ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 65–79.

УДК 517.977

© *А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров*

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ГРУППЫ УБЕГАЮЩИХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i,\ u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y_j = b_j y_j + v,\ v \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка α функции f. Множества допустимых управлений U_i, V — выпуклые компакты, a_i, b_j — вещественные числа. Терминальные множества — выпуклые компакты. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций. Показано, что возможна такая конфликтная ситуация с равными возможностями всех участников, при которой один преследователь ловит всех убегающих.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная.

DOI: 10.35634/vm240105

Введение

При исследовании динамических игр можно выделить методы, ориентированные на построение оптимальных стратегий [1], и методы, нацеленные на гарантированный результат [2]. К последним следует отнести, прежде всего, первый метод Л. С. Понтрягина [2] и метод разрешающих функций [3, 4]. Указанные методы обеспечивают достаточные условия завершения игры за конечное время из заданных начальных позиций.

Метод разрешающих функций, предложенный для исследования линейных задач преследования с геометрическими ограничеми, в настоящее время распространен на дифференциальные игры с интегральными ограничениями, дифференциальные игры с запаздыванием, дифференциальные игры с дробными производными, а также на игры, описываемые уравнениями во временных шкалах [5–11].

В настоящее время одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр преследования–убегания является разработка методов решения задач, посвященных конфликтному взаимодействию групп преследователей и убегающих [12–15].

Для получения более содержательных условий разрешимости задач преследования–уклонения делаются различные дополнительные предположения. В работе [16] была рассмотрена задача преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что все убегающие используют одно и то же управление. Были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Задачу преследования, в которой все убегающие используют одно и то же управление, в дальнейшем будем называть задачей о преследовании скоординированных убегающих. Развитием данной работы являются, в частности, работы [17, 18], в которых получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление.

В данной работе рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы скоординированных убегающих при условии, что законы движения игроков описываются уравнениями с дробными производными, а их возможности не предполагаются равными. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего и всех убегающих.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1.1 (см. [19]). Пусть $\alpha \in (0,1)$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — такая функция, что f' абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$. *Производной по Капуто* порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\big(D^{(\alpha)}f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1}\, ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих $E_1,\ldots,E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)}y_j = b_j y_j + v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{2}$$

Здесь $i \in I = \{1,\ldots,n\}$, $J = \{1,\ldots,m\}$, $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha \in (0,1)$, $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто функции f порядка α, a_i, b_j — вещественные числа. Считаем, что $x_i^0 - y_j^0 \notin M_{ij}$ для всех $i \in I$, $j \in J$, где M_{ij} $(i \in I,\ j \in J)$ — заданные выпуклые компакты.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих $E_1,\ldots,E_m$ выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Пусть $v\colon [0,\infty) \to V$ — измеримая функция. Предысторией $v_t(\cdot)$ в момент t функции v будем называть сужение функции v на $[0,t]$. Измеримая функция $v\colon [0,\infty) \to V$ называется допустимой.

Определение 1.2. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям всех игроков $z^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,\ldots,y_m^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in J$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i.

§ 2. Достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего

Определение 2.1. В игре $G(n+m)$ происходит *поимка хотя бы одного убегающего*, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$ преследователей $P_1,\ldots,P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0,T]$, существуют момент $\tau \in [0,T]$ и номера $l \in I$, $p \in J$, для которых $x_l(\tau) - y_p(\tau) \in M_{lp}$.

Введем следующие обозначения:

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho + \mu)} \text{ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера } (\rho > 0, z, \mu \in \mathbb{R}^1),$$

$$f_i^1(t) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1), \quad f_j^2(t) = E_{1/\alpha}(b_j t^\alpha, 1),$$

$$g_i^1(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\big(a_i (t-\tau)^\alpha, \alpha\big), \quad g_j^2(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\big(b_j (t-\tau)^\alpha, \alpha\big),$$

$$F_i^1(t) = \int_0^t g_i^1(t,\tau)\, d\tau, \quad F_j^2(t) = \int_0^t g_j^2(t,\tau)\, d\tau,$$

$\operatorname{Int} A, \operatorname{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A. Отметим, что из теоремы 4.1.1 [20] следует, что для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$, $\tau \in [0,t]$ справедливы неравенства $g_i^1(t,\tau) \geqslant 0$, $g_j^2(t,\tau) \geqslant 0$.

