МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 141–155.

УДК 517.926

© *А. Х. Сташ*

О СУЩЕСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧАСТОТ СЕРГЕЕВА И ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В настоящей работе исследуются различные разновидности частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными коэффициентами. Для любого наперед заданного натурального числа N конструктивно в работе построено периодическое линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, обладающее тем свойством, что его спектры верхних и нижних частот Сергеева строгих знаков, нулей и корней, а также спектры всех верхних и нижних сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней содержат один и тот же набор, состоящий из N различных существенных значений, причем как метрически, так и топологически. Более того, все эти значения реализованы на одном и том же наборе решений построенного уравнения, то есть для каждого решения из этого набора все перечисленные выше частоты и показатели колеблемости совпадают между собой. При построении указанного уравнения и доказательстве требуемых результатов использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, методы теории возмущений решений линейных дифференциальных уравнений, а также авторская методика управления фундаментальной системой решений таких уравнений в одном частном случае.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные системы, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частоты Сергеева.

DOI: 10.35634/vm230110

Введение

В работах [1–3] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. Далее, в 2015 году в статье [4] все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них: в частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости [5–8]. В работах [9–13] характеристические частоты [1, 14] стали называться частотами Сергеева.

Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [3, 15] и полностью завершено в [16]. На множестве решений автономных, в отличие от неавтономных [17], систем все сильные показатели являются остаточными, то есть инвариантными относительно изменения решения на любом конечном отрезке.

В докладах [18, 19] И. Н. Сергеева было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение, а спектр частот Сергеева нулей линейного автономного уравнения третьего порядка может содержать максимум два существенных значения, зато в случае уравнения четвертого порядка — любое наперед заданное число существенных значений.

Настоящая работа логически продолжает и развивает результаты работы [20], в которой доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры частот Сергеева нулей и показателей колеблемости нулей которых содержат любое наперед заданное конечное число метрически и топологически существенных значений. Ниже эти свойства перенесены и на остальные характеристики колеблемости.

§ 1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывными* функциями $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}^n_* = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения.

Определение 2 (см. [1, 2]). Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ — число ее *корней* (то есть нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\alpha(y, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle \psi y, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 (см. [3, 4]). *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* любого решения $y \in \mathcal{S}^n_*$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t)\right).$$

Определение 4 (см. [2–4]). *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $y \in \mathcal{S}^n_*$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t)\right),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(y) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(y) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t)\right).$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какой-либо из характеристик колеблемости будем называть ее *точной*, убирая в ее обозначении крышечку и галочку.

Определение 5. Множество $\mathrm{Spec}_{\varkappa}(a)$ всех значений показателя $\varkappa\colon \mathcal{S}_*(a) \to \mathbb{R}$ назовем *спектром* этого показателя уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, а значение показателя $\varkappa$, принадлежащее спектру уравнения a, назовем:

а) *метрически существенным* (см. [18]), если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, начальные значения $\psi y(0) \in \mathbb{R}^n$ которых заполняют множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) *топологически существенным* (см. [19]), если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество начальных значений $\psi y(0) \in \mathbb{R}^n$ которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

§ 2. Формулировка результатов

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ с периодическими коэффициентами, имеющее набор решений $y_1, y_2, \ldots, y_N$, удовлетворяющий при каждом возможном $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ условиям*

$$\nu^-(y_j) = \nu^0(y_j) = \nu^+(y_j) = \nu^\alpha_\bullet(y_i) = \nu^\alpha_\circ(y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$
$$\nu^-(y_i) \neq \nu^-(y_j), \quad i \neq j,$$

причем все эти значения характеристик колеблемости являются метрически и топологически существенными.

Для построения периодического уравнения нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$ найдутся уравнения $a_k, b_k \in \mathcal{E}^3$, фундаментальные системы решений $x, y, z \in \mathcal{S}_*(a_k)$ и $x_2, y_2, z_2 \in \mathcal{S}_*(b_k)$ которых при каждом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ удовлетворяют следующим условиям*

$$(x, y, z)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c,\ 1,\ \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant (2k+1)\pi, \\ (\exp(-\cos t) + c + 3,\ 1,\ \sin t), & t \geqslant (2k+4)\pi, \end{cases}$$

$$(x_2, y_2, z_2)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c + 3,\ 1,\ \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant 2k\pi, \\ (\exp(-\cos t) + c,\ 1,\ \sin t), & t \geqslant (2k+3)\pi, \end{cases}$$

$$\nu^\alpha\left(x(t) - c - 1,\ (2k+1)\pi,\ (2k+4)\pi\right) = \nu^\alpha\left(x(t) - c - 4,\ (2k+1)\pi,\ (2k+4)\pi\right) = 0, \quad (2.1)$$
$$\nu^\alpha\left(x_2(t) - c - 1,\ 2k\pi,\ (2k+3)\pi\right) = \nu^\alpha\left(x_2(t) - c - 4,\ 2k\pi,\ (2k+3)\pi\right) = 0,$$

