) u_i(\eta)\, d\eta + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ijk}(\xi-\eta,t-\tau) F_{jk}(\eta,\tau)\, d\eta.$$

Если теперь взять $F_{jk}=x_jx_k$, то оказывается, что классическое (гладкое) решение задачи Коши (5.2) должно удовлетворять тождеству при $(\xi,t)\in Q_T$, $i=\overline{1,3}$:

$$x_i(\xi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(\xi-\eta,t)u_i(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^3}K_{ijk}(\xi-\eta,t-\tau)x_j(\eta,\tau)x_k(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{5.3}$$

Теперь при заданном $u\in U=\bigl\{u\in L^3_\infty(\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{div}u=0\bigr\}$ (производные трактуются в смысле распределений), ограниченное слабое решение задачи (5.2) для системы (5.1) можно понимать как функцию $x\in L^3_\infty(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству (5.3), при каноническом представлении давления p. Как фактически показано в [28, Theorem 1.3], функция x является слабым ограниченным решением системы (5.1) тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением в традиционном смысле и существует $p\in L_\infty\bigl(0,T;BMO(\mathbb{R}^3)\bigr)$ такое, что пара x,p удовлетворяет системе (5.1) в смысле распределений. Здесь используется следующее обозначение (X — банахово пространство, $[0;T]\subset\mathbb{R}$): $L_\infty(0,T;X)$ — множество всех существенно ограниченных измеримых по Бохнеру функций $\varphi\colon[0;T]\to X$; $\|\varphi\|_{L_\infty(0,T;X)}=\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in[0;T]}\bigl\|\varphi(t)\bigr\|_X$. Далее будем функцию $u\in U$ понимать как управление, рассматривая управляемое уравнение (5.3). Определим пространство

$$X_T=\bigl\{x\in L^3_\infty(Q_T)\colon \sqrt{t}\nabla x,\ t\nabla^2x,\ t\partial_t x\in L^*_\infty(Q_T),\ \operatorname{div}x=0\bigr\},$$

где $L^*_\infty(Q_T)$ — пространство векторных (матричных) функций соответствующей размерности с компонентами из $L_\infty(Q_T)$, с нормой

$$\|x\|_{X_T}=\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}+\|\sqrt{t}\nabla x\|_{L^*_\infty(Q_T)}+\|t\nabla^2x\|_{L^*_\infty(Q_T)}+\|t\partial_t x\|_{L^*_\infty(Q_T)}.$$

Как указано в [28, 1.3], пространство X_T банахово, а оператор $F_u=F_u[x]$, определяемый выражением в правой части (5.3), действует $X_T\to X_T$ и удовлетворяет оценке [28, Proposition 1.1]: $\bigl\|F_u[x]\bigr\|_{X_T}\leqslant C_0\bigl\{\|u\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}+\sqrt{T}\|x\|^2_{X_T}\bigr\}$ $\forall\,x\in X_T$, с константой $C_0>0$, не зависящей от T (далее будем считать ее заданной). Из [28, Theorem 1.1] очевидно, что оператор F_u допускает расширение до оператора $L^3_\infty(Q_T)\to L^3_\infty(Q_T)$, причем

$$\bigl\|F_u[x]\bigr\|_{L^3_\infty(Q_T)}\leqslant C\bigl\{\|u\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}+\sqrt{T}\|x\|^2_{L^3_\infty(Q_T)}\bigr\}\quad\forall\,x\in L^3_\infty(Q_T),$$

с константой $C>0$, не зависящей от T. В [28, 1.3] указано, что все то же самое можно сказать и про оператор, определяемый формулой $\widetilde{F}_u[x,y]=z$, где

$$z_i(\xi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(\xi-\eta,t)u_i(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^3}K_{ijk}(\xi-\eta,t-\tau)x_j(\eta,\tau)y_k(\eta,\tau)\,d\eta,$$

