МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 569–592.

УДК 519.8

© *А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ «НА УЗКИЕ МЕСТА» С РЕСУРСНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача о допустимой маршрутизации системы циклов, каждый из которых включает внешнее перемещение и работы, связанные с посещением мегаполисов (непустых конечных множеств). В исходной постановке задано ограничение ресурсного характера, которое должно соблюдаться на каждом цикле в процессе перемещений. Условия разрешимости в данной задаче связываются с экстремумом вспомогательной задачи маршрутизации «на узкие места» без упомянутого ограничения, в которой используется аппарат широко понимаемого динамического программирования. Частным случаем постановки является известная задача курьера «на узкие места», которая, в частности, может использоваться, как представляется, для целей прокладывания маршрутов транспортного средства (самолет, вертолет), имеющего целью осуществить заданную систему перевозок с ограниченным на каждом перелете запасом топлива. Построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

DOI: 10.35634/vm220406

Введение

В приложениях, связанных с транспортными задачами, возникает задача об осуществимости заданной системы перевозок между различными пунктами при ресурсных ограничениях на каждое перемещение. Это может, например, касаться вопросов осуществимости самолетом или вертолетом системы перелетов с обязательной реализацией заданной системы перевозок. При этом приходится учитывать ограничение на запас топлива при выполнении каждого перелета; какие-то перелеты могут при этом оказаться недопустимыми с точки зрения данного ограничения. Возникает естественный вопрос: а существует ли маршрут, пригодный для реализации всех перевозок и, одновременно, допустимый с точки зрения упомянутых ресурсных ограничений.

Представляется естественным следующий подход к решению: мы «отменяем» ресурсные ограничения и решаем задачу оптимизации маршрутов в рамках схемы «на узкие места». При этом показатели, используемые в исходной постановке на этапе соблюдения ограничений, становятся объектами оптимизации. Если при этом экстремум критерия не нарушает «допуск» в исходной задаче, то наша основная задача с ресурсными ограничениями разрешима и, находя оптимальное решение для вспомогательной задачи, мы получаем допустимый маршрут. Если же происходит нарушение «допуска» (экстремумом вспомогательной задачи), то наша исходная задача неразрешима и следует осуществить коррекцию ее условий: например, предусмотреть использование самолета или вертолета с бóльшим запасом топлива.

Мы расматриваем в статье более общую постановку, ориентируясь на применение аппарата широко понимаемого динамического программирования (ДП) в духе [1, гл. 3]. В рамках данной постановки требуется последовательная реализация системы своеобразных циклов, каждый из которых предусматривает посещение мегаполиса и выполнение некоторых работ, связанных с данным посещением. При этом по каждому циклу требуется «уложиться» в допуск. Первый вопрос здесь, как и в упомянутой конкретной задаче, состоит в самой осуществимости реализации циклов при наличии заданных условий предшествования. Как и в упомянутой частной задаче, для целей решения предлагается отказаться от допусков и решать задачу оптимизации, включающую в нашем общем случае собственно маршрут (перестановку индексов), траекторию и точку старта. Получающийся при этом триплет называем далее маршрутным процессом, следуя [2]. Важно отметить, что особенностью данной задачи является применение на этапе оптимизации постановки «на узкие места». Основной метод решения мы связываем с идеями ДП.

Итак, существенный элемент решения во всех случаях связан с задачами экстремальной маршрутизации с неаддитивным агрегированием затрат. Естественным прототипом этих задач является известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК); см. [3–11] и др. В этой связи отметим вариант ЗК в задаче «на узкие места»; см. [12]. Вместе с тем в задачах экстремальной маршрутизации, рассматриваемых в настоящей статье, возникают существенные особенности не только количественного, но и качественного характера. Прежде всего это касается ограничений; в частности, следует отметить условия предшествования, которые играют важную роль во многих прикладных задачах с элементами маршрутизации. В связи с исследованием этих вопросов наряду с [1], отметим [13, 14] (имеется целый ряд других работ авторов). Мы следуем подходу [13, 14] и рассматриваем весьма общую задачу об оптимальной маршрутизации систем циклов. Данная задача является по смыслу вспомогательной по отношению к постановке о реализации системы циклов в классе маршрутных процессов с заданным допуском на затраты для каждого цикла. Затем, как частный случай, исследуется вариант задачи курьера (см. [6–8]) «на узкие места», которая может быть применена, как представляется, для целей прокладывания маршрутов в транспортной авиации. В этих построениях важную роль играет схема на основе ДП (см. [1, гл. 3], [13, 14]).