где обозначено $\nu^\alpha(x, s, t) \equiv \nu^\alpha(x, t) - \nu^\alpha(x, s)$.

§ 3. Доказательство вспомогательного результата

Доказательство леммы.

1. Для набора функций

$$f_1(t) = \exp(-\cos t) + c, \quad f_2(t) = 1, \quad f_3(t) = \sin t,$$

определитель Вронского $W_{f_1, f_2, f_3}(t) = \exp(-\cos t)\left(1 + \sin^2 t \cos t\right)$ при любом $t \geqslant 0$ положителен, а линейное однородное уравнение, решениями которого они являются, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \exp(-\cos t) + c & 1 & \sin t & y \\ \sin t \exp(-\cos t) & 0 & \cos t & \dot y \\ (\cos t + \sin^2 t) \exp(-\cos t) & 0 & -\sin t & \ddot y \\ (\sin^3 t + 3 \sin t \cos t - \sin t) \exp(-\cos t) & 0 & -\cos t & \dddot y \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\dddot{y} - \frac{\Delta_1(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \ddot{y} + \frac{\Delta_2(t)}{W_{f_1,f_2,f_3}(t)} \cdot \dot{y} = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\Delta_1(t) = \exp(-\cos t)(\cos t \sin^3 t + 3 \sin t \cos^2 t),$$
$$\Delta_2(t) = \exp(-\cos t)(1 - 2\cos t \sin^2 t - \sin^4 t).$$

2. Для заданного $k \in \mathbb{N}$ введем обозначения

$$T_1 \equiv (2k+1)\pi, \quad T_2 \equiv T_1 + \pi, \quad T_3 \equiv T_1 + 2\pi, \quad T_4 \equiv T_1 + 3\pi.$$

На отрезке $[T_1, T_4]$ выберем непрерывно трижды дифференцируемую функцию $\theta(t)$, убывающую на интервалах (T_1, T_2), (T_3, T_4), возрастающую на (T_2, T_3), имеющую перегибы в точках $s_1 \equiv T_1 + \pi/2$, $s_2 \equiv T_2 + \pi/2$, $s_3 \equiv T_3 + \pi/2$, и обладающую свойствами

$$\theta(T_1) = f_1(T_1), \quad \theta(T_2) = c+2, \quad \theta(T_3) = c+3.5, \quad \theta(T_4) = f_1(T_4)+3, \quad \theta'(T_1) = f_1'(T_1),$$
$$\theta''(T_1) = f_1''(T_1), \quad \theta'''(T_1) = f_1'''(T_1), \quad \theta'(T_4) = f_1'(T_4), \quad \theta''(T_4) = f_1''(T_4), \theta'''(T_4) = f_1'''(T_4).$$

Определитель Вронского функций $\theta(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ на отрезке $[T_1, T_4]$ равен

$$W_{\theta,f_2,f_3}(t) = \theta'(t)\sin t + \theta''(t)\cos t.$$

Из вида функции $\theta(t)$ следует неотрицательность $g_1(t) = \theta'(t)\sin t$ и $g_2(t) = \theta''(t)\cos t$. А поскольку эти функций на отрезке $[T_1, T_4]$ одновременно в нуль не обращаются, то имеет место оценка снизу $W_{\theta,f_2,f_3}(t) > 0$.

3. Таким образом, положительность определителя Вронского системы трижды непрерывно дифференцируемых функций

$$x(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \leqslant T_1, \\ \theta(t), & t \in [T_1, T_4], \\ f_1(t)+3, & t \geqslant T_4, \end{cases} \quad y(t) \equiv 1, \quad z(t) \equiv \sin t,$$

позволяет восстановить уравнение третьего порядка, решением которого они являются, совпадающим на $[0, T_1] \cup [T_4, +\infty)$ с уравнением (3.1).

