МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 483–496.

УДК 517.55

© *А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец*

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ОБОБЩЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ СВОЙСТВОМ МОРЕРА

В данной статье рассматриваются непрерывные функции, заданные на границе ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$, $n>1$, и обладающие обобщенным граничным свойством Морера. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область D для некоторых достаточных множеств Γ комплексных прямых, пересекающих росток порождающего многообразия, лежащий внутри области.

Ключевые слова: голоморфное продолжение, многомерное граничное условие Морера.

DOI: 10.35634/vm230307

Введение

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций, непрерывных на границе ограниченной области в $\mathbb{C}^n$, в эту область. Речь пойдет о функциях, удовлетворяющих многомерному граничному условию Морера. Оно заключается в равенстве нулю интегралов от данной функции по пересечению границы области с комплексными прямыми. Е. Гринберг [1] изучил функции со свойством Морера в шаре (фактически этот результат содержался еще в статье М. Л. Аграновского и Р. Е. Вальского [2]). И. Глобевник и Е. Л. Стаут [3] получили граничную теорему Морера для произвольной ограниченной области с дважды гладкой границей. Локальный вариант теоремы Морера рассмотрен И. Глобевником [4], Д. Говекар–Лебан [5]. В работе С. Г. Мысливец [6] рассмотрены функции со свойством Морера вдоль комплексных кривых, в работах авторов [7, 8] приведены некоторые семейства комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций. В монографии [9] приведен ряд относящихся к данному вопросу результатов (см. также обзор [10]).

Мы рассматриваем в качестве достаточного множества — множество комплексных прямых, пересекающих росток порождающего многообразия, лежащий в области.

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ $(n>1)$ — ограниченная область со связной $\mathcal{C}^1$ гладкой границей вида

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n\colon \rho(z)<0\},$$

где $\rho(z)$ — $\mathcal{C}^1$-гладкая, вещественнозначная функция в окрестности множества $\overline{D}$ такая, что $d\rho\big|_{\partial D}\neq 0$. Мы отождествляем $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j=x_j+iy_j$, $x_j, y_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$.

Рассмотрим комплексные прямые $l_{z,b}$ вида

$$l_{z,b}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n\colon \zeta_j=z_j+b_jt,\ j=1,\ldots,n,\ t\in\mathbb{C}\}, \tag{1.1}$$

проходящие через точку $z\in\mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b=\{b_1,\ldots,b_n\}\in\mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda\neq 0$).

Определение 1. Непрерывная функция f на ∂D ($f \in \mathcal{C}(\partial D)$) удовлетворяет *свойству Морера вдоль комплексной прямой* $l_{z,b}$, если

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(\zeta)\, dt = 0.$$

Предполагается, что прямая $l_{z,b}$ пересекает границу области D трансверсально.

В данной статье рассматривается семейство комплексных прямых, проходящих через росток порождающего многообразия $\Gamma \subset D$. Действительная размерность такого многообразия больше либо равна n.

Напомним, что гладкое класса $\mathcal{C}^\infty$ многообразие Γ называется *порождающим*, если для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\Gamma)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\Gamma$ семейство всех комплексных прямых, пересекающих Γ. Будем считать, что $0 \in \Gamma$.

Порождающее многообразие Γ локальным биголоморфным преобразованием можно привести к виду (см., например, [11]):

$$\begin{cases} v_1 = h_1(z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_m = h_m(z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_m), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $k + m = n$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, k$, $w_s = u_s + iv_s$, $s = 1, \ldots, m$. Причем вещественнозначная вектор-функция $h = (h_1, \ldots, h_m)$ принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$ в окрестности W точки 0 и выполнены условия

$$h_p(0) = 0, \quad \frac{\partial h_p}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial y_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial u_s}(0), \quad p, s = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots k.$$

Рассмотрим ядро Бохнера–Мартинелли — внешнюю дифференциальную форму $U(\zeta, z)$ типа $(n, n-1)$ вида

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\bar\zeta[k] = d\bar\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\bar\zeta_{k-1} \wedge d\bar\zeta_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar\zeta_n$, $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$. При $n = 1$ форма $U(\zeta, z)$ превращается в ядро Коши $\dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$. Очевидно, что форма $U(\zeta, z)$ имеет гармонические в $\mathbb{C}^n \setminus \{z\}$ коэффициенты и является замкнутой по переменной ζ, т. е. $d_\zeta U(\zeta, z) = 0$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей и функция f класса $\mathcal{C}^1(\overline{D})$. Рассмотрим интеграл Бохнера–Мартинелли

$$Mf(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D.$$

Функция $Mf(z)$ является гармонической для $z \notin \partial D$ и $Mf(z) = O(|z|^{1-2n})$ при $|z| \to \infty$.