§ 1. Общие понятия и обозначения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого суть множества. Если p и q — объекты, то через $\{p;q\}$ обозначаем непустое множество, содержащее p, q и не содержащее никаких других элементов. Если же m — объект, то в виде $\{m\} \triangleq \{m;m\}$ имеем синглетон, содержащий $m\colon m \in \{m\}$. Множества — суть объекты, а потому для всяких двух объектов y и z обозначаем, следуя [15, с. 67], через (y,z) упорядоченную пару (УП) с первым элементом y и вторым элементом z: $(y,z) \triangleq \{\{y\};\{y;z\}\}$ (см. в [15, гл. II, § 3, теорема 4] основное свойство УП). Если h есть УП (каких-то объектов), то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Если же x, y и z — три объекта, то $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$ есть (упорядоченный) триплет с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z. В этой связи напомним, что (см. [16, с. 17]) для всяких трех множеств A, B и C имеем $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; при $x \in A \times B$ и $y \in C$, следовательно, $(x,y) \in A \times B \times C$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H, через $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ — семейство всех непустых п/м H, а через $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных п/м H (ясно, что $\mathrm{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$). Для любых двух непустых множеств A и B через B^A обозначаем (см. [15, гл. II]) множество всех отображений (функций) из A в B; при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a. Если же A и B — непустые множества, $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \triangleq \{h(x)\colon x \in C\}$ есть образ C

при действии h; $h^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Для непустых множеств A, B и C, отображения $g \in C^{A\times B}$, точек $a \in A$ и $b \in B$ полагаем, как обычно, $g(a,b) \triangleq g((a,b))$, учитывая, что $(a,b) \in A \times B$. Если же A, B, C и D — непустые множества, $h \in D^{A\times B\times C}$, $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$, то определено значение $h(\mu,\nu) \in D$, для которого используем также соглашение $h(\mu_1,\mu_2,\nu) \triangleq h(\mu,\nu)$, где $\mu_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\mu)$. Данные правила используются в дальнейшем без дополнительных пояснений.

В дальнейшем $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ и

$$\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant k)\&(k \leqslant q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, в частности, что $\overline{1,0} = \varnothing$ и $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [17, с. 87] дискретного промежутка $\overline{1,|K|}$ на K (в частности, $(\mathrm{bi})[K]$ определено при $K \in \mathcal{P}'(S)$, где S — непустое конечное множество). Перестановка непустого множества A есть [17, с. 87] биекция A на себя; если α — перестановка A, то определена перестановка α^{-1} множества A, обратная к α:

$$\alpha(\alpha^{-1}(a)) = \alpha^{-1}(\alpha(a)) = a \quad \forall a \in A.$$

Как обычно, полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$. Непустому множеству S сопоставляем множество $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$ всех неотрицательных вещественнозначных функций на S.

§ 2. Общая постановка задачи

Фиксируем непустое множество X и его (непустое конечное) п/м $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$. Элементы X^0 будут использоваться в качестве стартовых точек для перемещений, осуществляемых в X. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geqq 2$, множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ \ldots, \ M_N \in \mathrm{Fin}(X) \tag{2.1}$$

являются (в общей задаче) объектами посещения, для которых

$$(M_p \cap M_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\})\&(X^0 \cap M_j = \varnothing \quad \forall j \in \overline{1,N}). \tag{2.2}$$

Условия (2.2) типичны для многих инженерных приложений. Кроме того (см. (2.1)), фиксируем отношения (см. [15, гл. II])