Пусть $\gamma_{ij}(t,\tau)$ $(i \in I,\ j \in J,\ t \geqslant 0,\ \tau \in [0,t])$ — некоторые ограниченные, измеримые по (t,τ), локально суммируемые по τ (при каждом t) функции, которые, следуя [21], будем называть функциями сдвига. Зафиксируем некоторый набор функций сдвига $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_{ij}(t,\tau),\ i \in I,\ j \in J\}$, и обозначим

$$\xi_{ij}(t) = f_i^1(t)x_i^0 - f_j^2(t)y_j^0 + \int_0^t \gamma_{ij}(t,\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_{ij}(t,\tau,v,\gamma_{ij}) = \Big\{\lambda \geqslant 0 \mid \big(g_i^1(t,\tau)U_i - g_j^2(t,\tau)v - \gamma_{ij}(t,\tau)\big) \cap \lambda\big(M_{ij} - \xi_{ij}(t)\big) \neq \varnothing\Big\},$$
$$W_{ij}(t,\tau,\gamma_{ij}) = \bigcap_{v \in V} W_{ij}(t,\tau,v,\gamma_{ij}).$$

Предположение 2.1. Существуют отображение $q\colon I \to J$ и функции сдвига $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_{iq(i)}(t,\tau),\ i \in I\}$ такие, что для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ выполнено условие

$$0 \in W_{iq(i)}(t,\tau,\gamma_{iq(i)}).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнено предположение 2.1 и существуют $T > 0$ и $l \in I$ такие, что $\xi_{lq(l)}(T) \in M_{lq(l)}$. Тогда в игре $G(n+m)$ происходит поимка.*

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$U_{lq(l)}(T,\tau,v) = \big\{u_l \in U_l \mid g_l^1(T,\tau)u_l - g_{q(l)}^2(T,\tau)v - \gamma_{lq(l)}(T,\tau) = 0\big\}.$$

В силу предположения 2.1, $U_{lq(l)}(T,\tau,v) \neq \varnothing$ для всех $\tau \in [0,T]$, $v \in V$. Из теоремы измеримого выбора [22] следует, что существует измеримый селектор $u_l^2(\tau,v) \in U_{lq(l)}(T,\tau,v)$. Полагаем управление преследователя P_l равным

$$u_l(\tau) = u_l^2\big(T,\tau,v(\tau)\big), \quad \tau \in [0,T].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Решение задачи Коши для систем (1), (2) представимо в виде [23]

$$x_l(t) - y_{q(l)}(t) = \xi_{lq(l)}(t) + \int_0^t \big(g_l^1(t,\tau)u_l(\tau) - g_{q(l)}^2(t,\tau)v(\tau) - \gamma_{lq(l)}(t,\tau)\big)\,d\tau.$$

Поэтому $x_l(T) - y_{q(l)}(T) = \xi_{lq(l)}(T) \in M_{lq(l)}$. Теорема доказана. □

В дальнейшем будем считать, что $\xi_{ij}(t) \notin M_{ij}$ для всех $i \in I$, $j \in J$, $t \geqslant 0$. Каждому преследователю P_i, $i \in I$, поставим в соответствие разрешающие функции

$$\lambda_{ij}(t,\tau,v) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda \in W_{ij}(t,\tau,v,\gamma_{ij})\big\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнено предположение 2.1 и существует $T > 0$ такой, что*

$$\inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_0^T \lambda_{iq(i)}\big(T,\tau,v(\tau)\big)\,d\tau \geqslant 1.$$

Тогда в игре $G(n+m)$ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Определим функции

$$h_{iq(i)}\big(t, v(\cdot)\big) = 1 - \int_0^t \lambda_{iq(i)}\big(T, \tau, v(\tau)\big)\, d\tau,$$

множества

$$T_i\big(v(\cdot)\big) = \Big\{\tau \in [0, T] \mid h_{iq(i)}\big(\tau, v(\cdot)\big) = 0\Big\}$$

и моменты времени

$$t_i^*\big(v(\cdot)\big) = \begin{cases} \inf\Big\{\tau \mid \tau \in T_i\big(v(\cdot)\big)\Big\}, & \text{если } T_i\big(v(\cdot)\big) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } T_i\big(v(\cdot)\big) = \varnothing. \end{cases}$$

Из условия теоремы следует, что существует номер $l \in I$, для которого $t_l^*\big(v(\cdot)\big) \leqslant T$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i^1(\tau, v) = \Big\{u_i \in U_i \mid g_i^1(T, \tau)u_i - g_{q(i)}^2(T, \tau)v - \gamma_{iq(i)}(T, \tau) \in \lambda_{iq(i)}(T, \tau, v)\big(M_{iq(i)} - \xi_{iq(i)}(T)\big)\Big\},$$
$$U_i^2(\tau, v) = \big\{u_i \in U_i \mid g_i^1(T, \tau)u_i - g_{q(i)}^2(T, \tau)v - \gamma_{iq(i)}(T, \tau) = 0\big\}.$$

Из теоремы измеримого выбора [22] следует, что существуют измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v) \in U_i^1(\tau, v)$, $u_i^2(\tau, v) \in U_i^2(\tau, v)$. Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, следующим образом. Если $t_i^*\big(v(\cdot)\big) < T$, то полагаем