§ 2. Производные интеграла Бохнера–Мартинелли

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если вещественно-аналитическая функция F, заданная в некотором открытом множестве W из D, удовлетворяет условиям*

$$F|_\Gamma = 0, \qquad \left.\frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial \bar z^\alpha \partial \bar w^\beta}\right|_\Gamma = 0 \quad \text{для всех мультииндексов} \quad \alpha,\ \beta,$$

то F равна нулю в W.

Доказательство. Покажем, что все коэффициенты разложения функции $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля равны нулю.

Обозначим полные частные производные вдоль многообразия Γ по переменным x_j, y_j, u_s через D_{x_j}, D_{y_j}, D_{u_s}, $j = 1,\ldots,k$, $s = 1,\ldots,m$.

Так как

$$0 = D_{x_j} F = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial F}{\partial v_l}\cdot\frac{\partial h_l}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(0) = 0,$$

то $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(0) = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}(0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_s}(0) = 0$, $j = 1,\ldots,k$, $s = 1,\ldots,m$.

Поскольку

$$0 = \left.\frac{\partial F}{\partial \bar w_s}\right|_\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_s} + i\frac{\partial F}{\partial v_s}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial u_s}(0) = 0,$$

то $\dfrac{\partial F}{\partial v_s}(0) = 0$, $s = 1,\ldots,m$. Так что все первые производные функции F в точке 0 равны нулю.

Покажем, что все вторые производные в нуле также равны нулю. Имеем

$$0 = D^2_{x_j x_l} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l} + \sum_{p=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial v_p}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_l} +$$
$$+ \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial x_l}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial v_q}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial h_q}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial F}{\partial v_p}\cdot\frac{\partial^2 h_p}{\partial x_j \partial x_l}\right).$$

Так как $\dfrac{\partial h_p}{\partial x_l}(0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial v_p}(0) = 0$, то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l}(0) = 0$.

Аналогично, все вторые производные функции F по переменным y_j, u_s равны нулю в точке 0.

Рассмотрим

$$0 = D_{x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar w_s}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j} + \sum_{p=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial v_p}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x_j}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial h_p}{\partial x_j}(0) = 0$, то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j}(0) = 0$. Так как

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar w_s \partial x_j}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0) + i\frac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial x_j}(0)\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0) = 0,$$

то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial x_j}(0) = 0$.

Аналогично, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial y_j}(0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial u_l}(0) = 0$.

Далее,

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}_l \partial \bar{w}_s}\Big|_\Gamma = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial u_s} + i\frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial v_s} + i\frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial u_s} - \frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial v_s}\right),$$

поэтому $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial v_s}(0) = 0$.

Применяя индукцию, точно так же показывается, что все старшие производные функции F в точке 0 равны нулю. Тем самым ряд Тейлора в точке 0 функции равен нулю, поэтому сама функция F равна нулю в W. □

Ясно, что лемма 1 верна и для старых переменных z (до приведения многообразия Γ к виду (1.2)).

Определим функции

$$M_j f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)(\zeta_j - z_j)U(\zeta, z), \quad z \in D, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Они являются вещественно-аналитическими и бигармоническими в области D.

Приведем теорему 2.8 из [13], адаптированную для нашего случая полигармонических функций. Пусть $\mathcal{S}(D)$ — множество полигармонических функций порядка p в D, и $\mathcal{S}^f(D)$ — подпространство функций в $S(D)$, которое состоит из функций конечного порядка роста вблизи границы области D. Рассмотрим систему Дирихле B_j дифференциальных операторов порядка j, $j \leqslant p-1$, на ∂D. Порядки операторов попарно различны (см. более подробно § 2 из [13]). Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Предположим, что для функции $f \in \mathcal{S}^f(D)$ граничные значения системы Дирихле $B_j f$ порядка $p-1$ $(0 \leqslant j \leqslant p-1)$ равны нулю на множестве $S \subset \partial D$, которое имеет хотя бы одну внутреннюю точку. Тогда $f = 0$ в D.*

Мы будем применять эту теорему к порождающему многообразию Γ из D, поскольку у бигармонического оператора существует функция Грина. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если бигармоническая функция G, заданная в некотором открытом множестве W из D, удовлетворяет условиям*

$$G|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} G}{\partial \bar{z}^\alpha \partial \bar{w}^\beta}\Big|_\Gamma = 0 \quad \textit{для всех мультииндексов} \quad \alpha,\ \beta, \quad \|\alpha\| + \|\beta\| \leqslant 3,$$

то она равна нулю в W.