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ \ldots, \ \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N); \tag{2.3}$$

УП из $\mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, определяют в виде своих элементов пункты прибытия в M_j и отправления из M_j. Мы рассматриваем дискретные процессы вида

$$\begin{gathered}(x \in X^0) \to (\mathrm{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \\ \ldots \to (\mathrm{pr}_1(z_N) \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_N) \in M_{\alpha(N)}),\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \ \ldots, \ z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}, \tag{2.5}$$

где $x \in X^0$ и α — перестановка дискретного интервала $\overline{1,N}$, выбор которой может быть стеснен условиями предшествования. При этом в (2.4), (2.5) мы можем выбирать точку старта x, маршрут (перестановку индексов) α и траекторию $z_1,\ldots,z_N$, согласованную с маршрутом. В (2.4) естественным образом выделяется N циклов, каждый из которых включает (внешнее) перемещение к мегаполису и выполнение работ, связанных с его посещением и именуемых далее внутренними.

Пусть $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. В связи с условиями предшествования введем множество $\mathbf{K} \in \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$ специальных УП, именуемых адресными. Мы полагаем, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\, \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_0. \tag{2.6}$$

В прикладных задачах условие (2.6) обычно выполняется (см. обсуждение в [18, часть 2]). При этом (см. [18, (3.12), (3.14)])

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}), \tag{2.7}$$

то есть $\mathbf{A} \neq \varnothing$ и $\mathbf{A} \subset \mathbb{P}$; итак, (2.7) есть множество всех допустимых по предшествованию ($\mathbf{K}$-допустимых) маршрутов. Наряду с $\mathbf{A}$ будут введены частичные допустимые маршруты. Для этого прежде всего введем оператор вычеркивания (заданий из списка). Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Тогда

$$\mathbf{I} \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N} \tag{2.8}$$

определяем [18, часть 2] условиями: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Xi[K]\}, \tag{2.9}$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Корректность определения (2.8), (2.9) обоснована в [18, часть 2]. Если $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем (см. [18, 19]), что

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{s, |K|})) \ \ \forall s \in \overline{1, |K|}\}, \tag{2.10}$$

получая, в частности, цепочку равенств

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}] = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{s,N})) \ \ \forall s \in \overline{1,N}\}. \tag{2.11}$$

Отметим также, что [18, (2.2.54)] $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing \ \ \forall K \in \mathfrak{N}$. Итак, частичные допустимые (по вычеркиванию) маршруты существуют. Отметим что, как видно из (2.4), (2.5), выбор маршрута (перестановки индексов) еще не определяет однозначно течение процесса. В этой связи введем далее в рассмотрение траектории, согласованные с маршрутами. Однако, сначала отметим некоторые вспомогательные понятия. Так (см. (2.3)) имеем при $j \in \overline{1,N}$

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)) \& (\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)); \tag{2.12}$$

элементы $\mathfrak{M}_j$ — суть возможные пункты прибытия в мегаполис M_j, а элементы $\mathbf{M}_j$ — возможные пункты отправления из M_j. Далее с учетом (2.1) имеем, конечно, что при $j \in \overline{1,N}$

$$(\mathfrak{M}_j \in \mathrm{Fin}(X)) \& (\mathbf{M}_j \in \mathrm{Fin}(X)).$$

Тогда, как следствие, имеем с очевидностью, что

$$(\tilde{\mathbb{X}} \triangleq \bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X)) \& (\mathbf{X} \triangleq (\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X)). \tag{2.13}$$

Через $\mathfrak{Z}$ обозначаем множество всех кортежей $(z_t)_{t\in\overline{0,N}}: \overline{0,N} \to X \times X$; иными словами $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0,N}}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ имеем

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] = \{(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \ \ \forall \tau \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}) \tag{2.14}$$

