ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 212–224.

УДК 517.53

© *М. В. Кабанко*

О ТИПЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция на комплексной плоскости конечного порядка $\rho > 0$, $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру такой, что $0 < \alpha = \liminf\limits_{r\to\infty} \rho(r) \leqslant \limsup\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < \infty$. Если $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha] + 1$, то типы $T(r, f)$ и $|N|(r, f)$ относительно $\rho(r)$ совпадают. Если между α и ρ есть целые числа, то полученный критерий формулируется в терминах верхней плотности нулей и полюсов функции f и их аргументной симметрии.

Ключевые слова: мероморфная функция, порядок функции, тип функции, верхняя плотность, аргументная симметрия.

DOI: 10.35634/vm230202

Введение

Коэффициентная характеризация роста целых и мероморфных функций важна во многих вопросах анализа. Хорошо известны результаты, которые приведены в первой главе классической монографии Б. Я. Левина [1], относящиеся к обобщению теоремы Е. Линделёфа [2] на случай уточненного порядка в смысле Валирона. Аналогичные результаты для мероморфных функций приведены в монографии А. А. Гольдберга и И. В. Островского [3].

Интерес к данной проблематике не утихает до настоящего времени. Так решению задачи о наименьшем возможном типе при порядке ρ целой функции, корни которой имеют заданную верхнюю ρ-плотность и удовлетворяют дополнительным ограничениям, посвящена работа [4]. Также к работам, посвященным задачам о связи характеристик роста целых и мероморфных функций с характеристиками распределения нулей или нулей и полюсов, можно отнести цикл работ Г. Г. Брайчева (см., например, [5]), а также работы Г. Г. Брайчева и В. Б. Шерстюкова [6,7] и совместную работу Г. Г. Брайчева и О. В. Шерстюковой [8]. Данной проблематике посвящен также цикл работ Б. Н. Хабибуллина и его учеников (см., например, [9–11]).

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [12]. В этой работе рассматривалась задача о распределении нулей целой функции $f(z)$ по отношению к данному уточненному порядку в смысле Бутру. Полученные критерии формулировались в терминах верхней плотности нулей функции.

В данной работе мы обобщаем некоторые из этих результатов на пространства мероморфных функций, рост которых также определяется уточнённым порядком в смысле Бутру.

Несколько слов о терминологии, используемой в статье. Буквами K, M, ε, δ, $\ldots$ мы обозначаем положительные константы. Через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначаем, соответственно, множество целых и натуральных чисел, через $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Обозначим через $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| < r\}$ открытый, а через $B(a, r)$ — замкнутый круг с центром в точке a радиуса r, в частности, $C(r) = C(0, r)$. Число x, удовлетворяющее неравенству $x \geqslant 0$, мы называем положительным, а число x, удовлетворяющее неравенству $x > 0$, — строго положительным. Используются символы $a^+ = \max\{a; 0\}$, в частности, $\ln^+ a = 0$, если $a \leqslant 0$. Неравенства, которые выполняются для всех достаточно больших значений аргумента, мы называем асимптотическими.

Введем необходимые определения. Пусть μ — мера (вообще говоря, знакопеременная, то есть заряд) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $\mu(r)$ – мера круга $C(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Положим

$$N_\mu(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t}\, dt$$

— *проинтегрированная, или усредненная, функция меры* μ.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция на комплексной плоскости, $\{a_\nu\}$ и $\{b_\mu\}$ — последовательности отличных от $z = 0$ нулей и полюсов функции $f(z)$ с учетом их кратностей. Для $G \subset \mathbb{C}$ положим

$$\mu_f^+(G) = \sum_{a_\nu \in G} 1, \quad \mu_f^-(G) = \sum_{b_\mu \in G} 1, \quad \mu_f(G) = \mu_f^+(G) - \mu_f^-(G), \quad |\mu_f| = \mu_f^+ + \mu_f^-,$$
$$|N|(r,f) = N_{|\mu_f|}(r), \quad N(r,f) = N_{\mu_f^-}(r), \quad N^+(r,f) = N_{\mu_f^+}(r),$$
$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \quad T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Эти характеристики являются стандартными в теории роста мероморфных функций (см., например, [3]).

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Определение 1. Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, называется *уточненным порядком в смысле Бутру*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} -\infty < \alpha = \liminf_{r\to+\infty} \rho(r) \leqslant \rho = \limsup_{r\to+\infty} \rho(r) < +\infty, \\ \lim_{r\to+\infty} \rho'(r) r \ln r = 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число (см. [13]).