Лемма 3. *Если для вещественно аналитической функции H выполнены условия*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} H}{\partial \bar{z}^\alpha \partial \bar{w}^\beta}\Big|_\Gamma = 0$$

для всех мультииндексов α, β при $\|\alpha\| + \|\beta\| > 0$, то H голоморфна в D.

Доказательство. Применим лемму 1 к функциям $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}_p}$, $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{w}_s}$, $p = 1, \ldots, k$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда получим, что данные функции равны 0 в W, т. е. функция H голоморфна в W, а следовательно и в D. □

§ 3. Области со свойством Неванлинны

В дальнейшем нам понадобится понятие области со свойством Неванлинны (см. [14]). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $t = k(\tau)$ — конформное отображение единичного круга $\Delta = \{\tau\colon |\tau| < 1\}$ на G.

Определение 2. Область G называется *областью со свойством Неванлинны*, если существуют две ограниченные голоморфные функции u и v в G такие, что почти всюду на $S = \partial\Delta$ выполняется равенство

$$\bar{k}(\tau) = \frac{u(k(\tau))}{v(k(\tau))}$$

в смысле угловых граничных значений.

По сути дела это означает, что

$$\bar{t} = \frac{u(t)}{v(t)} \quad \text{на} \quad \partial G.$$

Приведем характеризацию областей со свойством Неванлинны (предложение 3.1 в [14]). Область G есть область со свойством Неванлинны тогда и только тогда, когда $k(\tau)$ допускает голоморфное псевдопродолжение через S в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}$, т. е. существуют ограниченные голоморфные функции u_1 и v_1 в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}$ такие, что функция $\tilde{k}(\tau) = \dfrac{u_1(\tau)}{v_1(\tau)}$ совпадает почти всюду на S с функцией $k(\tau)$ в смысле угловых граничных начений.

Данные определение и утверждение будут применяться для ограниченных областей G с границей класса $\mathcal{C}^2$, поэтому (по принциру соответствия границ) функция $k(\tau)$ продолжается на $\overline{\Delta}$ как функция класса $\mathcal{C}^1(\overline{\Delta})$. Тоже самое можно сказать и о функции $\tilde{k}$.

Различные примеры областей со свойством Неванлинны приведены в [14], а также в [15]. Так например, если ∂G вещественно-аналитическая, то $k(\tau)$ является рациональной функцией, не имеющей полюсов на замыкании Δ.

Далее нам понадобится, чтобы область G обладала *усиленным свойством Неванлинны*, т. е. чтобы функция $u_1(\tau) \neq 0$ в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ и $\tilde{k}(\infty) \neq 0$ (см. [9]).

Например, такими областями будут области, для которых $k(\tau)$ является рациональной функцией, не имеющей полюсов на $\overline{\Delta}$ и не имеющая нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

Лемма 4. *Если область G обладает усиленным свойством Неванлинны, то функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается с ∂G в область G, т. е. существует голоморфная функция в G, совпадающая с $\dfrac{1}{\bar{t}}$ почти всюду в смысле конформного отображения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{\bar{t}}$ на ∂G и $\tau \in S$

$$\frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{\bar{k}(\tau)} = \frac{1}{\bar{\tilde{k}}(\tau)} = \frac{\bar{v}_1(\tau)}{\bar{u}_1(\tau)} = \frac{\bar{v}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}{\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}.$$

Тогда функция $h(\tau) = \dfrac{\bar{v}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}{\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}$ голоморфна в круге Δ, поскольку знаменатель $\bar{u}_1\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right) \neq 0$ при $|\tau| > 1$ и $h(0) = \dfrac{1}{\bar{\tilde{k}}(\infty)} \neq \infty$.