(пучок траекторий, стартующих из x и согласованным с маршрутом α). Тогда при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$ и $\tau \in \overline{1,N}$

$$(\mathrm{pr}_1(z_\tau) \in \mathfrak{M}_{\alpha(\tau)})\&(\mathrm{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{M}_{\alpha(\tau)}). \tag{2.15}$$

Из (2.15) вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$ и $\tau \in \overline{1,N}$

$$\mathrm{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X}. \tag{2.16}$$

Далее, введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{X} \triangleq \tilde{\mathbb{X}} \cup X^0 = X^0 \cup (\bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i). \tag{2.17}$$

Тогда $\mathbb{X} \in \mathrm{Fin}(X)$. При этом согласно (2.14) имеем при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$ и $\tau \in \overline{0,N}$

$$\mathrm{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X} \tag{2.18}$$

(заметим, что $\mathbb{X}$ (2.17) соответствует [14, раздел 2]). Поэтому для

$$\mathbf{Z} \triangleq (\mathbb{X} \times \mathbf{X})^{\overline{0,N}} \tag{2.19}$$

(обозначение совпадает с используемым в [14, раздел 2]) имеем, что при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] \subset \mathbf{Z} \subset \mathfrak{Z}. \tag{2.20}$$

В этом случае согласно (2.14) и (2.20) при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] = \{(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathbf{Z} \mid (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \ \forall \tau \in \overline{1,N})\}, \tag{2.21}$$

(2.14) согласуется с [14, (2.7)]; при этом

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Z}) \ \ \forall x \in X^0 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.22}$$

Если $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем, что $\mathfrak{Z}_K \triangleq (X \times X)^{\overline{0,|K|}}$; если при этом $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то

$$\mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x] \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_K \mid (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,|K|})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}_K). \tag{2.23}$$

Заметим, что при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$

$$(z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,|K|}). \tag{2.24}$$

Напомним, что (см. (2.13)) $X^0 \subset \mathbf{X}$. При этом

$$(x,x) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \ \ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{2.25}$$

Далее, из (2.12) следует, что

$$\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j \quad \forall j \in \overline{1, N}. \tag{2.26}$$

С учетом (2.13) и (2.26) получаем, что

$$\mathbb{M}_j \subset \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X} \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Как следствие, с учетом (2.17), имеем

$$\mathbb{M}_j \subset \mathbb{X} \times \mathbf{X} \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Поэтому, согласно (2.24), при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ и $t \in \overline{1, |K|}$

$$z_t \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}. \tag{2.27}$$

В силу (2.23)–(2.25), (2.27) получаем, что при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ множество $\mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ соответствует [14, (2.8)]. Введем в рассмотрение при $x \in X^0$ множество

$$\mathbf{D}[x] \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]\} = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathfrak{Z}), \tag{2.28}$$

а также, при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ множество

$$\mathbf{D}_K[x] \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathfrak{Z}_K \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]\} \in \mathrm{Fin}((\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathfrak{Z}_K). \tag{2.29}$$

В связи с (2.28) полезно отметить связь с (2.29). Будем при этом учитывать (2.11). Кроме того, в (2.29) можно в частности, рассматривать случай, когда $x \in X^0$ и $K = \overline{1, N}$ (см. (2.13)); в этом случае при $\alpha \in \mathbf{A}$ имеем (см. (2.11))

$$\mathfrak{Z}_{\overline{1,N},\alpha}[x] = \{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_{\overline{1,N}} \mid (z_0 = (x, x)) \\ \&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N})\} = \{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x, x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N})\},$$

поскольку $\mathfrak{Z}_{\overline{1,N}} = \mathfrak{Z}$. Как следствие (см. (2.14)) имеем при $x \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in \mathbf{A}$

$$\mathfrak{Z}_{\overline{1,N},\alpha}[x] = \mathfrak{Z}_\alpha[x]. \tag{2.30}$$

Далее, из (2.11), (2.28) и (2.30) вытекает, что при $x \in X^0$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\overline{1,N}}[x] = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1, N}] \times \mathfrak{Z}_{\overline{1,N}} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_{\overline{1,N},\alpha}[x]\} = \\ = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]\} = \mathbf{D}[x]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Итак, мы истолковали множество (2.28) как вариант (2.29). Рассмотрим вопрос о функциях стоимости, учитывая (2.13). Итак, пусть