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^1\big(t, v(t)\big), & t \in \Big[0, t_i^*\big(v(\cdot)\big)\Big], \\ u_i^2\big(t, v(t)\big), & t \in \Big(t_i^*\big(v(\cdot)\big), T\Big]. \end{cases}$$

Если $t_i^*\big(v(\cdot)\big) \geqslant T$, то полагаем

$$u_i(t) = u_i^1\big(t, v(t)\big), \quad t \in [0, T].$$

Решение задачи Коши для систем (1), (2) представимо в виде [23]

$$x_i(t) - y_{q(i)}(t) = \xi_{iq(i)}(t) + \int_0^t \big(g_i^1(t, \tau)u_l(\tau) - g_{q(i)}^2(t, \tau)v(\tau) - \gamma_{iq(i)}(t, \tau)\big)\, d\tau.$$

Поэтому

$$x_l(T) - y_{q(l)}(T) \in \xi_{lq(l)}(T) + \int_0^{t_l^*(v(\cdot))} \lambda_{lq(l)}\big(T, \tau, v(\tau)\big)\big(M_{lq(l)} - \xi_{lq(l)}(T)\big)\, d\tau =$$
$$= \xi_{lq(l)}(T)\left(1 - \int_0^{t_l^*(v(\cdot))} \lambda_{lq(l)}\big(T, \tau, v(\tau)\big)\, d\tau\right) + \int_0^{t_l^*(v(\cdot))} \lambda_{lq(l)}\big(T, \tau, v(\tau)\big) M_{lq(l)}\, d\tau \subset M_{lq(l)}.$$

Следовательно, в игре $G(n+m)$ происходит поимка. Теорема доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$, выполнено предположение 2.1 и существует $T > 0$ такой, что*

$$\inf_{v(\cdot)} \max_i \int_0^T \frac{\lambda_{iq(i)}^0\big(T, \tau, v(\tau)\big)}{\|\xi_{iq(i)}(T)\|}\, d\tau \geqslant 1,$$

где

$$\lambda^0_{iq(i)}(t,\tau,v) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda\xi^0_{iq(i)}(t) \in g^1_i(t,\tau)U_i - g^2_{q(i)}(t,\tau)v - \gamma_{iq(i)}(t,\tau)\bigr\},$$
$$\xi^0_{iq(i)}(t) = \frac{\xi_{iq(i)}(t)}{\|\xi_{iq(i)}(t)\|}.$$

Тогда в игре $G(n+m)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \frac{\lambda^0_{iq(i)}\bigl(T,\tau,v(\tau)\bigr)}{\|\xi_{iq(i)}(T)\|}\,d\tau,$$

множества

$$T_i\bigl(v(\cdot)\bigr) = \bigl\{\tau \in [0,T] \mid h_{iq(i)}(\tau) = 0\bigr\}$$

и моменты времени

$$t^*_i\bigl(v(\cdot)\bigr) = \begin{cases} \inf\Bigl\{\tau \mid \tau \in T_i\bigl(v(\cdot)\bigr)\Bigr\}, & \text{если } T_i\bigl(v(\cdot)\bigr) \neq \varnothing,\\ +\infty, & \text{если } T_i\bigl(v(\cdot)\bigr) = \varnothing. \end{cases}$$

Из условия теоремы следует, что существует номер $l \in I$, для которого $t^*_l\bigl(v(\cdot)\bigr) \leqslant T$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U^1_i(\tau,v) = \Bigl\{u_i \in U_i \mid g^1_i(T,\tau)u_i - g^2_{q(i)}(T,\tau)v - \gamma_{iq(i)}(T,\tau) = -\lambda^0_{iq(i)}(T,\tau,v)\xi^0_{iq(i)}(T)\Bigr\},$$
$$U^2_i(\tau,v) = \bigl\{u_i \in U_i \mid g^1_i(T,\tau)u_i - g^2_{q(i)}(T,\tau)v - \gamma_{iq(i)}(T,\tau) = 0\bigr\}.$$

Из теоремы измеримого выбора [22] следует, что существуют измеримые селекторы $u^1_i(\tau,v) \in U^1_i(\tau,v)$, $u^2_i(\tau,v) \in U^2_i(\tau,v)$. Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, следующим образом. Если $t^*_i\bigl(v(\cdot)\bigr) < T$, то полагаем

$$u_i(t) = \begin{cases} u^1_i\bigl(t,v(t)\bigr), & t \in \Bigl[0,t^*_i\bigl(v(\cdot)\bigr)\Bigr],\\ u^2_i\bigl(t,v(t)\bigr), & t \in \Bigl(t^*_i\bigl(v(\cdot)\bigr),T\Bigr]. \end{cases}$$