Поэтому функция $h(\tau)$ дает голоморфное продолжение функции $\dfrac{1}{\bar{k}(\tau)}$ в круг Δ, следовательно, функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в G. □

Рассмотрим комплексные прямые $l_{z,b}$ вида (1.1), проходящие через z в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Хорошо известно представление ядра Бохнера–Мартинелли в координатах t и b (см., например, [9], [12, гл. 4]):

$$U(\zeta, z) = \lambda(b) \wedge \frac{dt}{t},$$

где $\lambda(b)$ — некоторая дифференциальная форма типа $(n-1, n-1)$ в $\mathbb{CP}^{n-1}$, не зависящая от t.

Лемма 5. *Справедливы равенства* $(\zeta_j - z_j)\dfrac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \mu(b) \wedge \dfrac{dt}{\bar{t}^{\|\alpha\|}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$U(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_j} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

где $g(\zeta, z) = -\dfrac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \cdot \dfrac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}$ — фундаментальное решение уравнение Лапласа, то

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = (-1)^{\|\alpha\|} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{\partial^\alpha g}{\partial \bar{\zeta}^\alpha} \right) d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

Так как

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial \bar{\zeta}^\alpha} = \frac{(-1)^{\|\alpha\|+1}}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+2\|\alpha\|-2}},$$

то

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|-2}} \right) d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[\frac{\alpha_j (\zeta - z)^{\alpha - e_j}}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|-2}} - \frac{(n + \|\alpha\| - 1)(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2n+\|\alpha\|}} \right] d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{\alpha_j (\zeta - z)^{\alpha - e_j}}{|\zeta - z|^{2n+2\|\alpha\|-2}} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta + \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(\zeta - z)^\alpha}{|\zeta - z|^{2\|\alpha\|}} \cdot U(\zeta, z).$$

Вычислим эту форму в переменных b и t, т. е. $\zeta_j - z_j = b_j t$, $j = 1, \dots, n$. При вычислении будем использовать, что $d\bar{t} \wedge dt = 0$ на $\partial D \cap l_{z,b}$ и что $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$. Получим

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{(n + \|\alpha\| - 2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{\alpha_j b^{\alpha - e_j}}{t \bar{t}^{\|\alpha\|} |b|^{2\|\alpha\|}} d\bar{b}[j] \wedge \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} b_s db[s] \wedge dt +$$

$$+ \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{b^\alpha}{t \bar{t}^{\|\alpha\|} |b|^{2\|\alpha\|}} \lambda(b) \wedge dt.$$

Таким образом получаем, что

$$(\zeta_j - z_j) \frac{\partial^\alpha U}{\partial \bar{z}^\alpha} = \mu(b) \wedge \frac{dt}{\bar{t}^{\|\alpha\|}}.$$

□

§ 4. Основные результаты

Определение 3. Назовем *обобщенным свойством Морера для функции* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *вдоль комплексной прямой* $l_{z,b}$ условие

$$\int\limits_{\partial D\cap l_{z,b}} f(\zeta)\,\frac{dt}{\bar{t}^k} = 0, \quad k = 0, \dots, 3. \tag{4.1}$$

Заметим, что если функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в $\partial D \cap l_{z,b}$, то условие (4.1) является необходимым условием голоморфного продолжения.

Приведем пример.

Пример 1. Рассмотрим единичный шар B из $\mathbb{C}^2$:

$$B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon |z|^2 + |w|^2 < 1\}.$$

Комплексное многообразие $\varGamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon w = 0\}$. Оно совпадает со своей комплексной касательной плоскостью в каждой своей точке и пересекает $\overline{B}$, тем самым оно не является порождающим.

Рассмотрим комплексные прямые, пересекающие $\varGamma$:

$$l_a = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon z = a + bt,\ w = ct,\ t \in \mathbb{C}\}.$$

Эти прямые проходят через точку $(a, 0) \in \varGamma$. При $|a| < 1$ точка $(a, 0) \in B$, при $|a| > 1$ точка $(a, 0) \notin \overline{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $|b|^2 + |c|^2 = 1$.