с оценками:

$$\bigl\|\widetilde{F}_u[x,y]\bigr\|_{X_T}\leqslant C_0\bigl(\|u\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}+\sqrt{T}\|x\|_{X_T}\|y\|_{X_T}\bigr)\,\forall x,y\in X_T;$$
$$\bigl\|\widetilde{F}_u[x,y]\bigr\|_{L^3_\infty(Q_T)}\leqslant C\bigl(\|u\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}+\sqrt{T}\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}\|y\|_{L^3_\infty(Q_T)}\bigr)\,\forall x,y\in L^3_\infty(Q_T).$$

Справедливо следующее утверждение [28, Proposition 1.2].

Лемма 5. *Существует абсолютная константа $\delta>0$ такая, что $\forall\,u\in U$ и $T=\delta\|u\|^{-2}_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}$ уравнение $x=F_u[x]$ имеет решение $x\in X_T$, причем $\|x\|_{X_T}\leqslant 2C_0\|u\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}$.*

Замечание 6. Утверждение леммы 5 означает, что глобальное решение уравнения (5.3) существует для всех достаточно малых управлений $u \in U$. При заданном управлении решение существует локально, то есть при всех достаточно малых $T > 0$.

Лемма 6. *Предположим, установлена единственность каждого локального решения уравнения* (5.3) *в пространстве* $L^3_\infty(Q_T)$. *Тогда всякое решение* x *из пространства* $L^3_\infty(Q_T)$ *будет принадлежать пространству* X_T, *причем* $\|x\|_{X_T} \leqslant 2C_0\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}$.

Доказательство. Пусть $x \in L^3_\infty(Q_T)$ — решение уравнения (5.3), $\tau = \delta\|x\|^{-2}_{L^3_\infty(Q_T)}$. Согласно лемме 5, на $[0;\tau]$ существует решение из $X_\tau \subset L^3_\infty(Q_\tau)$. Но тогда, в силу единственности локального решения, $x\big|_{[0;\tau]} \in X_\tau$, причем $\|x\|_{X_\tau} \leqslant 2C_0\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}$. Последовательными продолжениями получаем аналогичный факт на всем $[0;T]$. □

Итак, будем рассматривать уравнение (5.3), то есть $x = F_u[x]$, в пространстве $W = L^3_\infty(Q_T)$. Ясно, что оно имеет вид абстрактного уравнения (1.1) при $F[\cdot;u] = F_u$. Условимся понимать модуль вектора как максимум из модулей компонент, а норму в $L^3_\infty(Q_T)$ — как норму в $L_\infty(Q_T)$ модуля соответствующего вектора. Покажем, что, с точностью до замены супремума на существенный супремум (понятно, что это несущественно; см. на этот счет замечание 5), выполнено условие $(\mathbf{F}_V)$ при $V = V[\sigma] = \big\{v = (\xi;\tau) \in Q_T\big\}$,

$$\nu = 0, \quad \mathcal{N}_v(s) = 27 \max_{i,j,k=\overline{1,3}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big|\,d\eta\,\chi_{[0;\tau]}(s)\sigma, \quad v = (\xi;\tau) \in V[\sigma].$$

Положим $W_\tau = W[0;\tau] = L^3_\infty(Q_\tau)$. Выберем произвольно $t \in (0;T)$, а также $x, y \in W$, $\|x\|_W \leqslant \sigma$, $\|x-y\|_{W_s} \leqslant \beta(s) \leqslant \sigma$, $s \in [0;t]$. Очевидно, что

$$\|y\|_W \leqslant \|y-x\|_W + \|x\|_W \leqslant 2\sigma,$$
$$|x_jx_k - y_jy_k| = \big|x_j(x_k-y_k) + (x_j-y_j)y_k\big| \leqslant \sigma(x-y)_k + 2\sigma(x-y)_j.$$