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \tilde{\mathbb{X}} \times \mathfrak{N}], \ c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \ \ldots, \ c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_N \times \mathfrak{N}]; \tag{2.32}$$

мы используем значения $\mathbf{c}$ для оценивания внешних перемещений, а значения функций $c_1, \ldots, c_N$ — для оценивания внутренних работ. Заметим, что согласно (2.12) и (2.24) при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ и $t \in \overline{1, |K|}$

$$(\mathrm{pr}_1(z_t) \in \mathfrak{M}_t)\&(\mathrm{pr}_2(z_t) \in \mathbf{M}_t). \tag{2.33}$$

Тогда, в частности, получаем (см. (2.13)), что при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ и $\tau \in \overline{0,|K|}$

$$\mathrm{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X}. \tag{2.34}$$

С другой стороны, из (2.13) и (2.33) имеем при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ и $\tau \in \overline{1,|K|}$

$$\mathrm{pr}_1(z_\tau) \in \tilde{\mathbb{X}}. \tag{2.35}$$

Тогда в силу (2.32), (2.34) и (2.35) имеем, что при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ и $t \in \overline{0,|K|-1}$ определено

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \alpha^1(\overline{t+1,|K|})) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.36}$$

Кроме того, в силу (2.24) и (2.32) имеем при тех же условиях на K, x, α, $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}$ и $t \in \overline{0,|K|-1}$, что определено значение

$$c_{\alpha(t+1)}(z_{t+1}, \alpha^1(\overline{t+1,|K|})) \in \mathbb{R}_+.$$

В итоге (см. (2.36)) определено при $K \in \mathfrak{N}$, $x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{Z}_{K,\alpha}[x]$ значение

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}] = \\ = \max_{t\in\overline{0,|K|-1}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \alpha^1(\overline{t+1,|K|})) + c_{\alpha(t+1)}(z_{t+1}, \alpha^1(\overline{t+1,|K|}))] \in \mathbb{R}_+;\end{gathered} \tag{2.37}$$

ясно, что при вышеупомянутых $K \in \mathfrak{N}$ и $x \in \mathbf{X}$ значение (2.37) может быть сопоставлено каждому решению $(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}_K[x]$. Используя (2.29), вводим при $K \in \mathfrak{N}$ и $x \in \mathbf{X}$ задачу

$$\mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}] \to \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}_K[x]. \tag{2.38}$$

Здесь мы имеем частный случай конструкции [14, раздел 2]. Задаче (2.38) сопоставляется экстремум и непустое множество оптимальных решений. Итак, при $K \in \mathfrak{N}$ и $x \in \mathbf{X}$ имеем, что

$$v(x, K) \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}})\in\mathbf{D}_K[x]} \mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.39}$$

$$\mathbf{D}_K^{\mathrm{opt}}[x] \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}) \in \mathbf{D}_K[x] \mid \mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[(z_t)_{t\in\overline{0,|K|}}] = v(x, K)\} \in \mathrm{Fin}[\mathbf{D}_K[x]]. \tag{2.40}$$

Задачу (2.38), отвечающую случаю $K = \overline{1,N}$ и $x \in X^0$, выделяем для отдельного рассмотрения; имеется в виду задача

$$\mathfrak{B}_{\overline{1,N}}^{(\alpha)}[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}_{\overline{1,N}}[x]. \tag{2.41}$$

В этой связи введем ряд новых обозначений. Прежде всего напомним, что (см. (2.11), (2.31))

$$(\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}])\&(\mathbf{D}[x] = \mathbf{D}_{\overline{1,N}}[x] \ \ \forall x \in X^0).$$