Пересечение $l_a \cap \partial B$ образует окружность

$$|t|^2 + a\bar{b}\bar{t} + \bar{a}bt = 1 - |a|^2 \quad \text{или} \quad |t + a\bar{b}|^2 = 1 - |c|^2|a|^2.$$

Это множество $l_a \cap \partial B$ не пусто, если $|a|^2|c|^2 < 1$. Таким образом на $l_a \cap \partial B$ выполнено условие

$$\bar{t} = \frac{1 - |a|^2 - \bar{a}bt}{t + a\bar{b}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f_a(z, w) = (1 - \bar{a}z)\frac{w^{k+2}}{\bar{w}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 0.$$

Эта функция на ∂B является гладкой функцией класса $\mathcal{C}^k$. Поскольку отношение $\dfrac{w}{\bar{w}}$ ограничено, то функция $\dfrac{w^2}{\bar{w}}$ непрерывна, а $\dfrac{w^{k+2}}{\bar{w}}$ — функция, гладкости $\mathcal{C}^k$.

На множестве $l_a \cap \partial B$ функция f_a равна

$$\frac{1 - \bar{a}(a + bt)}{1 - |a|^2 - \bar{a}bt} \cdot (t + a\bar{b}) \cdot (ct)^{k+2} = (t + a\bar{b}) \cdot (ct)^{k+2}.$$

Таким образом, сужение функции f_a голоморфно продолжается на множество $l_a \cap B$ для всех комплексных прямых l_a, проходящих через точку $(a, 0)$ и пересекающих $\overline{B}$, т. е. для нее выполнено условие (4.1). Рассматривая произвольное конечное множество точек $(a_m, 0)$ с $|a_m| > 1$, $m = 1, \dots, N$, и функцию

$$f(z, w) = \frac{w^{k+2}}{\bar{w}} \cdot \prod_{m=1}^{N} (1 - \bar{a}_m z),$$

получим, что f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых l_{a_m}, пересекающих $\overline{B}$. Тем не менее f не продолжается голоморфно в шар B с границы ∂B, поскольку очевидно, что f не является CR-функцией на ∂B.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область со связной границей класса $\mathcal{C}^1$, Γ — росток порождающего многообразия в D, функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает обобщенным свойством Морера при $k \leqslant 3$ вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_\Gamma$, и связные компоненты пересечения $D \cap l_{z,b}$ обладают усиленным свойством Неванлинны. Тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Доказательство. По лемме 5 и обобщенному свойству Морера (4.1) функции $M_j f$ равны нулю вместе с производными до порядка 3. Поэтому по лемме 2 они равны нулю в D. Применяя к этим функциям оператор Лапласа, получаем, что производные от интеграла Бохнера–Мартинелли Mf по сопряженным переменным равны 0 в D, т. е. Mf голоморфна в области D, и по следствию 15.6 из [12] ее граничные значения равны f. □

Рассмотрим примеры областей, для которых верна теорема 2.

Пример 2. Пусть $D = B$ — шар с центром в нуле радиуса R, т. е. $D = \{\zeta\colon |\zeta| < R\}$. Тогда сечение этой области комплексной прямой

$$l = \{\zeta\colon \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1, \ldots, n\}$$

для $z \in D$ и $|b| = 1$ является кругом

$$G = \{t\colon |t + \langle z, \bar{b}\rangle|^2 < R^2 - |z|^2 + |\langle z, \bar{b}\rangle|^2\}.$$

На границе этого круга

$$\frac{1}{\bar{t}} = \frac{t + \langle z, \bar{b}\rangle}{R^2 - |z|^2 - t\langle \bar{z}, b\rangle}.$$

Легко проверить, что знаменатель этой функции не обращается в 0 в G, поэтому функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ удовлетворяет лемме 4 для всех точек $z \in B$ и для всех комплексных прямых l.

Пример 3. Пусть $w_j = \dfrac{L_j(z)}{L(z)}$, $j = 1, \ldots, n$, где $L_j(z)$, $L(z)$ — линейные функции, причем нули функции $L(z)$ не пересекают замыкание шара, тогда образ шара B при данном отображении (если оно биголоморфно на замыкании шара B) является ограниченной областью, для которой справедлива теорема 2. Действительно, как легко проверить, все сечения этой области комплексными прямыми являются кругами.

Лемма 4 показывает, что для верности теоремы 2 достаточно, чтобы в сечениях функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжалась с границы сечения в само сечение. Поэтому справедливо утверждение.

Теорема 3. *Пусть D — ограниченная область со связной границей класса $\mathcal{C}^1$, Γ — росток порождающего многообразия в D, функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает обобщенным свойством Морера при $k \leqslant 3$ вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_\Gamma$, и в связных компонентах пересечения $D \cap l_{z,b}$ функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в эту компоненту. Тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Обсудим вопрос: какие области на комплексной плоскости обладают таким свойством (кроме кругов).