Если $t^*_i\bigl(v(\cdot)\bigr) \geqslant T$, то полагаем

$$u_i(t) = u^1_i\bigl(t,v(t)\bigr), \quad t \in [0,T].$$

Решение задачи Коши для систем (1), (2) представимо в виде [23]

$$x_i(t) - y_{q(i)}(t) = \xi_{iq(i)}(t) + \int_0^t \bigl(g^1_i(t,\tau)u_i(\tau) - g^2_{q(i)}(t,\tau)v(\tau) - \gamma_{iq(i)}(t,\tau)\bigr)\,d\tau.$$

Поэтому

$$x_l(T) - y_{q(l)}(T) = \xi_{lq(l)}(T) - \int_0^{t^*_l(v(\cdot))} \lambda^0_{lq(l)}\bigl(T,\tau,v(\tau)\bigr)\xi^0_{lq(l)}(T)\,d\tau =$$
$$= \xi^0_{lq(l)}(T)\|\xi_{lq(l)}(T)\|\left(1 - \int_0^{t^*_l(v(\cdot))} \frac{\lambda^0_{lq(l)}\bigl(T,\tau,v(\tau)\bigr)}{\|\xi_{lq(l)}(T)\|}\,d\tau\right) = 0.$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим далее подробнее ситуацию, в которой для всех $i \in I$

$$M_{ij} = \{0\}, \quad U_i = \{u_i \mid \|u_i - c_i\| \leqslant R_i\}, \quad V = \{v \mid \|v - c\| \leqslant R\}, \tag{3}$$

где $c, c_i \in \mathbb{R}^k$, $i \in I$, R, R_i, $i \in I$, — положительные вещественные числа, в качестве нормы рассматривается евклидова норма.

Предположение 2.2. Существует отображение $q\colon I \to J$, такое что для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$, $\tau \in [0, t]$ справедливы неравенства $R_i g_i^1(t, \tau) \geqslant R g_{q(i)}^2(t, \tau)$.

Из данного предположения следует, что предположение 2.1 будет выполнено, если в качестве $\gamma_{iq(i)}(t, \tau)$ взять $\gamma_{iq(i)}(t, \tau) = g_i^1(t, \tau)c_i - g_{q(i)}^2(t, \tau)c$. Тогда

$$\xi_{iq(i)}(t) = f_i^1(t)x_i^0 - f_{q(i)}^2(t)y_{q(i)}^0 + F_i^1(t)c_i - F_{q(i)}^2(t)c.$$

Пусть далее $\delta(t) = \min\limits_{\|p\|=1} \max\limits_i \bigl(p, \xi_{iq(i)}^0(t)\bigr)$, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b.

Предположение 2.3. Существует момент $T > 0$ такой, что
a) $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{\xi_{iq(i)}^0(T),\ i \in I\}$;
b) справедливо неравенство

$$\sum_{i \in I} \|\xi_{iq(i)}(T)\| \leqslant 2\delta(T) R \min_i F_{q(i)}^2(T). \tag{4}$$

Лемма 2.1. *Пусть M_i, U_i, V определены соотношением (3) и выполнены предположения 2.2, 2.3. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i \in I} \left(\|\xi_{iq(i)}(T)\| - \int_0^T \lambda_{iq(i)}^0\bigl(T, \tau, v(\tau)\bigr)\, d\tau \right) \leqslant 0.$$

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 1 [24]. □

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого*

$$\|\xi_{lq(l)}(T)\| - \int_0^T \lambda_{lq(l)}^0\bigl(T, t, v(t)\bigr)\, dt \leqslant 0.$$

Теорема 2.4. *Пусть M_i, U_i, V определены соотношением (3) и выполнены предположения 2.2, 2.3. Тогда в игре $G(n+m)$ происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимая функция. В силу следствия 2.1, существует номер $l \in I$, для которого

$$\|\xi_{lq(l)}(T)\| - \int_0^T \lambda_{lq(l)}^0\bigl(T, t, v(t)\bigr)\, dt \leqslant 0 \quad \text{или} \quad 1 - \int_0^T \frac{\lambda_{lq(l)}^0\bigl(T, t, v(t)\bigr)}{\|\xi_{lq(l)}(T)\|}\, dt \leqslant 0.$$

Осталось применить теорему 2.3. Теорема доказана. □

Следствие 2.2 (см. [25]). *Пусть $m = 1$, $a_i = b_1 = a \leqslant 0$, $c_i = c = 0$, $R_i = R > 0$, $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$ и*

$$y_1^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Рассмотрим отображение $q\colon I \to J$ вида $q(i) = 1$. Из условий теоремы следует, что $f_i^1(t) = f_1^2(t) = f(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)$, $F_i^1(t) = F_1^2(t) = F(t) = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1)$ для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$. Приняв $\gamma_{i1}(t,\tau) = 0$, получаем, что $\xi_{i1}(t) = f(t)\big(x_i^0 - y_1^0\big)$. Поэтому для всех $T > 0$

$$\sum_{i\in I} \|\xi_{i1}(T)\| = |f(T)| \sum_{i\in I} \|\xi_{i1}(0)\| = f(T) \sum_{i\in I} \|\xi_{i1}(0)\|,$$