4. Так как функция $\theta(t)$ на отрезке $[T_1, T_4]$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках T_2, T_3, то справедливы оценки

$$x(t) \geqslant \theta(T_2) = c+2, \quad x(t) \leqslant \theta(T_3) = c+3.5, \quad t \in [T_1, T_2],$$

на оснований которых на отрезке $[T_1, T_4]$ имеем

$$x(t) - c - 1 = \theta(t) - c - 1 \geqslant 1, \quad x(t) - c - 4 = \theta(t) - c - 4 \leqslant -0.5.$$

Последние две оценки устанавливают справедливость равенств (2.1).

Аналогично доказывается существование уравнения $b_k \in \mathcal{E}^3$. □

§ 4. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы.

1. Пусть задано $N \in \mathbb{N}$. Определим множество точек на числовой оси:

$$\begin{gathered} t_0 \equiv 0, \quad T \equiv 3\pi, \quad t_1 \equiv 3\pi, \quad t_2 \equiv t_1 + T + 5\pi, \quad t_3 \equiv t_2 + T + 7\pi, \quad \ldots, \\ t_{N-2} \equiv t_{N-3} + T + (2N-3)\pi, \quad t_{N-1} \equiv t_{N-2} + T + (2N-1)\pi, \\ t_N \equiv t_{N-1} + T + 2(2N+1)\pi, \quad t_{N+1} \equiv t_N + T + (2N-1)\pi, \\ t_{N+2} \equiv t_{N+1} + T + (2N-3)\pi, \quad t_{N+3} \equiv t_{N+2} + T + (2N-5)\pi, \quad \ldots, \\ t_{2N-2} \equiv t_{2N-3} + T + 5\pi, \quad t_{2N-1} \equiv t_{2N-2} + T + 3\pi. \end{gathered}$$

Откуда находим $t_{2N-1} = 2\pi(N^2 + 5N - 3)$.

2. На каждом из промежутков

$$[0,\, t_1], \quad [t_1 + T,\, t_2], \quad [t_2 + T,\, t_3], \quad \ldots, \quad [t_{2N-2} + T,\, t_{2N-1}]$$

зададим фундаментальные системы решений уравнения (3.1) с положительными определителями Вронского. На отрезке $[0, t_{2N-1}]$ построим уравнение a^1 в соответствии с леммой следующим образом:

— прежде всего, на участке $[t_1,\, t_1 + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 2,\ 1,\ \sin t) \tag{4.1}$$

решений, заданных слева от точки t_1, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 5,\ 1,\ \sin t) \tag{4.2}$$

решений, заданных справа от точки $t_1 + T$ (здесь и далее первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, а третье — в третье);

— теперь на участке $[t_2,\, t_2 + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (4.2) решений, заданных слева от точки t_2, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 8,\ 1,\ \sin t) \tag{4.3}$$

решений, заданных справа от точки $t_2 + T$;

— и т. д.;

— на участке $[t_{N-1},\, t_{N-1} + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 4,\ 1,\ \sin t) \tag{4.4}$$

решений, заданных слева от точки t_{N-1}, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 1,\ 1,\ \sin t) \tag{4.5}$$

решений, заданных справа от точки $t_{N-1} + T$;

— после этого на участке $[t_N,\, t_N + T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (4.5) решений, заданных слева от точки t_N, в набор (4.4) решений, заданных справа от точки $t_N + T$;

— на участке $[t_{N+1},\, t_{N+1} + T]$ возьмем уравнение, переводящее последний набор (4.4) решений, заданных слева от точки t_{N+1}, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3N - 7,\ 1,\ \sin t)$$

решений, заданных справа от точки $t_{N+1} + T$;

— и т. д.;

— далее, на участке $[t_{2N-3},\, t_{2N-3}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (4.3) решений, заданных слева от точки t_{2N-3}, в набор (4.2) решений, заданных справа от точки $t_{2N-3}+T$;

— наконец, на участке $[t_{2N-2},\, t_{2N-2}+T]$ возьмем уравнение, переводящее набор (4.2) решений, заданных слева от точки t_{2N-2}, в набор (4.1) решений, заданных справа от точки $t_{2N-2}+T$.