Оценим норму разности $\Big\|\big(F_u[y]-F_u[x]\big)_i\Big\|_{L_\infty(Q_t)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{(\xi;\tau)\in Q_t} |\Psi_i(\xi,\tau)|$, где принято обозначение:

$$\Psi_i(\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big[x_j(\eta,s)x_k(\eta,s) - y_j(\eta,s)y_k(\eta,s)\big]\,d\eta.$$

Соответственно,

$$\big|\Psi_i(\xi,\tau)\big| \leqslant 3\sigma \int\limits_0^t \chi_{[0;\tau]}(s)\|y-x\|_{W_s} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big|\,d\eta\,ds.$$

Отсюда получаем:

$$\Big\|F_u[y]-F_u[x]\Big\|_{W_t} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{(\xi;\tau)\in V[\sigma]} \int\limits_0^t \mathcal{N}_v(s)\,\|y-x\|_{W_s}\,ds.$$

Соответствующим аналогом уравнения (1.3) будет

$$\beta(t) = \alpha + \operatorname*{vrai\,sup}_{(\xi;\tau)\in V[\sigma]} \int\limits_0^t \mathcal{N}_v(s)\big|\beta(s)\big|\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{5.4}$$

Остается проверить, что семейство $\{\mathcal{N}_v,\ v \in V[\sigma]\}$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{N}_V)$. Как показано в [28, p. 668], справедлива оценка $\|K_{ijk}\|_{L_1(Q_T)} \leqslant C_1\sqrt{T}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^T \chi_{[0;\tau]}(s) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big|\,d\eta\,ds \leqslant \|K_{ijk}\|_{L_1(Q_T)} \leqslant C_1\sqrt{T}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}_v \in L_1^+[0;T]\ \forall\, v \in V[\sigma]$, то есть условие $(\mathbf{N}_V)$, 1) выполнено. Отсюда же следует выполнение условия $(\mathbf{N}_V)$, 2). Пусть $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h < \delta$. Рассмотрим

$$\int\limits_h \chi_{[0;\tau]}(s) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big|\,d\eta\,ds \leqslant \|\chi_{\widetilde{h}[\xi,\tau]}K_{ijk}\|_{L_1(Q_T)},$$

где $\widetilde{h}[\xi,\tau]$ — множество, полученное некоторым параллельным переносом из множества h. Отсюда, с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега, очевидно, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(\xi;\tau)\in V[\sigma]} \int\limits_h \chi_{[0;\tau]}(s) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|K_{ijk}(\xi-\eta,\tau-s)\big|\,d\eta\,ds \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to +0,$$

то есть условие $(\mathbf{N}_V)$, 3) выполнено. Таким образом, условие $(\mathbf{F}_V)$ выполнено. Выполнение условия $(\mathbf{F}_5)$ очевидно (существует продолжение нулем). В соответствии с замечанием 4, справедливы утверждения теорем 4, 5. С учетом леммы 6, отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть управлению $\overline{u} \in U$ отвечает решение $\overline{x} \in L^3_\infty(Q_T)$ уравнения (5.3). Тогда существуют числа $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ такие, что $\forall\, u \in U$, при условии*

$$\big\|r[u,\overline{u}]\big\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \alpha, \quad r_i[u,\overline{u}](\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(\xi-\eta,t)\big[u_i(\eta)-\overline{u}_i(\eta)\big]\,d\eta,$$

уравнение (5.3) имеет единственное решение $x \in X_T \subset L^3_\infty(Q_T)$. При этом справедливы оценки: $\|x-\overline{x}\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \gamma\,\|r\|_{L^3_\infty(Q_T)}$, $\|x\|_{X_T} \leqslant 2C_0\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}$; $\|x-\overline{x}\|_{L^3_\infty(Q_t)} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;T]$, где $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ — решение уравнения (5.4).