Если $0 \leqslant \alpha = \rho < +\infty$, то функция $\rho(r)$ называется уточненным порядком в смысле Валирона (часто — просто уточненным порядком). Нас будет интересовать случай $0 < \alpha \leqslant \rho < +\infty$. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > 0$.

Пусть $\omega(r)$ — определенная при $r > 0$, неотрицательная неубывающая для достаточно больших r, функция. Число

$$\rho = \rho[\omega] = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln^+ \omega(r)}{\ln r}$$

называется *порядком* функции $\omega(r)$ (см. [3]). Функция $\omega(r)$ имеет конечный или бесконечный порядок в зависимости от того, будет ли $\rho < +\infty$ или $\rho = +\infty$.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, удовлетворяющий условию (1.1), а функция $\omega(r)$ имеет конечный порядок ρ. Величина

$$\sigma = \sigma[\omega] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\omega(r)}{V(r)}$$

называется *типом* функции $\omega(r)$ относительно $\rho(r)$. Если $\sigma = 0$, то $\omega(r)$ имеет *минимальный тип*, если $0 < \sigma < +\infty$ — *нормальный*, если $\sigma = +\infty$ — *максимальный тип*. Мероморфная функция $f(z)$ имеет тот же порядок и тип (относительно $\rho(r)$), что и ее характеристическая функция $T(r,f)$.

Определение 2 (см. [3, с. 79]). *Родом последовательности* $\{c_n\}$ называется наименьшее неотрицательное целое число p такое, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|c_k|^{p+1}} < \infty.$$

Мероморфная функция конечного порядка допускает следующее удобное представление [3, глава II, теорема 4.1].

Теорема 1 (теорема Адамара). *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка ρ, $\{a_\nu\}$ и $\{b_\mu\}$ — последовательности нулей и полюсов функции $f(z)$, отличных от $z = 0$, p_1 — род последовательности $\{a_\nu\}$, p_2 — род последовательности $\{b_\mu\}$. Пусть в окрестности $z = 0$ функция $f(z)$ имеет разложение $f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots$, $c_\lambda \neq 0$. Тогда*

$$f(z) = z^\lambda e^{P(z)} \prod_{a_\nu} E\left(\frac{z}{a_\nu}, p_1\right) \left(\prod_{b_\mu} E\left(\frac{z}{b_\mu}, p_2\right)\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

где

$$E(u, \rho) = \begin{cases} 1 - u, & p = 0, \\ (1-u) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}}, & p \geqslant 1, \end{cases}$$

— первичный множитель Вейерштрасса, $P(z)$ — многочлен, степень которого q не превышает $[\rho]$.

Число $p = \max\{q; p_1; p_2\}$ называется *родом функции* $f(z)$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы Адамара. Обозначим через $\{c_n\}$ последовательность $\{a_\nu\} \cup \{b_\mu\}$, занумерованную в порядке возрастания модулей, через p' — род последовательности $\{c_n\}$. Тогда остается в силе представление (1.2), если в канонических произведениях Вейерштрасса заменить p_1 и p_2 на p'. Это же заключение остается в силе, если p_1 и p_2 заменить на p — род функции $f(z)$.

Сформулируем наш первый результат для наиболее простого случая, когда на отрезке $[\alpha, \rho]$ нет целых чисел.

Теорема 2. *Пусть ρ — порядок мероморфной функции $f(z)$, а $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, удовлетворяющий условию (1.1). Если $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha]+1$, то типы $T(r, f)$ и $|N|(r, f)$ относительно $\rho(r)$ либо оба равны нулю, либо оба нормальные, либо равны бесконечности.*

Рассмотрим теперь случай, когда на отрезке $[\alpha, \rho]$ есть целые числа и функция $f(z)$ имеет порядок $\rho \in \mathbb{N}$. Тогда род $f(z)$ равен или ρ, или $\rho - 1$. Не ограничивая общности, можно считать $f(0) = 1$. По теореме Адамара функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = e^{P(z)} \prod_{a_\nu} E\left(\frac{z}{a_\nu}, \rho\right) \left(\prod_{b_\mu} E\left(\frac{z}{b_\mu}, \rho\right)\right)^{-1}, \tag{1.3}$$

где $P(z) = c_\rho z^\rho + c_{\rho-1} z^{\rho-1} + \cdots + c_1 z$.