Далее, из (2.13), (2.30) и (2.37) следует, в частности, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\overline{1,N}}[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \\ = \max_{t\in\overline{0,N-1}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \alpha^1(\overline{t+1,N})) + c_{\alpha(t+1)}(z_{t+1}, \alpha^1(\overline{t+1,N}))] = \\ \max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))] \in \mathbb{R}_+.\end{gathered} \tag{2.42}$$

Мы фиксируем $\mathbf{d} \in \mathbb{R}_+$ в качестве своеобразного допуска на величину затрат при последовательном выполнении циклов работ. Иными словами, нас интересует вопрос о том, существует ли маршрутный процесс $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}, x)$, где $\alpha \in \mathbf{A}$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$ и $x \in X^0$, для которого

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N})) \leqslant \mathbf{d} \ \ \forall t \in \overline{1,N}. \tag{2.43}$$

Для выяснения этой возможности мы привлекаем экстремальную задачу маршрутизации.

Замечание 1. В связи с (2.43) заметим, что в [14] рассматривалась более общая постановка, включающая, наряду с определением функций (2.32) еще и положительный «инфляционный» параметр $\mathbf{a}$. Последний может сыграть полезную роль в задаче о выполнимости серии комплексных работ следующего типа. Предположим, что требуется осуществить N комплексных работ, включающих каждая компоненту внешних перемещений к месту выполнения и собственно работу. По существу речь идет о циклах. Для реализации каждого из циклов выделяется финансирование, объем которого характеризуется параметром $\mathbf{d}$. Циклы работ выполняются последовательно во времени, а очередность может выбираться «исполнителем». Возникает вопрос: существует ли вариант маршрутизации, обеспечивающий выполнение всех циклов при данном объеме финансирования $\mathbf{d}$ на каждом этапе? В этой связи применение параметра $\mathbf{a}$ может позволить учитывать некоторые моменты, связанные с изменением стоимостей работ в течении обозримого промежутка времени. В настоящем изложении мы не используем упомянутый «инфляционный» параметр по соображениям большей наглядности (учет этого параметра в рамках схемы [14] не составляет труда). $\square$

Введем в рассмотрение маршрутные процессы в полной задаче: имеем в виде

$$\mathbb{D} \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \times X^0) \tag{2.44}$$

непустое множество допустимых маршрутных процессов. Наша основная цель состоит в проверке свойства (2.43) для элементов множества (2.44). Для достижения этой цели вводим экстремальную задачу

$$\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbb{D}, \tag{2.45}$$

которой сопоставляется экстремум $\mathbb{V}$ и непустое множество $\mathbf{SOL}$ всех оптимальных решений:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}},x)\in\mathbb{D}} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \min_{x\in X^0} \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}[x]} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.46}$$

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{D}); \tag{2.47}$$

элементы (2.47) — оптимальные маршрутные процессы и только они. С задачей (2.45) связываем также x-задачи, где $x \in X^0$:

$$\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x]; \tag{2.48}$$

задаче (2.48) также сопоставляется экстремум $V[x]$ и непустое множество $(\mathbf{SOL})[x]$ всех ее оптимальных решений:

$$V[x] \triangleq \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}[x]} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{Z}_\alpha[x]} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.49}$$

$$(\mathbf{SOL})[x] \triangleq \{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x] \mid \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = V[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}[x]). \tag{2.50}$$

Наконец, логично ввести в рассмотрение задачу оптимизации точки старта:

$$V[x] \to \min, \quad x \in X^0, \tag{2.51}$$

для которой экстремум совпадает (см. (2.46), (2.49)) с $\mathbb{V}$ (то есть $\mathbb{V}$ есть наименьшее из значений $V[x]$, $x \in X^0$) и при этом

$$X^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x \in X^0 \mid V[x] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(X^0). \tag{2.52}$$

Задачи (2.48) и (2.51) являются вспомогательными к (2.45). В силу (2.31) задачи (2.41) и (2.48) отождествимы.