Следствие 1. *Пусть $\overline{u} = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^3$. Тогда существуют числа $\overline{\alpha} > 0$, $\overline{\gamma} > 0$ такие, что $\forall\, u \in U$, при условии:*

$$\|u-\overline{u}\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant \overline{\alpha},$$

уравнение (5.3) имеет единственное решение $x \in X_T \subset L^3_\infty(Q_T)$. При этом справедливы оценки: $\|x-\overline{u}\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \gamma\,\|r[u,\overline{u}]\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \overline{\gamma}\,\|u-\overline{u}\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)}$, $\|x\|_{X_T} \leqslant 2C_0\|x\|_{L^3_\infty(Q_T)}$.

Доказательство. Как указано в [28, p. 680], всякое слабое ограниченное решение $x = b(t)$, то есть не зависящее от пространственных переменных, является постоянным вектором. Действительно, функция давления $p(\xi,t) = -b'(t)\cdot\xi$ должна иметь ограниченное среднее колебание по всему пространству $\mathbb{R}^3$ [28, Theorem 1.3], а это возможно только в случае $b'(t) = 0$. С другой стороны, при постоянном векторе начальных данных этот постоянный вектор является решением системы (5.1) при постоянном давлении p. Отсюда [28, Theorem 1.3] вытекает, что всякий постоянный вектор является слабым ограниченным решением. Из сказанного следует, что для всякого $\overline{u} = \mathrm{const}$ существует единственное слабое ограниченное решение $\overline{x} = \overline{u}$. В соответствии с теоремой 12, найдутся числа $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ такие, что $\forall\, u \in U$, при условии

$$\big\| r[u, \overline{u}] \big\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \alpha,$$

уравнение (5.3) имеет единственное решение $x \in X_T \subset L^3_\infty(Q_T)$; при этом справедливы доказываемые оценки. Очевидно, что $\big| r_i(\xi, t) \big| \leqslant \|u - \overline{u}\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)} \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)}$, где принято обозначение $\psi(\xi, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(\xi - \eta, t)\, d\eta$. Из [28, Theorem 1.1] следует, что $\psi \in L_\infty(Q_T)$. Таким образом, требуемая малость величины

$$\big\| r[u, \overline{u}] \big\|_{L^3_\infty(Q_T)} \leqslant \alpha$$

достигается при условии:

$$\overline{\gamma} \equiv 3\, \|\psi\|_{L_\infty(Q_T)} \overline{\alpha} \leqslant \alpha, \quad \|u - \overline{u}\|_{L^3_\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant \overline{\alpha}. \qquad \square$$

Замечание 7. Для того, чтобы читатель мог получить какое-то представление о значимости полученного результата, воспроизведем некоторые обзорные замечания из [28, Introduction]. Проблема глобального существования гладких решений системы Навье–Стокса привлекает внимание многих специалистов в течение последних десятилетий — не случайно институт Клэя включил ее в список проблем тысячелетия. Несмотря на многочисленные попытки решить ее, на сегодняшний день известно лишь два типа глобальных результатов для трехмерной нестационарной системы Навье–Стокса: существование слабых решений в специальных (энергетических) классах и существование гладких решений для малых начальных данных в смысле подходящей (специально выбранной) нормы; вопрос о единственности слабых решений до сих пор оставался открытым. Единственность решения доказывалась лишь в энергетических классах (это так называемая слабо-сильная единственность). Итак, ранее была известна лишь справедливость следствия 1 при $\overline{u} = 0 \in \mathbb{R}^3$. Мы, стало быть, обобщили этот результат на случай произвольного $\overline{u} = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^3$.

Замечание 8. Выбор примера обусловлен необходимостью показать, что условия $(\mathbf{N}_V)$ и $(\mathbf{F}_V)$, которые выглядят несколько экзотическими, не являются надуманными. Кроме того, данный пример представляет и очевидный самостоятельный интерес. В связи с ограниченностью объема журнальной статьи, другие примеры, интересные и уместные в связи с развиваемой теорией, предполагается рассмотреть в отдельных статьях.