$\delta(T) = \delta(0) > 0$ в силу [26]. Значит неравенство (4) можно представить в виде

$$\sum_{i\in I} \|\xi_{i1}(0)\| \leqslant 2\delta(0) R \frac{F(T)}{f(T)}. \tag{5}$$

Если $a < 0$, то при $t \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [20, с. 12]:

$$f(t) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad F(t) = -\frac{1}{a} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{F(T)}{f(T)} = T^\alpha \Gamma(1-\alpha) + O(T^\alpha),$$

поэтому неравенство (5) будет выполнено автоматически при достаточно большом T.

Если $a = 0$, то $f(t) = 1$, $F(t) = \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$. Следовательно, $\dfrac{F(T)}{f(T)} = \dfrac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, и поэтому неравенство (5) будет выполнено автоматически при достаточно большом T. Следствие доказано. $\square$

Пример 2.1. Пусть $k = 2$, $I = \{1,2,3,4\}$, $J = \{1,2,3\}$, $a_i = b_j = a \leqslant 0$,

$$U_i = V = \{v \mid \|v\| \leqslant 1\},$$
$$x_1^0 = (1;1), \quad x_2^0 = (-1;1), \quad x_3^0 = (-1;-1), \quad x_4^0 = (1;-1),$$
$$y_1^0 = (0;-2), \quad y_2^0 = (1;2).$$

Зададим отображение $q\colon I \to J$, полагая $q(1) = 2$, $q(2) = q(3) = q(4) = 1$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве следствия 2.2, получим, что выполнены предположения 2.2 и 2.3. Следовательно, в игре $G(4+2)$ происходит поимка.

§ 3. Поимка всех убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(1+m)$ с участием $1+m$ лиц: одного преследователя P_1 и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения преследователя P_1 имеет вид

$$D^{(\alpha)} x_1 = u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad u \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)} y_j = v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V.$$

Здесь $J = \{1, \ldots, m\}$, $x_1, y_j, u, v \in \mathbb{R}^k$, $V = \big\{v \mid \|v\| \leqslant 1\big\}$, $\alpha \in (0,1)$, $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто функции f порядка α. Считаем, что $x_1^0 \neq y_j^0$ для всех $j \in J$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих $E_1, \ldots, E_m$ выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть существует $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$, такой, что $(y_j^0 - x_1^0, v_0) < 0$ для всех $j \in J$. Все убегающие используют постоянное управление v_0, преследователь P_1 знает v_0. Тогда в игре $G(1+m)$ происходит поимка всех убегающих.*

§ 4. Доказательство теоремы 3.1

1. Покажем, что существуют момент $T_m > 0$ и вектор u_m, $\|u_m\| = 1$, для которых будет выполнено равенство $x_1(T_m) = y_m(T_m)$, где $x_1(t)$ — траектория преследователя P_1, использующая постоянное управление u_m.

Пусть преследователь P_1 использует постоянное управление u на отрезке $[0, T_m]$ (момент T_m будет определен ниже). Тогда

$$x_1(t) = x_1^0 + \frac{t^\alpha u}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad y_m(t) = y_m^0 + \frac{t^\alpha v_0}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Равенство $x_1(t) = y_m(t)$ представимо в виде

$$y_m^0 + \frac{t^\alpha v_0}{\Gamma(1+\alpha)} = x_1^0 + \frac{t^\alpha u}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{6}$$

Обозначим $z_j^0 = (y_j^0 - x_1^0)\Gamma(1+\alpha)$, $j \in J$. Из (6) следует, что

$$u = v_0 + \frac{z_m^0}{t^\alpha}.$$

Потребуем, чтобы $\|u\| = 1$. Получаем уравнение

$$\|z_m^0\|^2 + 2(z_m^0, v_0)t^\alpha = 0.$$

Так как по условию $(z_m^0, v_0) < 0$, то корнем последнего уравнения будет

$$T_m = \left(-\frac{\|z_m^0\|^2}{2(z_m^0, v_0)}\right)^{1/\alpha}.$$

Полагаем теперь управление преследователя P_1 на $[0, T_m]$ равным $u_m = v_0 + \dfrac{z_m^0}{T_m^\alpha}$. Получим, что в момент T_m преследователь P_1 осуществит поимку убегающего E_m.