Вернемся к (2.38)–(2.40), где допустимо полагать, что $K = \overline{1,N}$. В этой связи напомним (2.31) и (2.42). Тогда в силу (2.39) и (2.49) получаем при $x \in X^0$, что

$$v(x,\overline{1,N}) = \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}[x]} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = V[x]. \tag{2.53}$$

Далее, из (2.31), (2.40), (2.42) и (2.53) следует, что при $x \in X^0$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\mathrm{opt}}_{\overline{1,N}}[x] &= \{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x] \mid \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = v(x,\overline{1,N})\} = \\ &= \{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x] \mid \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = V[x]\} = (\mathbf{SOL})[x]. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Итак, при $K = \overline{1,N}$ наши локальные задачи вырождаются в глобальные (имеются в виду задачи с фиксированной точкой старта). Наконец, следуя [14, (2.18)], полагаем, что

$$v(x,\varnothing) \triangleq 0 \ \ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{2.55}$$

С учетом (2.39), (2.55) мы получаем теперь функцию $v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})]$, определяемую посредством (2.39), (2.55). Используя схему [14, теорема 1] (см. также аналогичное положение в [13]), получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),K) + c_j(z,K); v(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\})\}).$$

§ 3. Слои функции Беллмана и оптимальные решения задач маршрутизации

В этом параграфе воспроизводятся фактически построения [14, § 3] (экономичный вариант ДП) в достаточно краткой форме. Отметим прежде всего очевидное следствие теоремы 1 (см. (2.53)): при $x \in X^0$

$$V[x] = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in\mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}) + c_j(z,\overline{1,N}); v(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})\}); \tag{3.1}$$

в этой связи отметим также [14, (3.1)].

Введем в рассмотрение существенные (в смысле условий предшествования) списки заданий. Пусть

$$\mathfrak{S} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}; \tag{3.2}$$

множества — элементы (3.2) — называем существенными списками (заданий). Кроме того, при $s \in \overline{1,N}$ полагаем, что $\mathfrak{S}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{S} \mid s = |K|\}$ (семейство всех s-элементных существенных списков). В виде $\{\mathfrak{S}_k \colon k \in \overline{1,N}\}$ имеем разбиение $\mathfrak{S}$ (3.2). Легко видеть, что $\mathfrak{S}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1,N}$) и при $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbf{K}\}$ реализуется $\mathfrak{S}_1 = \{\{t\} \colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$ (семейство всех синглетонов «неотправителей»). Наконец (см. [20])

$$\mathfrak{S}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} \colon K \in \mathfrak{S}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2,N} \tag{3.3}$$

(в связи с (3.3) см. также [18, предложение 4.9.1]); получили рекуррентную процедуру

$$\mathfrak{S}_N \to \mathfrak{S}_{N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}_1. \tag{3.4}$$

На основе семейств (3.4) определяем (см. конструкцию [18, раздел 4.9]) слои пространства позиций (позициями называем УП (x,K), $x \in X$, $K \subset \overline{1,N}$), обозначаемые в виде $D_0, D_1, \ldots, D_N$. В терминах множества

$$\tilde{\mathcal{M}} \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_j$$

определяем $D_0 \triangleq \tilde{\mathcal{M}} \times \{\varnothing\} = \{(x,\varnothing) \colon x \in \tilde{\mathcal{M}}\}$; полагаем, кроме того,

$$D_N \triangleq X^0 \times \{\overline{1,N}\} = \{(x,\overline{1,N}) \colon x \in X^0\}.$$

Если же $s \in \overline{1,N-1}$, то при $K \in \mathfrak{S}_s$ последовательно определяем

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}\},\\ \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j, \mathbb{D}_s[K] \triangleq \mathcal{M}_s[K] \times \{K\} = \{(x,K) \colon x \in \mathcal{M}_s[K]\};\end{gathered} \tag{3.5}$$

после этого полагаем, что

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s} \mathbb{D}_s[K]. \tag{3.6}$$