Пример 4. Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ открытое множество

$$\{t \in \mathbb{C}\colon R|t|^{k+1} < |P(t)|\}, \quad 0 < R < \infty, \tag{4.2}$$

где $P(t)$ — полином степени k и $P(0) \neq 0$.

Очевидно, что это множество ограничено и содержит окрестность нуля. Обозначим его связную компоненту, содержащую 0, через G.

По теореме Сарда для почти всех R, $0 < R < \infty$, граница G состоит из конечного числа гладких кривых.

При достаточно малых R область G получается из некоторой области, из которой выброшены окрестности нуля полинома P.

При R достаточно больших G является односвязной окрестностью нуля.

Рассмотрим границу G:

$$S = \{t \in \mathbb{C}\colon R|t|^{k+1} = |P(t)|\} = \{t \in \mathbb{C}\colon R^2 t^{k+1}\bar{t}^{k+1} = P(t)\overline{P(t)}\}.$$

Обозначим $w = \dfrac{1}{\bar{t}}$. Тогда на S имеем равенство:

$$\frac{R^2 t^{k+1}}{w^{k+1}} = P(t)\tilde{P}\Big(\frac{1}{w}\Big),$$

где $\tilde{P}(t) = \sum\limits_{j=0}^{k} \bar{a}_j t^j$, если $P(t) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j t^j$. Поэтому

$$\overline{P(t)} = \tilde{P}(\bar{t}) = \tilde{P}\Big(\frac{1}{w}\Big) = \frac{1}{w^k} P^s(w),$$

где $P^s(w) = \sum\limits_{j=0}^{k} \bar{a}_j w^{k-j}$.

Тогда на S получим равенство

$$\frac{R^2 t^{k+1}}{w^{k+1}} = P(t)P^s(w)\frac{1}{w^k}.$$

Отсюда

$$R^2 t^{k+1} = P(t) w P^s(w),$$

т. е.

$$wP^s(w) = \frac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}. \tag{4.3}$$

Из вида G также получаем, что в G

$$\frac{R|t|^{k+1}}{|P(t)|} < 1. \tag{4.4}$$

Рассмотрим функцию $\zeta = \varphi(w) = wP^s(w)$, тогда $\varphi'(0) = P^s(0) \neq 0$, так как многочлен P имеет степень k. Поэтому функция φ конформно отображает некоторую окрестность нуля U_w на окрестность нуля V_ζ. Поэтому существует обратная функция $w = \varphi^{-1}(\zeta)\colon V_\zeta \to U_w$.

Из равенства (4.3) тогда имеем, что

$$w = \varphi^{-1}\left(\frac{R^2 t^{k+1}}{P(t)}\right) \quad \text{на} \quad S.$$

Поскольку в силу неравенства (4.4)

$$R\left|\frac{Rt^{k+1}}{P(t)}\right| < R \quad \text{в} \quad G,$$

то для достаточно малых R точка $\dfrac{R^2t^{k+1}}{P(t)}$ лежит в U_w и знаменатель $P(t) \neq 0$ в G. Поэтому функция $w = \varphi^{-1}\left(\dfrac{R^2t^{k+1}}{P(t)}\right)$ голоморфна в G. Так что $w = \dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается в G. Таким образом, справедливо утверждение.

Лемма 6. *Для области G вида (4.2) при достаточно малых R функция $\dfrac{1}{\bar{t}}$ голоморфно продолжается с границы ∂G в G.*

Рассмотрим сдвинутую область

$$G_a = \{t \in \mathbb{C}\colon R|t+a|^{k+1} < |P_1(t)|\}, \tag{4.5}$$

где $P_1(t) = P(t+a)$. Тогда на $S_a = \partial G_a$ имеем равенство

$$R^2(t+a)^{k+1}(\bar{t}+\bar{a})^{k+1} = P_1(t)\overline{P_1(t)},$$

и если $\bar{t} = \dfrac{1}{w}$, то

$$R^2(t+a)^{k+1}(1+\bar{a}w)^{k+1} = P_1(t)wP_1^s(w).$$

Функция $\zeta = \psi(w) = \dfrac{wP_1^s(w)}{(1+\bar{a}w)^{k+1}}$ отображает конформно окрестность нуля U_w на окрестность нуля V_ζ, поэтому как и выше функция

$$w = \psi^{-1}(\zeta) = \psi^{-1}\left(\frac{R^2(t+a)^{k+1}}{P_1(t)}\right)$$

голоморфно продолжается в G_a для достаточно малых R.