2. Построим далее управление преследователя P_1, гарантирующее поимку E_{m-1}. Пусть на $[T_m, T_{m-1}]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_{m-1} будет определен ниже). Тогда для $t > T_m$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{T_m}(t-s)^{\alpha-1}u_m\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{T_m}^{t}(t-s)^{\alpha-1}u\,ds = \\ &= x_1^0 + \frac{u_m}{\Gamma(1+\alpha)}\big(t^\alpha - (t-T_m)^\alpha\big) + \frac{(t-T_m)^\alpha u}{\Gamma(1+\alpha)}, \end{aligned}$$

$$y_{m-1}(t) = y_{m-1}^0 + \frac{t^\alpha v_0}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Равенство $x_1(t) = y_{m-1}(t)$ представимо в виде

$$(t-T_m)^\alpha u = z_{m-1}^0 + v_0 t^\alpha - \big(t^\alpha - (t-T_m)^\alpha\big)u_m.$$

Обозначим $h_m(t) = t^\alpha - (t-T_m)^\alpha$ и рассмотрим функцию

$$f_{m-1}(t) = \|z_{m-1}^0 + v_0 t^\alpha - u_m h_m(t)\|^2 - (t-T_m)^{2\alpha}.$$

Тогда, в силу выбора u_m,

$$f_{m-1}(T_m) = \|z_{m-1}^0 - z_m^0\|^2 > 0.$$

Представим функцию $f_{m-1}(\cdot)$ в виде

$$f_{m-1}(t) = t^\alpha\left(\frac{\|z_{m-1}^0\|^2}{t^\alpha} + 2(z_{m-1}^0, v_0) - 2(v_0, u_m)h_m(t) - \right.$$
$$\left. - \frac{2h_m(t)(z_{m-1}^0, u_m)}{t^\alpha} + \frac{h_m^2(t)}{t^\alpha} + \frac{t^{2\alpha} - (t - T_m)^{2\alpha}}{t^\alpha}\right).$$

Так как $(z_{m-1}^0, v_0) < 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} h_m(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{h_m^2(t)}{t^\alpha} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2\alpha} - (t - T_m)^{2\alpha}}{t^\alpha} = 0,$$

то $\lim\limits_{t\to+\infty} f_{m-1}(t) = -\infty$.

Поэтому существует момент $T_{m-1} > T_m$, для которого $f_{m-1}(T_{m-1}) = 0$. Выбирая свое постоянное управление u_{m-1} на $[T_m, T_{m-1}]$ в виде

$$u_{m-1} = \frac{z_{m-1}^0 + v_0 T_{m-1}^\alpha - h_m(T_{m-1})u_m}{(T_{m-1} - T_m)^\alpha},$$

преследователь P_1 в момент T_{m-1} осуществит поимку E_{m-1}.

3. Предположим, что определены векторы $u_m, \ldots, u_{k+1}$ и моменты времени $T_m < < T_{m-1} < \ldots < T_{k+1}$, гарантирующие преследователю P_1 поимку убегающих $E_m, \ldots, E_{k+1}$. Построим далее управление преследователя P_1, гарантирующее поимку убегающего E_k.

Пусть на $[T_{k+1}, T_k]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_k будет определен ниже). Обозначим

$$h_j(t) = (t - T_{j+1})^\alpha - (t - T_j)^\alpha, \quad s_j(t) = \sum_{l=j}^{m} u_l h_l(t), \quad j = m-1, \ldots, k.$$

Тогда для $t \geqslant T_{k+1}$ имеем

$$x_1(t) = x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{T_m} (t-s)^{\alpha-1}u_m\,ds + \ldots + \int_{T_{k+2}}^{T_{k+1}} (t-s)^{\alpha-1}u_{k+1}\,ds + \right.$$
$$\left. + \int_{T_{k+1}}^{t} (t-s)^{\alpha-1}u\,ds\right) = x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\big(h_m(t)u_m + \ldots + h_{k+1}(t)u_{k+1} + (t - T_{k+1})^\alpha u\big) =$$
$$= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\big(s_{k+1}(t) + (t - T_{k+1})^\alpha u\big),$$
$$y_k(t) = y_k^0 + \frac{v_0 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Равенство $x_1(t) = y_k(t)$ представимо в виде

$$(t - T_{k+1})^\alpha u = z_k^0 + t^\alpha v_0 - s_{k+1}(t).$$

Рассмотрим функцию

$$f_k(t) = \|z_k^0 + t^\alpha v_0 - s_{k+1}(t)\|^2 - (t - T_{k+1})^{2\alpha}.$$

Тогда

$$f_k(T_{k+1}) = \|z_k^0 + T_{k+1}^\alpha v_0 - s_{k+1}(T_{k+1})\|^2.$$

Из соотношения

$$(T_{k+1}-T_{k+2})^\alpha u_{k+1} = z^0_{k+1} + T^\alpha_{k+1} v_0 - s_{k+2}(T_{k+1}),$$