Обозначим через

$$\tilde{\alpha} = \min\{j \in \mathbb{N}\colon j \geqslant \alpha\}, \quad L_j(r) = r^{\rho(r)-j}, \quad K_j(r) = c_j + \frac{1}{j}\iint\limits_{|\zeta|\leqslant r} \frac{d\mu_f(\zeta)}{\zeta^j}, \quad \tilde{\alpha} \leqslant j \leqslant \rho,$$

$$\Delta_N = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{|N|(r,f)}{V(r)}, \quad \Delta_\mu = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{|\mu_f|(r)}{V(r)}, \quad K_j = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{|K_j(r)|}{L_j(r)}, \tag{1.4}$$
$$\Delta_K = \max_{\tilde{\alpha}\leqslant j\leqslant\rho}\{K_j\}, \quad \Omega = \max\{\Delta_N; \Delta_K\}.$$

Сформулируем наш второй главный результат.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция целого порядка $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, удовлетворяющий условию (1.1). Тогда функция $f(z)$ имеет минимальный, нормальный или максимальный тип относительно $\rho(r)$ в зависимости от того, будет ли соответственно $\Omega = 0$, $0 < \Omega < +\infty$ или $\Omega = +\infty$.*

Случай целых функций рассматривался в совместной работе [12].

§ 2. Предварительные сведения

Далее, не оговаривая это особо, будем предполагать, что уточненный порядок $\rho(r)$ удовлетворяет условию (1.1). Следующие две леммы, которые описывают поведение функции $V(r) = r^{\rho(r)}$, доказаны в работе [14].

Лемма 1. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру. Если $b > a > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ асимптотически по r, равномерно относительно $t \in [a,b]$, выполняется соотношение*

$$t^{\alpha-\varepsilon} \leqslant \frac{V(tr)}{V(r)} \leqslant t^{\rho+\varepsilon}.$$

Лемма 2. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру. При $\lambda < \alpha + 1$ имеем*

$$\int_\delta^r \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \leqslant \frac{V(r)r}{(\alpha+1-\lambda)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \to +\infty, \tag{2.1}$$

а при $\lambda > \rho + 1$ верна оценка

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \leqslant \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \to +\infty. \tag{2.2}$$

Нам понадобится также следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Бутру, $0 \leqslant p < \alpha \leqslant \rho < p+1$. Тогда при фиксированном $c > 0$ имеем*

$$\limsup_{r\to\infty} \int_{c/r}^\infty \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leqslant \int_0^\infty \frac{\tau^{\rho-p-1}}{1+\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{\sin\pi(\rho-p)}.$$

Доказательство. Разобьем промежуток интегрирования $[c/r,\infty)$ на три $[c/r,\varepsilon]$, $(\varepsilon,\varepsilon^{-1}]$, $(\varepsilon^{-1},\infty)$, где ε — произвольное малое положительное число.

Оценим интеграл по отрезку $[c/r,\varepsilon]$. Согласно (2.1) запишем,

$$I_1 = I(r;c,\varepsilon,\rho) = \int_{c/r}^\varepsilon \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} = \int_c^{\varepsilon r} \frac{V(t)}{V(r)} \cdot \frac{r^{p+1}dt}{t^{p+1}(r+t)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r^p}{V(r)} \int_c^{\varepsilon r} \frac{V(t)}{t^{p+1}}\,dt \leqslant \frac{r^p}{V(r)} \left(\frac{V(\varepsilon r)\varepsilon r}{(\alpha-p)(\varepsilon r)^{p+1}} + o\left(\frac{V(\varepsilon r)\varepsilon r}{(\varepsilon r)^{p+1}}\right)\right).$$

Применяя лемму 1, получим отсюда

$$\varlimsup_{r\to\infty} I_1 \leqslant \frac{\varepsilon^{\rho-p}}{\alpha-p}. \tag{2.3}$$

Оценим интеграл по лучу $(\varepsilon^{-1},\infty)$, используя неравенство (2.2). Имеем

$$I_3 = I_3(r;\varepsilon,\rho) = \int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} \frac{V(r\tau)}{V(r)}\cdot\frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} = \int_{r/\varepsilon}^{\infty}\frac{V(t)}{V(r)}\cdot\frac{r^{p+1}\,dt}{t^{p+1}(r+t)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r^{p+1}}{V(r)}\int_{r/\varepsilon}^{\infty}\frac{V(t)}{t^{p+2}}\,dt \leqslant \frac{r^{p+1}}{V(r)}\left(\frac{V(r/\varepsilon)(r/\varepsilon)}{(p+1-\rho)(r/\varepsilon)^{p+2}} + o\left(\frac{V(r/\varepsilon)(r/\varepsilon)}{(r/\varepsilon)^{p+2}}\right)\right).$$