Таким образом, фундаментальная система решений построенного на отрезке $[0,\, t_{2N-1}]$ уравнения $a^1 \in \mathcal{E}^3$ удовлетворяет условиям

$$(x_1,x_2,x_3)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t)+2,\, 1,\, \sin t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ (\exp(-\cos t)+5,\, 1,\, \sin t), & t_1+T \leqslant t \leqslant t_2, \\ (\exp(-\cos t)+8,\, 1,\, \sin t), & t_2+T \leqslant t \leqslant t_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\exp(-\cos t)+3N-4,\, 1,\, \sin t), & t_{N-2}+T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ (\exp(-\cos t)+3N-1,\, 1,\, \sin t), & t_{N-1}+T \leqslant t \leqslant t_N, \\ (\exp(-\cos t)+3N-4,\, 1,\, \sin t), & t_N+T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\exp(-\cos t)+8,\, 1,\, \sin t), & t_{2N-4}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-3}, \\ (\exp(-\cos t)+5,\, 1,\, \sin t), & t_{2N-3}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ (\exp(-\cos t)+2,\, 1,\, \sin t), & t_{2N-2}+T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}. \end{cases}$$

3. Зададим последовательность $s_0 \equiv 0$, $s_i = s_{i-1} + t_{2N-1}$, $i \in \mathbb{N}$, обладающую свойством

$$\lim_{i\to+\infty} s_i = +\infty, \qquad \lim_{i\to+\infty} \frac{s_i}{s_{i-1}} = \lim_{i\to+\infty} \left(1 + \frac{t_{2N}}{s_{i-1}}\right) = 1.$$

Благодаря тому, что s_1 кратно 2π, а функций $\exp(-\cos t)+2$, $\sin t$ являются 2π-периодическими, можно определить на $\mathbb{R}_+$ следующую фундаментальную систему

$$(z_1,z_2,z_3)(t) = \begin{cases} (x_1,x_2,x_3)(t), & 0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ (x_1,x_2,x_3)(t-s_1), & s_1 \leqslant t \leqslant s_2, \\ (x_1,x_2,x_3)(t-s_2), & s_2 \leqslant t \leqslant s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

являющуюся решением уравнения

$$a(t) = \begin{cases} a^1(t), & 0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ a^1(t-s_1), & s_1 \leqslant t \leqslant s_2, \\ a^1(t-s_2), & s_2 \leqslant t \leqslant s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

с непрерывными ограниченными s_1-периодическими коэффициентами.

4. Для вычисления нижних характеристик колеблемости произвольного периодического решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ определим числа

$$L(y) \equiv \nu^-(y,s_1) = \nu^0(y,s_1) = \nu^+(y,s_1), \qquad l(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y,m,s_1); \tag{4.6}$$

тогда по лемме имеем равенство

$$\check{\nu}^-(y) = \check{\nu}^0(y) = \check{\nu}^+(y) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{s_p}\nu^-(y, s_p) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^-(y, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi p \nu^-(y, s_1)}{s_1 p} = \frac{\pi \nu^-(y, s_1)}{s_1} = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y),$$

а также равенства

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{s_p}\nu^\alpha(y, m, s_p) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^\alpha(y, m, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi p \nu^\alpha(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y),$$
$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y) = \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \frac{\pi}{s_p}\nu^\alpha(y, m, s_p) = \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \frac{\pi \sum\limits_{i=1}^{p} \nu^\alpha(y, m, s_{i-1}, s_i)}{s_1 p} =$$
$$= \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \frac{\pi p \nu^\alpha(y, m, s_1)}{p s_1} = \frac{\pi}{s_1} \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y, m, s_1) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y).$$

Аналогичные равенства справедливы и для верхних характеристик колеблемости, поэтому имеем

$$\nu^-(y) = \nu^0(y) = \nu^+(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot L(y), \quad \nu^\alpha_\bullet(y) = \nu^\alpha_\circ(y) = \frac{\pi}{s_1} \cdot l(y). \tag{4.7}$$

5. В силу равенств (4.7) вычисление частот решений построенного уравнения сводится к подсчету величин (4.6), а для этого достаточно знать поведение решений на промежутке $(0,\ s_1]$. Из множества $\mathcal{S}_*(a)$ выделим N следующих решений

$$y_1(t) \equiv (z_1 - 3z_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_1 + T \leqslant t \leqslant t_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_{N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 4, & t_{N-1} + T \leqslant t \leqslant t_N, \\ \exp(-\cos t) + 3N - 7, & t_N + T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_{2N-3} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{2N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}, \end{cases}$$

$$\dots$$

$$y_N(t) \equiv (z_1 - 3Nz_2)(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_1 + T \leqslant t \leqslant t_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_{N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{N-1}, \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_{N-1} + T \leqslant t \leqslant t_N, \\ \exp(-\cos t) - 4, & t_N + T \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3N, & t_{2N-3} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-2}, \\ \exp(-\cos t) + 2 - 3N, & t_{2N-2} + T \leqslant t \leqslant t_{2N-1}. \end{cases}$$