Замечание 9. Напомним, что доказательство теоремы 12 основано на предположении о локально-интегральном аналоге условия Липшица — условии $(\mathbf{F}_V)$ и на применении «цепочечной» технологии и принципа сжимающих отображений на каждом шаге (см. доказательство теоремы 5 и замечание 4). На этом пути одну из основных трудностей составляет обычно выявление инвариантного множества оператора правой части на каждом шаге. Результат о разрешимости функционально-интегрального уравнения — в данном случае это уравнение (5.4) — позволяет указать это множество легко и просто, см. формулировки теорем 1, 2. Однако касательно рассмотренного примера возникает вопрос: можно ли было здесь использовать ранее известные результаты по теме УСГР, опирающиеся на локальное условие Липшица или его аналоги? В связи с этим можно заметить, что уравнение (5.3) представляется уравнением типа Гаммерштейна (хотя для того, чтобы увидеть это, нужно проделать некоторую работу). Можно его представить и как функциональное вольтеррово уравнение в пространстве $L^3_\infty(Q_T)$. Ранее известные результаты (упомянутого типа) —

см., например, [6, 8, 10], касаются случая $L^3_\infty(\Pi)$ для ограниченного множества П. Здесь у нас множество Q_T неограничено. С другой стороны, если «закрыть глаза» на это обстоятельство, то применение упомянутых результатов потребовало бы проверки специфических условий касательно линейной операторной составляющей A правой части. В частности, наличия $\forall\,\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочки $\{H_0, \ldots, H_k\}$, с проверкой так называемого δ-условия: $\|P_h A P_h\| < \delta$ при $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$. При такой проверке все равно пришлось бы опираться на условия $(\mathbf{N}_V)$, $(\mathbf{F}_V)$. В более общей ситуации речь может пойти, например, о проверке условия суперравностепенной квазинильпотентности [5]. Отметим, наконец, что при исследовании УСГР уравнения (5.3) можно было бы попытаться воспользоваться результатами [2]. Однако для этого пришлось бы преобразовывать его к уравнению [2, (2.2)], а оно в данной ситуации оказывается довольно громоздким, и проверка соответствующих условий — до некоторой степени трудоемким делом. Как видно из представленного примера, использование известного результата о разрешимости соответствующего функционально-интегрального уравнения — более простой путь. Так же, как при исследовании сходимости числовых рядов, в той или иной конкретной ситуации те или иные конкретные инструменты могут оказаться более или менее удобными. Думается, что в случае операторов сложного вида, действующих в пространствах $n \geqslant 3$ переменных, использование готовых результатов о разрешимости естественно возникающих функционально-интегральных уравнений в пространстве $\mathbb{R}$, проще, чем установление специальных свойств этих операторов. Важно также и то, что методика данной статьи позволяет получать более точные (и «непрерывные» по времени) оценки решений операторных уравнений через решение функционально-интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного вольтеррова уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614. https://doi.org/10.35634/vm220407
2. Чернов А. В. О сохранении глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12. Вып. 1. С. 56–82. https://www.mathnet.ru/rus/ufa503
3. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
4. Чернов А. В. О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095–2111. https://doi.org/10.31857/S004446690003555-1
5. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
6. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf3318
7. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. https://www.mathnet.ru/rus/znsl1983
8. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

9. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 40. С. 3–138.
10. Сумин В. И., Чернов А. В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000, № 1198-В00.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. https://zbmath.org/0484.46003
13. Agarwal R. P., O'Regan D., Wong P. J. Y. Constant-sign solutions of systems of integral equations. Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-01255-1
14. Yang Zhilin. Positive solutions for a system of nonlinear Hammerstein integral equations and applications // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 218. Issue 22. P. 11138–11150. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.05.006
15. Bugajewska D., Bugajewski D., Hudzik H. BV_φ-solutions of nonlinear integral equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 287. Issue 1. P. 265–278. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00550-X
16. Hernández-Verón M. A., Yadav N., Martínez E., Singh S. Kurchatov-type methods for non-differentiable Hammerstein-type integral equations // Numerical Algorithms. 2023. Vol. 93. Issue 1. P. 131–155. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01406-8
17. Moroz V., Zabreiko P. On Hammerstein equations with natural growth conditions // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1999. Vol. 18. No. 3. P. 625–638. https://doi.org/10.4171/ZAA/902
18. Cabada A., Infante G., Fernández Tojo F. A. Nontrivial solutions of Hammerstein integral equations with reflections // Boundary Value Problems. 2013. Vol. 2013. Article number: 86. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-86
19. López-Somoza L., Minhós F. Existence and multiplicity results for some generalized Hammerstein equations with a parameter // Advances in Difference Equations. 2019. Vol. 2019. Article number: 423. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2359-y
20. Graef J., Kong Lingju, Minhós F. Generalized Hammerstein equations and applications // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72. Nos. 1–2. P. 369–383. https://doi.org/10.1007/s00025-016-0615-y
21. Aziz W., Leiva H., Merentes N. Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$ // Quaestiones Mathematicae. 2014. Vol. 37. Issue 3. P. 359–370. https://doi.org/10.2989/16073606.2014.894675
22. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations // Integral Equations and Operator Theory. 2003. Vol. 46. Issue 4. P. 387–398. https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8
23. Bugajewska D., O'Regan D. On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation // Acta Mathematica Hungarica. 2005. Vol. 107. Issue 4. P. 295–306. https://doi.org/10.1007/s10474-005-0197-8
24. Pachpatte B. G. On a generalized Hammerstein-type integral equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1985. Vol. 106. Issue 1. P. 85–90. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90132-5
25. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. Boca Raton: CRC Press, 2008. https://zbmath.org/1154.45001
26. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. https://zbmath.org/0517.46001
27. Чернов А. В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации старшего коэффициента эллиптического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 538–547. https://doi.org/10.1134/S0374064115040111
28. Seregin G. A., Shilkin T. N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations // Russian Mathematical Surveys. 2018. Vol. 73. Issue 4. P. 661–724. https://doi.org/10.1070/RM9822

Поступила в редакцию 15.07.2023

Принята к публикации 30.01.2024

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. Исследование условий сохранения глобальной разрешимости операторных уравнений с помощью систем сравнения в виде функционально-интегральных уравнений в классе $\mathbf{C}[0;T]$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 109–136.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 1. Pp. 109–136.

A. V. Chernov

Investigation of conditions for preserving global solvability of operator equations by means of comparison systems in the form of functional-integral equations in $\mathbf{C}[0;T]$

Keywords: second kind evolutionary Volterra equation of general form, functional integral equation, comparison system, preservation of global solvability, uniqueness of solution, nonlinear nonstationary Navier–Stokes system.

MSC2020: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm240108

Let U be the set of admissible controls, $T > 0$ and it be given a scale of Banach spaces $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, such that the set of constrictions of functions from $W = W[0;T]$ to a closed segment $[0;\tau]$ coincides with $W[0;\tau]$; $F[\cdot;u]\colon W \to W$ be a controlled Volterra operator, $u \in U$. For the operator equation $x = F[x;u]$, $x \in W$, we introduce a comparison system in the form of functional-integral equation in the space $\mathbf{C}[0;T]$. We establish that, under some natural hypotheses on the operator F, the preservation of the global solvability of the comparison system pointed above is sufficient to preserve (under small perturbations of the right-hand side) the global solvability of the operator equation. This fact itself is analogous to some results which were obtained by the author earlier. The central result of the paper consists in a set of signs for stable global solvability of functional-integral equations mentioned above which do not use hypotheses similar to local Lipschitz continuity of the right-hand side. As a pithy example of special interest, we consider a nonlinear nonstationary Navier–Stokes system in the space $\mathbb{R}^3$.