Опять применяя лемму 1, получим отсюда

$$\varlimsup_{r\to\infty} I_3 \leqslant \frac{\varepsilon^{p+1-\rho}}{p+1-\rho}. \tag{2.4}$$

Интеграл по промежутку $(\varepsilon,\varepsilon^{-1}]$ оценим с помощью леммы 1. При достаточно больших r имеем

$$I_2 = I_2(r;\varepsilon,\rho) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}}\frac{V(r\tau)}{V(r)}\cdot\frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leqslant \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}}\frac{\tau^{\rho+\varepsilon}\,d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leqslant \int_0^{\infty}\frac{\tau^{\rho-p-1+\varepsilon}}{1+\tau}\,d\tau.$$

Так как ε — произвольное малое положительное число, то из последнего неравенства и из (2.3), (2.4) получаем, что

$$\limsup_{r\to\infty}\int_{c/r}^{\infty}\frac{V(r\tau)}{V(r)}\cdot\frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leqslant \int_0^{\infty}\frac{\tau^{\rho-p-1}}{1+\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{\sin\pi(\rho-p)}.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью теории вычетов (см., например, [15, глава I]). Лемма доказана. □

Нам понадобится формула Пуассона–Иенсена для круга. Пусть функция f является мероморфной в замкнутом круге $B(R)$. Тогда справедлива формула

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\operatorname{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi - \iint\limits_{|\zeta|\leqslant R}\ln\left|\frac{R^2-z\bar\zeta}{R(z-\zeta)}\right|\,d\mu_f(\zeta). \tag{2.5}$$

При $z=0$, $f(0)\neq 0,\infty$, формула (2.5) называется формулой Иенсена и принимает вид

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \iint\limits_{|\zeta|\leqslant R}\ln\left|\frac{R}{\zeta}\right|\,d\mu_f(\zeta). \tag{2.6}$$

Кроме того, нам понадобится еще одна формула [3, глава I, теорема 2.4]

$$\left.\frac{d^p}{dz^p}\ln f(z)\right|_{z=0} = \frac{2p!}{R^p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|e^{-ip\varphi}\,d\varphi + (p-1)!\iint\limits_{|\zeta|\leqslant R}\left(\frac{\bar\zeta^p}{R^{2p}}-\frac{1}{\zeta^p}\right)\,d\mu_f(\zeta). \tag{2.7}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0)=1$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается.

Обозначим через $c_k(r,f)$ коэффициенты Фурье функции $\ln|f(re^{i\varphi})|$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, т.е.

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|e^{-ik\varphi}\,d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Очевидно, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ верна оценка

$$|c_k(r,f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln|f(re^{i\varphi})||\,d\varphi = m(r,f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqslant 2T(r,f). \tag{2.8}$$

Для данной меры μ обозначим

$$d\mu_k(\zeta) = \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}, \quad \mu_k(r) = \mu_k(C(0,r)).$$

Ясно, что

$$|\mu_k|(r) \leqslant \frac{|\mu|(r)}{r^k}. \tag{2.9}$$

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье, которые несколько отличаются от соответствующих формул работы [16], и являются более удобными в наших исследованиях.

Лемма 4. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $C(0,R_0)$, $f(0) = 1$, допускающая в некоторой окрестности точки $z = 0$ разложение*

$$\ln|f(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{2}\left(\alpha_k e^{ik\theta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\theta}\right) \quad (z = re^{i\theta}). \tag{2.10}$$

Тогда для $0 < r < R_0$ справедливы представления

$$c_0(r,f) = N^+(r,f) - N(r,f), \tag{2.11}$$

$$c_k(r,f) = \frac{r^k}{2}\alpha_k + \frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\leqslant r} \frac{r^{2k} - \tau^{2k}}{r^k}\,d\mu_k(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}, \quad k \geqslant 1, \tag{2.12}$$

где $\mu_k = (\mu_f)_k$. Если $k \leqslant -1$, то $c_k = \bar{c}_{-k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (2.11) совпадает с формулой Иенсена (2.6). Для доказательства (2.12) будем использовать формулу Пуассона–Иенсена (2.5). Так как

$$\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)}, \quad z = re^{i\theta},$$