Лемма 7. *Для области G_a вида (4.5) при достаточно малых R функция $1/\bar{t}$ голоморфно продолжается с границы ∂G в G.*

Легко привести примеры областей на комплексной плоскости, для которых лемма 4 не выполняется.

Пример 5. Одной из таких областей является обычный эллипс

$$G = \left\{t = x+iy \in \mathbb{C}\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}, \quad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

Нетрудно показать, что из уравнения границы эллипса получаем равенство

$$w = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{t(a^2+b^2) \pm 2ab\sqrt{z^2-a^2+b^2}}{4a^2b^2 - z^2(b^2-a^2)}.$$

Данная функция имеет две особые точки (точки ветвления) в эллипсе G и 2 полюса вне $\bar{G}$.

Более того

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{dt}{\bar{t}} = -\left|\frac{a-b}{a+b}\right| \neq 0.$$

Рассмотрим область в $\mathbb{C}^n$ вида

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n \colon R|z|^{k+1} < |P(z)|\}, \quad 0 < R < \infty, \tag{4.6}$$

где $P(z)$ — полином степени k и $P(0) \neq 0$.

Ясно, что эта область ограничена и содержит окрестность нуля и для почти всех R граница D является гладкой.

Сечения этой области комплексными прямыми $l = \{\zeta \colon \zeta_1 = b_1 t, \ldots, \zeta_n = b_n t\}$ образуют области вида (4.2), а сечения области (4.6) прямыми

$$l = \{\zeta \colon \zeta_1 = z_1 + b_1 t, \ldots, \zeta_n = z_n + b_n t\}$$

можно привести к областям вида (4.5), поэтому из теоремы 3 и лемм 6 и 7 получаем утверждение.

Следствие 1. *Пусть Γ — росток порождающего многообразия в области D вида* (4.6) (R *достаточно малое*), $0 \in \Gamma$, *функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает обобщенным свойством Морера вдоль почти всех комплексных прямых $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$, тогда существует функция $Mf \in \mathcal{C}(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D.*

Финансирование. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-936).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grinberg E. L. A boundary analogue of Morera's theorem in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Proceedings of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 102. Issue 1. P. 114–116. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0915726-5
2. Аграновский М. Л., Вальский Р. Э. Максимальность инвариантных алгебр функций // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12. № 1. С. 3–12. https://www.mathnet.ru/rus/smj5850
3. Globevnik J., Stout E. L. Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Mathematical Journal. 1991. Vol. 64. Issue 3. P. 571–615. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06428-8
4. Globevnik J. A boundary Morera theorem // Journal of Geometric Analysis. 1993. Vol. 3. Issue 3. P. 269–277. https://doi.org/10.1007/BF02921393
5. Govekar-Leban D. A Morera theorem for the boundary values of holomorphic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2003. Vol. 33. No. 1. P. 147–157. https://www.jstor.org/stable/44238916
6. Кытманов А. М., Мысливец С. Г. Об одном семействе комплексных прямых, достаточных для существования голоморфного продолжения непрерывных функций на границе области // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12. Вып. 3. С. 45–50. https://www.mathnet.ru/rus/ufa526
7. Кытманов А. М., Мысливец С. Г. О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения // Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 545–551. https://doi.org/10.4213/mzm3770
8. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. On functions with the boundary Morera property in domains with piecewise-smooth boundary // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 50–58. https://doi.org/10.35634/vm210104
9. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. Multidimensional integral representations. Cham: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21659-1

10. Myslivets S. G. On the multidimensional boundary analogue of the Morera theorem // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2022. Vol. 15. Issue 1. P. 29–45. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-1-29-45
11. Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P. Real submanifolds in complex space and their mappings. Princeton: Princeton University Press, 1999. https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpmb1r
12. Кытманов А. М. Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
13. Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N. Bases with double orthogonalyty in the Cauchy problem for systems with injective symbols // Proceedings of the London Mathematical Society. 1995. Vol. s3-71. Issue 1. P. 1–52. https://doi.org/10.1112/plms/s3-71.1.1
14. Кармона Х. Х., Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Математический сборник. 2002. Т. 193. № 10. С. 75–98. https://doi.org/10.4213/sm690
15. Belov Yu., Borichev A., Fedorovskiy K. Nevanlinna domains with large boundaries // Journal of Functional Analysis. 2019. Vol. 277. Issue 8. P. 2617–2643. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.12.015