6. Если для каждого $i = 1, \ldots, N$, $\gamma \in \{-, 0, +\}$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ определить величины

$$\begin{gathered}\kappa(y_i) \equiv \nu^\gamma(y_i, t_1) + \nu^\gamma(y_i, t_1+T, t_2) + \ldots + \nu^\gamma(y_i, t_{2N-1}+T, t_{2N}),\\ \kappa(y_i, m) \equiv \nu^\alpha(y_i, m, t_1) + \ldots + \nu^\alpha(y_i, m, t_{2N-1}+T, t_{2N}),\\ \kappa^*(y_i) \equiv \nu^\gamma(y_i, t_1, t_1+T) + \ldots + \nu^\gamma(y_i, t_{2N-1}, t_{2N-1}+T),\\ \kappa^*(y_i, m) \equiv \nu^\alpha(y_i, m, t_1, t_1+T) + \ldots + \nu^\alpha(y_i, m, t_{2N-1}, t_{2N-1}+T),\end{gathered}$$

то, в силу леммы, имеют место равенства

$$L(y_i) = \kappa(y_i) + \kappa^*(y_i) = \kappa(y_i), \quad l(y_i) = \inf_{m \in \mathbb{R}^3_*}(\kappa(y_i, m) + \kappa^*(y_i, m)).$$

7. Определим функцию $u(t) = \exp(-\cos t) - 1$ и установим, что число нулей функции

$$\langle \psi u(t),\, m\rangle = m_1(\exp(-\cos t) - 1) + m_2 \sin t \exp(-\cos t) + m_3 \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t)$$

на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m = (m_1, m_2, m_3)$ не меньше двух. Для этого проследим за значениями функции $\langle \psi u,\, m\rangle$ в точках 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π:

$$\langle \psi u(0),\, m\rangle = \langle \psi u(2\pi),\, m\rangle = \frac{m_1}{e} - m_1 + \frac{m_3}{e}, \tag{4.8}$$

$$\langle \psi u(\pi),\, m\rangle = m_1 e - m_1 - m_3 e, \tag{4.9}$$

$$\langle \psi u\,(\pi/2)\,,\, m\rangle = m_2 + m_3, \tag{4.10}$$

$$\langle \psi u\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle = -m_2 + m_3. \tag{4.11}$$

Если $m_2 = m_3 = 0$ ($m_1 \neq 0$), то функция $\langle \psi u,\, m\rangle$ совпадает с $m_1 u$, а значит, имеет два нуля.

Легко можно убедиться, что следующие системы

$$\begin{cases} m_2 + m_3 > 0,\\ -m_2 + m_3 = 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e > 0,\\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 < 0,\\ -m_2 + m_3 = 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e < 0,\\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0,\\ -m_2 + m_3 > 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e = 0,\\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 = 0,\\ -m_2 + m_3 < 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e < 0,\\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 < 0,\\ -m_2 + m_3 < 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e = 0,\\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0,\\ -m_2 + m_3 > 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e > 0,\\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0,\\ -m_2 + m_3 < 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e < 0,\\ m_1(1-e) + m_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 > 0,\\ -m_2 + m_3 > 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e > 0,\\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 + m_3 < 0,\\ -m_2 + m_3 < 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e < 0,\\ m_1(1-e) + m_3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 + m_3 = 0,\\ -m_2 + m_3 > 0,\\ m_1(e-1) - m_3 e > 0,\\ m_1(1-e) + m_3 > 0, \end{cases}$$

не имеют решений, тем самым для значений (4.8)–(4.11) исключили десять критических случаев, а все оставшиеся случаи обеспечивают существование по крайней мере двух нулей функции $\langle\psi u(t),\, m\rangle$ на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$.