REFERENCES

1. Chernov A. V. On totally global solvability of evolutionary Volterra equation of the second kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 593–614 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220407
2. Chernov A. V. On preservation of global solvability of controlled second kind operator equation, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, issue 1, pp. 56–81. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-56
3. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
4. Chernov A. V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, issue 12, pp. 2018–2030. https://doi.org/10.1134/S0965542518120096
5. Sumin V. I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
6. Sumin V. I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, issue 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A
7. Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70. https://doi.org/10.1007/BF01109723
8. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1992.
9. Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Blow-up of solutions to strongly nonlinear equations of the pseudoparabolic type, *Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya*, 2006, vol. 40, pp. 3–138 (in Russian).

10. Sumin V. I., Chernov A. V. *Volterra operator equations in Banach spaces: existence stability of global solutions*, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 2000, 75 p. Deposited in VINITI 25.04.2000, no. 1198-B00 (in Russian).
11. Hartman P. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. https://zbmath.org/0125.32102
12. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*, Oxford: Pergamon Press, 1982. https://zbmath.org/0484.46003
13. Agarwal R. P., O'Regan D., Wong P. J. Y. *Constant-sign solutions of systems of integral equations*, Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-01255-1
14. Yang Zhilin. Positive solutions for a system of nonlinear Hammerstein integral equations and applications, *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, issue 22, pp. 11138–11150. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.05.006
15. Bugajewska D., Bugajewski D., Hudzik H. BV_φ-solutions of nonlinear integral equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 287, issue 1, pp. 265–278. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00550-X
16. Hernández-Verón M. A., Yadav N., Martínez E., Singh S. Kurchatov-type methods for non-differentiable Hammerstein-type integral equations, *Numerical Algorithms*, 2023, vol. 93, issue 1, pp. 131–155. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01406-8
17. Moroz V., Zabreiko P. On Hammerstein equations with natural growth conditions, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 1999, vol. 18, no. 3, pp. 625–638. https://doi.org/10.4171/ZAA/902
18. Cabada A., Infante G., Fernández Tojo F. A. Nontrivial solutions of Hammerstein integral equations with reflections, *Boundary Value Problems*, 2013, vol. 2013, article number: 86. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-86
19. López-Somoza L., Minhós F. Existence and multiplicity results for some generalized Hammerstein equations with a parameter, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, article number: 423. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2359-y
20. Graef J., Kong Lingju, Minhós F. Generalized Hammerstein equations and applications, *Results in Mathematics*, 2017, vol. 72, nos. 1–2, pp. 369–383. https://doi.org/10.1007/s00025-016-0615-y
21. Aziz W., Leiva H., Merentes N. Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$, *Quaestiones Mathematicae*, 2014, vol. 37, issue 3, pp. 359–370. https://doi.org/10.2989/16073606.2014.894675
22. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations, *Integral Equations and Operator Theory*, 2003, vol. 46, issue 4, pp. 387–398. https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8
23. Bugajewska D., O'Regan D. On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation, *Acta Mathematica Hungarica*, 2005, vol. 107, issue 4, pp. 295–306. https://doi.org/10.1007/s10474-005-0197-8
24. Pachpatte B. G. On a generalized Hammerstein-type integral equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1985, vol. 106, issue 1, pp. 85–90. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90132-5
25. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of integral equations*, Boca Raton: CRC Press, 2008. https://zbmath.org/1154.45001
26. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* (Functional analysis), Moscow: Nauka, 1980. https://zbmath.org/0517.46001
27. Chernov A. V. Differentiation of the functional in a parametric optimization problem for the higher coefficient of an elliptic equation, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 4, pp. 548–557. https://doi.org/10.1134/S0012266115040114
28. Seregin G. A., Shilkin T. N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations, *Russian Mathematical Surveys*, 2018, vol. 73, issue 4, pp. 661–724. https://doi.org/10.1070/RM9822

Received 15.07.2023

Accepted 30.01.2024

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. Investigation of conditions for preserving global solvability of operator equations by means of comparison systems in the form of functional-integral equations in $\mathbf{C}[0;T]$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 109–136.