при $0 \leqslant r < R < R_0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z}\,d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(R,v)\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Воспользуемся далее разложением ядра

$$\ln\left|\frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)}\right| = \ln\frac{R}{\tau} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|}\left(1 - \frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta-\varphi)},$$

$$0 \leqslant r < \tau \leqslant R, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

$$\ln\left|\frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)}\right| = \ln\frac{R}{r} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|}\left(\frac{\tau}{r}\right)^{|k|}\left(1 - \frac{r^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta-\varphi)},$$

$$0 \leqslant \tau < r \leqslant R$$

(штрих над знаком суммы означает, что отсутствует слагаемое при $k = 0$). Выберем z достаточно малым, чтобы выполнялось (2.10) и окрестность $B(0,|z|)$ не нагружала меру $\mu(v)$. Приравнивая коэффициенты Фурье правой и левой частей формулы (2.5), для $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{2}\alpha_k r^k = c_k(R)\left(\frac{r}{R}\right)^k - \frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\leqslant r}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|}\left(1-\frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right)e^{-ik\varphi}\,d\mu(\zeta).$$

Умножив это равенство на $(R/r)^k$, получим (2.12). Лемма доказана. □

§ 3. Доказательства основных результатов

Докажем теорему 2. Предположим, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{|N|(r,f)}{V(r)} = \Delta_N < \infty, \qquad \limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{V(r)} = \Delta_f < \infty.$$

Так как $|N|(r,f) \leqslant 2T(r,f) + O(1)$, то $\Delta_N \leqslant 2\Delta_f$, или

$$\Delta_f \geqslant 2^{-1}\Delta_N. \tag{3.1}$$

Далее воспользуемся неравенством из [3, глава II], полученным при доказательстве теоремы 4.2. Именно,

$$\frac{T(r,f)}{V(r)} \leqslant o(1) + C(p)(p+1)(\Delta_N+\varepsilon)\int_{c/r}^{\infty}\frac{V(r\tau)}{V(r)}\cdot\frac{d\tau}{\tau^{\rho+1}(1+\tau)}, \qquad r\to+\infty.$$

Неравенство имеет место для всех $r \geqslant c$, где $c = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant\rho}|c_k| > 0$, $p = [\alpha] = [\rho]$, $C(0) = 1$, $C(p) = 4(p+1)(2+\ln p)$ при $p \geqslant 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to +\infty$ и используя лемму 3, получаем, что

$$\Delta_f \leqslant C(p)(p+1)(\Delta_N+\varepsilon)\frac{\pi}{\sin\pi(\rho-p)}.$$

Учитывая произвольную малость ε, имеем

$$\Delta_f \leqslant C(p)(p+1)\frac{\pi}{\sin\pi(\rho-p)}\Delta_N\,. \tag{3.2}$$

При $\Delta_N = +\infty$ это неравенство тривиально. Вместе с (3.1) это доказывает теорему 2.

Следствие 1. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет нецелый порядок ρ, $[\rho] = p$, то*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{|N|(r,f)}{T(r,f)} \geqslant \frac{\sin\pi(\rho-p)}{C(p)(p+1)\pi}.$$

Доказательство с использованием неравенства (3.2) дословно повторяет доказательство следствия из теоремы 4.2 книги [3, глава II].

Рассмотрим теперь случай, когда мероморфная функция $f(z)$ имеет целый порядок $\rho \in \mathbb{N}$. Тогда род функции $f(z)$ равен или $\rho - 1$, или ρ. Мы воспользуемся идеями Л. Рубела [17] (см. [3, глава II, теорема 4.4]). Пусть $f(0) = 1$ и в окрестности $z = 0$ имеет место разложение

$$\ln f(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j z^j.$$

Используя теорему Адамара, функцию $f(z)$ можно представить в виде (1.3). Откуда легко получаем, что

$$\alpha_j = \begin{cases} c_j, & j = 1, \dots, \rho, \\ -\frac{1}{j} \iint\limits_{\mathbb{C}} d(\mu_f)_j(\zeta), & j = \rho + 1, \rho + 2, \dots . \end{cases} \tag{3.3}$$

Формулу (2.7) можно записать так ($j = 1, 2, \dots$):

$$\alpha_j = \frac{2}{r^j}\, c_j(r, f) + \frac{1}{j} \iint\limits_{|\zeta| \leqslant r} \left(\frac{\bar{\zeta}^j}{r^{2j}} - \frac{1}{\zeta^j} \right) d\mu_f(\zeta). \tag{3.4}$$