Следовательно, установили при каждом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ следующее равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(u, m, 2\pi) = \nu^\gamma(u, 2\pi) = 2,$$

из которого при любом $i = 1, 2, \ldots, N$ следуют

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y_i, m, t_{i-1} + T, t_i) = \nu^\gamma(y_i, t_{i-1} + T, t_i) = 2i + 1,$$
$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} \nu^\alpha(y_i, m, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = \nu^\gamma(y_i, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = 2i + 1.$$

На остальных частях полуинтервала $(0,\, t_{2N-1}]$ все решения y_i отделены от нуля, поэтому

$$\kappa(y_i) = \nu^\gamma(y_i, t_{i-1} + T, t_i) + \nu^\gamma(y_i, t_{2N-i-1} + T, t_{2N-i}) = 4i + 2, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

а значит, выполнены

$$l(y_i) = \inf_{m\in\mathbb{R}^3_*} (\kappa(y_i, m) + \kappa^*(y_i, m)) = \kappa(y_i) = L(y_i) = 4i + 2, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

(то есть инфимум в последнем равенстве достигается на векторе $m = (1, 0, 0)$).

Таким образом, вспоминая равенства (4.7) и $s_1 = t_{2N-1} = 2\pi(N^2 + 5N - 3)$, получаем, что для построенных решений $y_1, \ldots, y_N$ при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы соотношения

$$\nu^-(y_i) = \nu^0(y_i) = \nu^+(y_i) = \nu^\alpha_\bullet(y_i) = \nu^\alpha_\circ(y_i) = \frac{2i + 1}{N^2 + 5N - 3}. \tag{4.12}$$

8. Докажем, что каждое из значений (4.12) характеристик колеблемости построенного уравнения $a \in \mathcal{E}^3$ является существенным и метрически, и топологически.

С одной стороны, согласно теореме об изоморфизме [21], линейное пространство решений $y \in \mathcal{S}(a)$ изоморфно линейному пространству их начальных значений $\psi y(0) = (y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0)) \in \mathbb{R}^3$. С другой стороны, функции z_1, z_2, z_3 образуют фундаментальную систему решений уравнения a. Поэтому каждому решению $y \in \mathcal{S}(a)$ можно поставить в соответствие единственную тройку коэффициентов его линейного разложения $y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$; получим, тем самым, еще один изоморфизм линейных пространств $\mathcal{S}(a)$ и $\mathbb{R}^3$. В итоге мы имеем отображение множества начальных значений $\psi y(0) \in \mathbb{R}^3$ в множество троек коэффициентов $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, которое также осуществляет изоморфизм линейных пространств. Учитывая, что естественная топология в $\mathbb{R}^3$ задается нормой и не зависит от ее выбора, без ограничения общности можно считать, что эта норма задается формулой $|c| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

Таким образом, достаточно доказать, что для каждого исходного решения y_i уравнения a возмущенное решение

$$\begin{gathered}\overline{y}_i = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3,\\ c_1 \in (1,\, 1 + \epsilon), \quad c_2 \in (1 - 3i,\, 1 - 3i + \epsilon), \quad c_3 \in (0,\, \epsilon),\end{gathered} \tag{4.13}$$

того же уравнения при сколь угодно малом $\epsilon > 0$ удовлетворяет равенствам

$$\nu^\alpha_\bullet(\overline{y}_i) = \nu^\alpha_\circ(\overline{y}_i) = \nu^-(\overline{y}_i) = \nu^0(\overline{y}_i) = \nu^+(\overline{y}_i) = \nu^\alpha_\bullet(y_i). \tag{4.14}$$

Отсюда будет следовать совпадение характеристик колеблемости исходного и возмущенного решений уравнения, соответствующих точкам из некоторой окрестности точки $(1, 1-3i, 0)$ в пространстве троек коэффициентов или, что то же, из некоторой окрестности U_i точки $\psi y_i(0)$ в пространстве начальных значений. Это сразу повлечет за собой и метрическую, и топологическую существенность значений (4.12), поскольку мера окрестности U_i положительна, а дополнение к ней в U_i вообще пусто.

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений решение (4.13) на любом отрезке будет мало отличаться от y_i. Поэтому решение $\overline{y}_i$ ни разу не будет обращаться в нуль на тех участках, где функция y_i отделена от нуля. На остальных участках вида $[t_{i-1}+T,\, t_i]$, $[t_{2N-i-1}+T,\, t_{2N-i}]$, где функция y_i имеет вид $\exp(-\cos t)-1$, решение $\overline{y}_i$ представимо в виде $\overline{y}_i \equiv c_1(\exp(-\cos t)-1)+c_2^*+c_3\sin t$, где c_2^* — положительное, достаточно малое число.