Поступила в редакцию 10.01.2023

Принята к публикации 30.08.2023

Кытманов Александр Мечиславович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7394-1480
E-mail: akytmanov@sfu-kras.ru

Мысливец Симона Глебовна, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой высшей и прикладной математики, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
E-mail: smyslivets@sfu-kras.ru

Цитирование: А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец. О некоторых множествах, достаточных для голоморфного продолжения функций с обобщенным граничным свойством Морера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 483–496.

A. M. Kytmanov, C. G. Myslivets

On some sets sufficient for holomorphic continuation of functions with generalized boundary Morera property

Keywords: holomorphic continuation, a multidimensional boundary condition of Morera.

MSC2020: 32A25, 32A40

DOI: 10.35634/vm230307

This article considers continuous functions defined on the boundary of a bounded domain D in $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, and having a generalized boundary Morera property. The question of the existence of a holomorphic continuation of such functions into the domain D for some sufficient sets Γ of complex lines intersecting the germ of the generating manifold lying inside the domain is investigated.

Funding. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2023-936).

REFERENCES

1. Grinberg E. L. A boundary analogue of Morera's theorem in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 102, issue 1, pp. 114–116. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0915726-5
2. Agranovskii M. L., Val'skii R. É. Maximality of invariant algebras of functions, *Siberian Mathematical Journal*, 1971, vol. 12, issue 1, pp. 1–7. https://doi.org/10.1007/BF00969135
3. Globevnik J., Stout E. L. Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables, *Duke Mathematical Journal*, 1991, vol. 64, issue 3, pp. 571–615. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06428-8
4. Globevnik J. A boundary Morera theorem, *Journal of Geometric Analysis*, 1993, vol. 3, issue 3, pp. 269–277. https://doi.org/10.1007/BF02921393
5. Govekar-Leban D. A Morera theorem for the boundary values of holomorphic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2003, vol. 33, no. 1, pp. 147–157. https://www.jstor.org/stable/44238916
6. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. On family of complex straight lines sufficient for existence of holomorphic continuation of continuous functions on boundary of domain, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, issue 3, pp. 44–49. https://doi.org/10.13108/2020-12-3-44
7. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. On families of complex lines sufficient for holomorphic extension, *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, issue 4, pp. 500–505. https://doi.org/10.1134/S0001434608030231
8. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. On functions with the boundary Morera property in domains with piecewise-smooth boundary, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 50–58. https://doi.org/10.35634/vm210104
9. Kytmanov A. M., Myslivets S. G. *Multidimensional integral representations*, Cham: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21659-1
10. Myslivets S. G. On the multidimensional boundary analogue of the Morera theorem, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2022, vol. 15, issue 1, pp. 29–45. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-1-29-45
11. Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P. *Real submanifolds in complex space and their mappings*, Princeton: Princeton University Press, 1999. https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpmb1r
12. Kytmanov A. M. *The Bochner–Martinelli integral and its applications*, Basel: Birkhäuser, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9094-6

13. Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N. Bases with double orthogonalyty in the Cauchy problem for systems with injective symbols, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1995, vol. s3-71, issue 1, pp. 1–52. https://doi.org/10.1112/plms/s3-71.1.1
14. Carmona J. J., Paramonov P. V., Fedorovskii K. Yu. On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, issue 10, pp. 1469–1492. https://doi.org/10.1070/SM2002v193n10ABEH000690
15. Belov Yu., Borichev A., Fedorovskiy K. Nevanlinna domains with large boundaries, *Journal of Functional Analysis*, 2019, vol. 277, issue 8, pp. 2617–2643. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.12.015

Received 10.01.2023

Accepted 30.08.2023

Aleksandr Mechislavovich Kytmanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Siberian Federal University, pr. Svobodnyi, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7394-1480
E-mail: akytmanov@sfu-kras.ru

Simona Glebovna Myslivets, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Siberian Federal University, pr. Svobodnyi, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: smyslivets@sfu-kras.ru

Citation: A. M. Kytmanov, C. G. Myslivets. On some sets sufficient for holomorphic continuation of functions with generalized boundary Morera property, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 483–496.