При $\tilde{\alpha} \leqslant j \leqslant \rho$ имеем $\alpha_j = c_j$, и равенство (3.4) можно переписать в обозначениях (1.4) следующим образом:

$$K_j(r) = \frac{2}{r^j}\, c_j(r, f) + \frac{1}{j} \iint\limits_{|\zeta| \leqslant r} \left(\frac{\bar{\zeta}^j}{r^{2j}} \right) d\mu_f(\zeta). \tag{3.5}$$

Отсюда, учитывая (2.8), получаем

$$\frac{|K_j(r)|}{L_j(r)} \leqslant \frac{4T(r, f)}{V(r)} + \frac{1}{jV(r)} \iint\limits_{t \leqslant r} \left(\frac{t}{r} \right)^j d|\mu_f|(t) \leqslant \frac{4T(r, f)}{V(r)} + \frac{|\mu_f|(t)}{jV(r)}.$$

Следовательно,

$$\Delta_K \leqslant 4\Delta_f + \Delta_\mu.$$

Из леммы 7.1 [3, глава I] следует, что $\Delta_\mu \leqslant |N|(er, f) \leqslant 2T(er, f) + O(1)$. Поэтому $\Delta_\mu \leqslant 2e^\rho \Delta_f$. Значит, $\Delta_K \leqslant (4 + 2e^\rho)\Delta_f$. С учетом неравенства (3.1) заключаем, что

$$\Omega \leqslant (4 + 2e^\rho + 2^{-1})\Delta_f. \tag{3.6}$$

Предположим теперь, что $\Omega < \infty$. При $r > r(\varepsilon)$ выполняются асимптотические неравенства $|K_j(r)| < (K_j + \varepsilon)L_j(r)$ и $|\mu_(r)| < (\Delta_\mu + \varepsilon)V(r)$, $\varepsilon > 0$. Оценим коэффициенты Фурье $c_j(r, f)$. При $j > \rho$ из (3.3) и (3.4) имеем

$$-\frac{1}{j} \iint\limits_{|\zeta| > r} d(\mu_f)_j(\zeta) = \frac{2}{r^j} c_j(r, f) + \frac{1}{j} \iint\limits_{|\zeta| \leqslant r} \frac{\bar{\zeta}^j}{r^{2j}}\, d\mu_f(\zeta).$$

Но тогда, учитывая (2.9), интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} |c_j(r, f)| &\leqslant \frac{|\mu_f|(r)}{2j} + \frac{r^j}{2j} \int_r^\infty \frac{d|\mu_f|(t)}{t^j} = \frac{r^j}{2} \int_r^\infty \frac{|\mu_f|(t)}{t^{j+1}} dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{2(j - \rho)} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r^j} \right), \quad r \to +\infty. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы использовали (2.2). Отсюда следует, что при $j > \rho$ верна оценка

$$|c_j(r, f)| \leqslant \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{2(j - \rho)} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r} \right), \quad r \to +\infty. \tag{3.7}$$

Если $1 \leqslant j \leqslant \tilde{\alpha} - 1$, то из (3.3), (3.4) и (2.1) получаем, что

$$|c_j(r,f)| \leqslant \frac{|c_j|}{2} r^j + \frac{|\mu_f|(r)}{2j} + \frac{r^j}{2j} \int_0^r \frac{d|\mu_f|(t)}{t^j} =$$
$$= \frac{|c_j|}{2} r^j + \frac{|\mu_f|(r)}{j} + \frac{r^j}{2} \int_0^r \frac{|\mu_f|(t)}{t^{j+1}} dt \leqslant$$
$$\leqslant O(r^{\tilde{\alpha}-1}) + (\Delta_\mu + \varepsilon) \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right) V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r^j} \right), \quad r \to +\infty.$$

Отсюда следует, что при $1 \leqslant j \leqslant \tilde{\alpha} - 1$ верна оценка

$$|c_j(r,f)| \leqslant O(r^{\tilde{\alpha}-1}) + (\Delta_\mu + \varepsilon) \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right) V(r).$$

Если $0 < \tilde{\alpha} \leqslant j \leqslant \rho$, то из (3.5)

$$|c_j(r,f)| \leqslant \frac{|K_j(r)|}{2} r^j + \frac{|\mu_f|(r)}{2j} \leqslant \frac{1}{2} \left(K_j + \varepsilon + \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{j} \right) V(r).$$