полученного в силу индукционного предположения, и равенства

$$s_{k+1}(T_{k+1}) = \sum_{j=k+1}^{m} u_j h_j(T_{k+1}) =$$
$$= s_{k+2}(T_{k+1}) + u_{k+1} h_{k+1}(T_{k+1}) = s_{k+2}(T_{k+1}) + u_{k+1}(T_{k+1}-T_{k+2})^\alpha$$

следует, что $s_{k+1}(T_{k+1}) = z^0_{k+1} + T^\alpha_{k+1} v_0$, и поэтому

$$f_k(T_{k+1}) = \|z^0_k - z^0_{k+1}\|^2 > 0.$$

Кроме того, функция $f_k(\cdot)$ представима в виде

$$f_k(t) = t^\alpha\left(\frac{\|z^0_k\|^2}{t^\alpha} + 2(z^0_k, v_0) - \frac{2\big(z^0_k, s_{k+1}(t)\big)}{t^\alpha} - 2\big(v_0, s_{k+1}(t)\big) + \right.$$
$$\left. + \frac{\|s_{k+1}(t)\|^2}{t^\alpha} + \frac{t^{2\alpha} - (t-T_{k+1})^{2\alpha}}{t^\alpha}\right).$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} h_j(t) = 0$ для всех $j = k+1, \ldots, m$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2\alpha} - (t-T_{k+1})^{2\alpha}}{t^\alpha} = 0, \quad (z^0_k, v_0) < 0,$$

то $\lim\limits_{t\to+\infty} f_k(t) = -\infty$.

Следовательно, существует момент $T_k > T_{k+1}$, для которого $f_k(T_k) = 0$. Выбирая свое управление u_k на $[T_{k+1}, T_k]$ в виде

$$u_k = \frac{z^0_k - s_{k+1}(T_k) + T^\alpha_k v_0}{(T_k - T_{k+1})^\alpha},$$

преследователь P_1 в момент T_k осуществит поимку убегающего E_k. Таким образом доказано, что в игре $G(1+m)$ происходит поимка всех убегающих. Теорема доказана. □

Следствие 4.1. *Пусть существует гиперплоскость H такая, что $y^0_j \in H$ для всех $j \in J$, $x^0_1 \notin H$, v_0 — единичный вектор нормали гиперплоскости H, направленный в полупространство, содержащее x^0_1. Убегающие используют постоянное управление v_0. Тогда в игре $G(1+m)$ происходит поимка всех убегающих.*

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из теоремы 3.1, так как $(y^0_j - x^0_1, v_0) < 0$ для всех $j \in J$.

Замечание 4.1 (см. [27]). Пусть выполнены условия следствия, и законы движения каждого участника имеют вид

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{y}_j = v_j, \quad u, v_j \in V, \quad j \in J.$$

Тогда в игре $G(1+m)$ преследователь P_1 осуществит поимку не более одного убегающего.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21–71–10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Чикрий А. А. Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
4. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
5. Саматов Б. Т. Задача преследования–убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 7. С. 17–28. https://www.mathnet.ru/rus/at5465
6. Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 324–333. https://www.mathnet.ru/rus/timm1103
7. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales // Dynamic Games and Applications. 2022. Vol. 12. No. 2. P. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
8. Можегова Е. С. Об одной задаче группового преследования во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 130–140. https://doi.org/10.35634/vm230109
9. Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х. Я., Абдуалимова Г. М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118. https://doi.org/10.35634/vm230107
10. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282
11. Machtakova A. I., Petrov N. N. Matrix resolving functions in the linear group pursuit problem with fractional derivatives // Ural Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. No. 1. P. 76–89. https://doi.org/10.15826/umj.2022.1.008
12. Chen Mo, Zhou Zhengyuan, Tomlin C. J. Multiplayer reach–avoid games via pairwise outcomes // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62. Issue 3. P. 1451–1457. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2577619
13. Garcia E., Casbeer D. W., von Moll A., Pachter M. Multiple pursuer multiple evader differential games // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol. 66. Issue 5. P. 2345–2350. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3003840
14. Sun Wei, Tsiotras P., Yezzi A. J. Multiplayer pursuit–evasion games in three-dimensional flow fields // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 4. P. 1188–1207. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00304-4
15. Zhou Zhengyuan, Ding Jerry, Huang Haomiao, Takei Ryo, Tomlin C. Efficient path planning algorithms in reach–avoid problems // Automatica. 2018. Vol. 89. P. 28–36. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.11.035
16. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Доклады Академии наук УзССР. 1983. № 4. С. 3–6. https://zbmath.org/0642.90110
17. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.
18. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37. https://elibrary.ru/item.asp?id=18040387
19. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II // Geophysical Journal International. 1967. Vol. 13. Issue 5. P. 529–539. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

20. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функции Миттаг–Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. https://www.mathnet.ru/rus/cmfd182
21. Чикрий А. А., Чикрий В. К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением // Проблемы управления и информатики. 2016. № 2. С. 65–78.
22. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
23. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповiдi Нацiональної академiї наук України. 2007. № 1. С. 50–55.
24. Петров Н. Н., Мачтакова А. И. Линейная задача группового преследования с дробными производными, простыми матрицами и разными возможностями игроков // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 7. С. 933–943. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54130111
25. Петров Н. Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. https://doi.org/10.20537/vm170105
26. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. https://www.mathnet.ru/rus/de328
27. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374. https://www.mathnet.ru/rus/de4921

Поступила в редакцию 10.01.2024

Принята к публикации 20.02.2024

Мачтакова Алёна Игоревна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1570-5241
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Цитирование: А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров. О двух задачах преследования группы убегающих в дифференциальных играх с дробными производными // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 65–79.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 1. Pp. 65–79.

A. I. Machtakova, N. N. Petrov

On two problems of pursuit of a group of evaders in differential games with fractional derivatives

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, fractional derivative.

MSC2020: 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm240105

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of a group of evaders by a group of pursuers is considered, described by a system of the form

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i,\ u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y_j = b_j y_j + v,\ v \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order α of the function f. The sets of admissible controls U_i, V are convex compacts, a_i, b_j are real numbers. The terminal sets are convex compacts. Sufficient conditions for the solvability of the pursuit problems are obtained. In the study, the method of resolving functions is used as the basic one. It is shown that such a conflict situation with equal opportunities for all participants is possible, in which one pursuer catches all the evaders.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation, project 21-71-10070, https://rscf.ru/en/project/21-71-10070/.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://www.springer.com/gp/book/9781461283188
   Original Russian text published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974.
2. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
3. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
   Original Russian text published in Chikrii A. A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy*, Kiev: Naukova dumka, 1992.
4. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for controlling several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
5. Samatov B. T. The pursuit–evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, issue 7, pp. 1072–1081. https://doi.org/10.1134/S0005117913070023
6. Chikrii A. A., Chikrii G. Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047
7. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales, *Dynamic Games and Applications*, 2022, vol. 12, no. 2, pp. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
8. Mozhegova E. S. On a group pursuit problem on time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 130–140 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230109
9. Mamadaliev N. A., Mustapokulov Kh. Ya., Abdualimova G. M. The method of resolving functions for solving a pursuit problem with integral constraints on player controls, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 103–118 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230107

10. Tukhtasinov M. A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 273–282 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282
11. Machtakova A. I., Petrov N. N. Matrix resolving functions in the linear group pursuit problem with fractional derivatives, *Ural Mathematical Journal*, 2022, vol. 8, no. 1, pp. 76–89. https://doi.org/10.15826/umj.2022.1.008
12. Chen Mo, Zhou Zhengyuan, Tomlin C. J. Multiplayer reach–avoid games via pairwise outcomes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, issue 3, pp. 1451–1457. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2577619
13. Garcia E., Casbeer D. W., von Moll A., Pachter M. Multiple pursuer multiple evader differential games, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, vol. 66, issue 5, pp. 2345–2350. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3003840
14. Sun Wei, Tsiotras P., Yezzi A. J. Multiplayer pursuit–evasion games in three-dimensional flow fields, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 1188–1207. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00304-4
15. Zhou Zhengyuan, Ding Jerry, Huang Haomiao, Takei Ryo, Tomlin C. Efficient path planning algorithms in reach–avoid problems, *Automatica*, 2018, vol. 89, pp. 28–36. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.11.035
16. Satimov N., Mamatov M. Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian). https://zbmath.org/0642.90110
17. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
18. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 6, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
19. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II, *Geophysical Journal International*, 1967, vol. 13, issue 5, pp. 529–539. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
20. Popov A. Yu., Sedletskii A. M. Distribution of roots of Mittag–Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3
21. Chikriy A. A., Chikrii V. K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, issue 3, pp. 20–35. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v48.i3.30
22. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis*, Boston: Birkhäuser, 1990.
23. Chikrii A. A., Matichin I. I. On the analogue of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
24. Petrov N. N., Machtakova A. I. Linear group pursuit problem with fractional derivatives, simple matrices, and different possibilities of players, *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 933–944. https://doi.org/10.1134/S0012266123070078
25. Petrov N. N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170105
26. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de328
27. Petrov N. N., Petrov N. Nikandrovich. The "Cossack–robber" differential game, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de4921

Received 10.01.2024

Accepted 20.02.2024

Alena Igorevna Machtakova, Post-graduate student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1570-5241
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Nikolai Nikandrovich Petrov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Citation: A. I. Machtakova, N. N. Petrov. On two problems of pursuit of a group of evaders in differential games with fractional derivatives, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 65–79.