Покажем, что функция

$$\begin{gathered}\langle\psi\overline{y}_i(t),\, m\rangle \equiv m_1(c_1(\exp(-\cos t)-1)+c_2^*+c_3\sin t)+\\+m_2\exp(-\cos t)(c_1\sin t+c_3\cos t)+m_3\exp(-\cos t)(c_1(\cos t+\sin^2 t)-c_3\sin t)\end{gathered}$$

на полуинтервале $(0,\, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m\in\mathbb{R}^3_*$ имеет не менее двух нулей. Для этого проследим за следующими значениями функции

$$\langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2),\, m\rangle = (c_2^*+c_3)m_1+c_1m_2+(c_1-c_3)m_3, \tag{4.15}$$

$$\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2),\, m\rangle = (c_2^*-c_3)m_1-c_1m_2+(c_1+c_3)m_3, \tag{4.16}$$

$$\langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle = m_1(c_1e+c_2^*-c_1)-ec_3m_2-ec_1m_3, \tag{4.17}$$

$$e\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle = e\langle\psi\overline{y}_i(2\pi),\, m\rangle = m_1(c_1+ec_2^*-ec_1)+c_3m_2+c_1m_3. \tag{4.18}$$

Нетрудно проверить, что следующие системы

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle=0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle=0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle=0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle=0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle=0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle=0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle>0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\langle\psi\overline{y}_i(0),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i(\pi),\, m\rangle<0,\\ \langle\psi\overline{y}_i\,(\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\\ e\langle\psi\overline{y}_i\,(3\pi/2)\,,\, m\rangle<0,\end{cases}$$

не имеют решений. В самом деле, пусть имеет место последняя система (для остальных систем проводятся аналогичные рассуждения)

$$\begin{cases}(c_2^*+c_3)m_1+c_1m_2+(c_1-c_3)m_3<0,\\(c_2^*-c_3)m_1-c_1m_2+(c_1+c_3)m_3<0,\\(c_1e+c_2^*-c_1)m_1-ec_3m_2-ec_1m_3<0,\\(c_1+ec_2^*-ec_1)m_1+c_3m_2+c_1m_3<0.\end{cases}$$

Умножая последнее неравенство системы на e и складывая его с третьим, получим неравенство $(2c_1e+e^2c_2^*+c_2^*-c_1-e^2c_1)m_1<0$, из которого следует $m_1>0$.

Складывая первые два неравенства системы, будем иметь $c_2^*m_1+c_1m_3<0$, откуда, на основании положительности m_1, вытекает отрицательность m_3.

Далее, умножим первое неравенство на ec_3, а третье — на c_1 и сложим их:

$$(ec_2^*c_3+ec_3^2+c_1^2e+c_1c_2^*-c_1)m_1+(ec_1c_3-ec_3^2-ec_1^2)m_3<0.$$

С другой стороны, в последнем неравенстве коэффициент при m_1 положительный, а коэффициент при m_3 отрицательный, поэтому (учитывая положительность m_1 и отрицательность m_3) имеет место неравенство

$$(ec_2^*c_3+ec_3^2+c_1^2e+c_1c_2^*-c_1)m_1+(ec_1c_3-ec_3^2-ec_1^2)m_3>0,$$

которое не согласуется с предыдущим неравенством, а значит, рассматриваемой системе не удовлетворяет никакой вектор $m\in\mathbb{R}^3_*$.

Следовательно, рассмотренные десять различных комбинаций знаков значений (4.15)–(4.18) не имеют места, а любая другая комбинация гарантирует существование хотя бы двух нулей функции $\langle\psi\overline{y}_i,\, m\rangle$ на полуинтервале $(0,\,2\pi]$ и тем самым при каждом возможном $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ установлено равенство

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^3_*}\nu^\alpha(\overline{y}_i,m,2\pi)=\nu^-(\overline{y}_i,2\pi)=\nu^0(\overline{y}_i,2\pi)=\nu^+(\overline{y}_i,2\pi)=2. \tag{4.19}$$

Таким образом, при каждом $i\in\{1,2,3,\ldots,N\}$ решение $\overline{y}_i$ обладает свойством (4.14). Последнее означает, что значения, задаваемые равенствами (4.12), являются и метрически, и топологически существенными. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. http://mi.mathnet.ru/tsp65
2. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. https://doi.org/10.4213/sm7928
3. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 149–172. https://doi.org/10.4213/im5035
4. Сергеев И. Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. http://mi.mathnet.ru/iimi318

5. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 732–751. https://doi.org/10.4213/mzm10555
6. Сергеев И. Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. https://www.mathnet.ru/rus/tsp95
7. Сергеев И. Н. Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2017. Т. 132. С. 117–121. https://www.mathnet.ru/rus/into179
8. Сергеев И. Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 1. С. 21–26. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36747038
9. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320. https://doi.org/10.1134/S0374064116100034
10. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. https://doi.org/10.1134/S0374064116120013
11. Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. https://doi.org/10.1134/S0374064116040026
12. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31. https://doklady.belnauka.by/jour/article/view/8?locale=ru
13. Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
14. Войделевич А. С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. 2015. № 3. С. 17–23. https://vestifm.belnauka.by/jour/article/view/108/0
15. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. http://mi.mathnet.ru/tsp71
16. Сташ А. Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568. https://doi.org/10.20537/vm190407
17. Сташ А. Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 59–69. https://doi.org/10.35634/vm210105
18. Сергеев И. Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1661–1662.
19. Сергеев И. Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1567–1568. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18059336
20. Сташ А. Х. О существенных значениях частот решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 3 (142). С. 33–44.
21. Сергеев И. Н. Дифференциальные уравнения. М.: Издательский центр «Академия», 2013.

Поступила в редакцию 09.01.2023

Принята к публикации 25.01.2023

Сташ Айдамир Хазретович, к. ф.-м. н., доцент, декан факультета математики и компьютерных наук, Адыгейский государственный университет, Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Цитирование: А. Х. Сташ. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 141–155.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 141–155.

A. Kh. Stash

On essential values of Sergeev's frequencies and exponents of oscillation for solutions of a third-order linear differential periodic equation

Keywords: differential equations, linear systems, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies.

MSC2020: 34C10

DOI: 10.35634/vm230110

In this paper, we study various types of Sergeev's frequencies and exponents of oscillation for solutions of linear homogeneous differential equations with continuous bounded coefficients. For any preassigned natural number N, a periodic third-order linear differential equation is constructively built in this paper, which has the property that its upper and lower Sergeev frequency spectra of strict signs, zeros and roots, as well as the spectra of all upper and lower strong and weak oscillation indices of strict and non-strict signs, zeros, roots and hyperroots contain the same set, consisting of N different essential values, both metrically and topologically. Moreover, all these values are implemented on the same set of solutions of the constructed equation, that is, for each solution from this set, all the frequencies listed above and the oscillation exponents coincide with each other. When constructing the indicated equation and proving the required results, analytical methods of the qualitative theory of differential equations were used, in particular, methods of the theory of perturbations of solutions of linear differential equations, as well as the author's technique for controlling the fundamental system of solutions of such equations in one particular case.

REFERENCES

1. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6
2. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293
3. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
4. Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi318
5. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, issue 5, pp. 729–746. https://doi.org/10.1134/S0001434616050114
6. Sergeev I. N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, issue 4, pp. 497–522. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4025-4
7. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 770–774. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3787-z
8. Sergeev I. N. Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, issue 1, pp. 20–24. https://doi.org/10.3103/S0027132219010042
9. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solutions of linear differential equations: I, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. https://doi.org/10.1134/S0012266116100013

10. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solutions of linear differential equations: II, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. https://doi.org/10.1134/S0012266116120016
11. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. https://doi.org/10.1134/S0012266116040029
12. Barabanov E. A., Vaidzelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equations, *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian). https://doklady.belnauka.by/jour/article/view/8?locale=en
13. Vaidzelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, issue 1, pp. 28–32 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
14. Vaidzelevich A. S. Existence of the infinite everywhere discontinuous upper spectra of characteristic frequencies of zeros and signs of linear differential equations, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2015, no. 3, pp. 17–23 (in Russian). https://vestifm.belnauka.by/jour/article/view/108/0
15. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, issue 2, pp. 155–167. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7
16. Stash A. Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 558–568 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190407
17. Stash A. Kh. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 59–69 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210105
18. Sergeev I. N. Metrically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1661–1662 (in Russian).
19. Sergeev I. N. Topologically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1567–1568 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18059336
20. Stash A. Kh. On essential values of frequencies of solutions of the third order linear differential periodic equation, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, 2014, issue 3 (142), pp. 33–44 (in Russian).
21. Sergeev I. N. *Differentsial'nye uravneniya* (Differential equations), Moscow: Izdatel'skii tsentr "Akademiya", 2013.

Received 09.01.2023

Accepted 25.01.2023

Aidamir Khazretovich Stash, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Adyghe State University, Caucasus Mathematical Center at Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Citation: A. Kh. Stash. On essential values of Sergeev's frequencies and exponents of oscillation for solutions of a third-order linear differential periodic equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 141–155.