Наконец, по формуле Иенсена

$$c_0(r,f) = N^+(r,f) - N(r,f).$$

Применяя неравенство (2.1), получим

$$|c_0(r,f)| \leqslant |N|(r,f) \leqslant (\Delta_\mu + \varepsilon) \int_0^r \frac{V(t)}{t} dt \leqslant \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r} \right), \quad r \to +\infty. \tag{3.8}$$

В силу равенства Парсеваля и связи $c_{-j}(r,f) = \overline{c_j(r,f)}$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 |f(re^{i\varphi})| d\varphi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(r,f)|^2 = |c_0(r,f)|^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(r,f)|^2.$$

Используя неравенства (3.7)–(3.8) и тривиальное неравенство $(|a| + |b|)^2 \leqslant 2(|a|^2 + |b|^2)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant O(r^{2\tilde{\alpha}-2}) + 2 \left\{ \left(\frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha} \right)^2 + (\Delta_\mu + \varepsilon)^2 \sum_{j=1}^{\tilde{\alpha}-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\rho} \left(\frac{(K_j + \varepsilon)^2}{2} + \frac{(\Delta_\mu + \varepsilon)^2}{2j^2} \right) + \frac{(\Delta_\mu + \varepsilon)^2}{4} \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(j-\rho)^2} \right\} (V(r))^2 =$$
$$= O(r^{2\tilde{\alpha}-2}) + \left\{ M_1 (\Delta_K + \varepsilon)^2 + M_2 (\Delta_\mu + \varepsilon)^2 \right\} (V(r))^2,$$

где

$$M_1 = \rho - \tilde{\alpha}, \quad M_2 = 2 \sum_{j=1}^{\tilde{\alpha}-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right)^2 + \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\rho} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(j-\rho)^2} < \infty.$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского получаем

$$m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||\,d\varphi\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{O(r^{-2})+M_1(\Delta_K+\varepsilon)^2+M_2(\Delta_\mu+\varepsilon)^2\right\}^{1/2}(V(r)),$$
$$2T(r,f)=m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)+|N|(r,f)\leqslant$$
$$\leqslant\left\{O(r^{-2})+M_1(\Delta_K+\varepsilon)^2+M_2(\Delta_\mu+\varepsilon)^2\right\}^{1/2}V(r)+$$
$$+\frac{\Delta_\mu+\varepsilon}{\alpha}V(r)+o\left(\frac{V(r)}{r}\right),\quad r\to+\infty.$$

Отсюда

$$2\Delta_f\leqslant\left\{M_1(\Delta_K+\varepsilon)^2+M_2(\Delta_\mu+\varepsilon)^2\right\}^{1/2}+\frac{\Delta_\mu+\varepsilon}{\alpha},$$
$$\Delta_f\leqslant\frac{1}{2}\left\{M_1\Delta_K^2+M_2\Delta_\mu^2\right\}^{1/2}+\frac{\Delta_\mu}{\alpha}\leqslant M_3\,\Omega.$$

Вместе с (3.6) это дает

$$(4+2e^\rho+2^{-1})^{-1}\Omega\leqslant\Delta_f\leqslant M_3\,\Omega.$$

Теорема 3 доказана.

Автор выражает признательность рецензенту за сделанные замечания и редакционные правки, которые значительно улучшили содержание и оформление статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
2. Lindelöf E. Sur les fonctions entières d'ordre entier // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3. 1905. Vol. 22. P. 369–395. https://doi.org/10.24033/asens.555
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
4. Popov A. Yu. Development of the Valiron–Levin theorem on the least possible type of entire functions with a given upper ρ-density of roots // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 211. Issue 4. P. 579–616. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2618-8
5. Брайчев Г. Г. Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. Вып. 1. С. 31–45. https://www.mathnet.ru/rus/ufa549
6. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундаментальная и прикладная математика. 2018. Т. 22. Вып. 1. С. 51–97. https://www.mathnet.ru/rus/fpm1781
7. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Оценки индикаторов целой функции с отрицательными корнями // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22. Вып. 3. С. 30–46. https://doi.org/10.46698/g8758-9884-5440-f
8. Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В. О наименьшем типе целой функции с заданной подпоследовательностью нулей // Уфимский математический журнал. 2022. Т. 14. Вып. 3. С. 17–22. https://www.mathnet.ru/rus/ufa617
9. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Preorders on subharmonic functions and measures with applications to the distribution of zeros of holomorphic functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43. Issue 3. P. 587–611. https://doi.org/10.1134/S1995080222060154

10. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. Вып. 3. С. 116–128. https://www.mathnet.ru/rus/ufa581
11. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой // Математические заметки. 2020. Т. 108. Вып. 4. С. 588–600. https://doi.org/10.4213/mzm12610
12. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order. II // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 264. Issue 5. P. 609–616. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06020-6
13. Saks S. Theory of the integral. New York: Dover Publications, 1964.
14. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 262. Issue 3. P. 301–311. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05818-8
15. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
16. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1968. Vol. 96. P. 53–96. http://eudml.org/doc/87119
17. Rubel L. A., Colliander J. E. Entire and meromorphic functions. New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0735-1

Поступила в редакцию 14.11.2022

Принята к публикации 29.05.2023

Кабанко Михаил Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, 305000, Россия, г. Курск, ул. Радищева, 33.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9537-3699
E-mail: kabankom@gmail.com

Цитирование: М. В. Кабанко. О типе мероморфной функции конечного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 212–224.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 2. Pp. 212–224.

M. V. Kabanko

On the type of the meromorphic function of finite order

Keywords: meromorphic function, function order, function type, upper density, argument symmetry.

MSC2020: 30D35, 30D30, 42A16, 30D15

DOI: 10.35634/vm230202

Let $f(z)$ be a meromorphic function on the complex plane of finite order $\rho > 0$. Let $\rho(r)$ be a proximate order in the sense of Boutroux such that $\limsup\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, $\liminf\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \alpha > 0$. If $[\alpha] < \alpha \leqslant \rho < [\alpha]+1$ then the types of $T(r, f)$ and $|N|(r, f)$ coincide with respect to $\rho(r)$. If there are integers between α and ρ, then the resulting criterion is formulated in terms of the upper density of zeros and poles of the function f and their argument symmetry.

REFERENCES

1. Levin B. Ja. *Distribution of zeros of entire functions*, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1964. https://doi.org/10.1090/mmono/005
2. Lindelöf E. Sur les fonctions entières d'ordre entier, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3*, 1905, vol. 22, pp. 369–395. https://doi.org/10.24033/asens.555
3. Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. *Value distribution of meromorphic functions*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2008. https://doi.org/10.1090/mmono/236
4. Popov A. Yu. Development of the Valiron–Levin theorem on the least possible type of entire functions with a given upper ρ-density of roots, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 211, issue 4, pp. 579–616. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2618-8
5. Braichev G. G. Joint estimates for zeros and Taylor coefficients of entire function, *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, issue 1, pp. 31–45. https://doi.org/10.13108/2021-13-1-31
6. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. Sharp bounds for asymptotic characteristics of growth of entire functions with zeros on given sets, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2018, vol. 22, issue 1, pp. 51–97 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/fpm1781
7. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. Estimates of indicators of an entire function with negative roots, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2020, vol. 22, issue 3, pp. 30–46 (in Russian). https://doi.org/10.46698/g8758-9884-5440-f
8. Braichev G. G., Sherstyukova O. V. On least type of entire function with given subsequence of zeros, *Ufa Mathematical Journal*, 2022, vol. 14, issue 3, pp. 17–21. https://www.mathnet.ru/eng/ufa617
9. Khabibullin B. N., Menshikova E. B. Preorders on subharmonic functions and measures with applications to the distribution of zeros of holomorphic functions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 3, pp. 587–611. https://doi.org/10.1134/S1995080222060154
10. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Growth of entire functions of exponential type and characteristics of distributions of points along straight line in complex plane, *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, issue 3, pp. 113–125. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-113
11. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Distribution of zeros of exponential-type entire functions with constraints on growth along a line, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, issues 3–4, pp. 579–589. https://doi.org/10.1134/S0001434620090308
12. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order. II, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 264, issue 5, pp. 609–616. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06020-6
13. Saks S. *Theory of the integral*, New York: Dover Publications, 1964.
14. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 262, issue 3, pp. 301–311. https://doi.org/10.1007/s10958-022-05818-8

15. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions*, Dover Publications, 2020.
16. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1968, vol. 96, pp. 53–96. http://eudml.org/doc/87119
17. Rubel L. A., Colliander J. E. *Entire and meromorphic functions*, New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0735-1

Received 14.11.2022

Accepted 29.05.2023

Mikhail Vladimirovich Kabanko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University, ul. Radishcheva, 33, Kursk, 305000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9537-3699
E-mail: kabankom@gmail.com

Citation: M. V. Kabanko. On the type of the meromorphic function of finite order, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 212–224.