Тогда (см. [18, раздел 4.9], [20]) $D_0 \neq \varnothing$, $D_1 \neq \varnothing$, $\ldots$, $D_N \neq \varnothing$; при $s \in \overline{1,N}$ имеем, что $D_s \subset \mathbf{X} \times \mathfrak{S}_s$. Заметим, что при $s \in \overline{0,N}$ и $(x,K) \in D_s$ определено значение $v(x,K) \in \mathbb{R}_+$. Поэтому определены сужения функции v на упомянутые слои. С учетом этого полагаем, что при $s \in \overline{0,N}$ функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ есть сужение v на (непустое) множество D_s:

$$v_s(x,K) \triangleq v(x,K) \ \ \forall (x,K) \in D_s. \tag{3.7}$$

Данные функции можно, однако, построить посредством рекурентной процедуры. Действительно, согласно (2.55) и (3.7) имеем по определению D_0, что

$$v_0(x,K) = 0 \ \ \forall (x,K) \in D_0. \tag{3.8}$$

Итак, v_0 есть функция на D_0, тождественно равная нулю. Далее, отметим, что согласно (2.53) и (3.7) $v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$ такова, что

$$v_N(x, \overline{1,N}) = V[x] \;\; \forall x \in X^0. \tag{3.9}$$

Напомним, что (см. [19, (6.11)]) при $s \in \overline{1,N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{3.10}$$

Из теоремы 1, (3.7) и (3.10) вытекает следующее предложение (см. [14, (3.6)]).

Предложение 1. *Если* $s \in \overline{1,N}$ *и* $(x, K) \in D_s$, *то*

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + \mathbf{c}_j(z, K); v_{s-1}(pr_2(z), K \setminus \{j\})\}).$$

Предложение 1 определяет при $s \in \overline{1,N}$ преобразование $v_{s-1} \to v_s$. С учетом (3.8) получаем рекуррентную процедуру

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N; \tag{3.11}$$

финальная функция v_N определяет (см. (3.9)) функцию экстремума

$$V[\cdot] \triangleq (V[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]; \tag{3.12}$$

точнее $V[x] = v_N(x, \overline{1,N})$ при $x \in X^0$. Данное свойство функции (3.12) позволяет определить $\mathbb{V}$ и $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$ (ясно, что $\mathbb{V}$ есть наименьшее из значений $v_N(x, \overline{1,N})$, $x \in X^0$). Мы получаем возможность сравнить $\mathbb{V}$ и $\mathbf{d}$. Вполне очевидно следующее предложение.

Предложение 2. *Маршрутный процесс* $(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0,N}}, x) \in \mathbb{D}$ *со свойством* (2.43) *существует тогда и только тогда, когда* $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$.

Замечание 2. На этапе определения $\mathbb{V}$ и x^0 достаточно использовать следующий вариант (3.11): если $s \in \overline{2,N}$, то для построения v_s достаточна функция v_{s-1}, а функции $v_0, \ldots, v_{s-2}$ не требуются. После построения v_s при $s < N$ для целей построения v_{s+1} массив значений v_{s-1} следует заменить массивом значений v_s. Итак, в памяти вычислителя достаточно сохранять (при определении $\mathbb{V}$ и x^0) массив значений только одного слоя функции Беллмана, что доставляет [21] некоторую экономию ресурсов памяти. На этапе проверки реализуемости (2.43) это построение вполне достаточно (процедура с перезаписью слоев функции Беллмана). В связи с упомянутой возможностью отметим работу [22], где рассматривалась несколько иная задача. □

§ 4. Построение оптимального решения

В этом параграфе рассматривается построение оптимального маршрутного процесса, то есть построение элемента множества (2.47). С точки зрения реализации (2.43) это имеет смысл в ситуации $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$; тогда конкретная версия маршрутного процесса в (2.43) может быть найдена как оптимальное решение задачи (2.45). Итак, рассмотрим вопрос о построении маршрутного процесса из множества (2.47). При этом предполагается, что построены все функции, участвующие в (3.11); массивы их значений должны находиться в памяти вычислителя (мы должны отказаться от варианта с перезаписью слоев в замечании 2).

Предполагаем, что определено значение $\mathbb{V}$ и точка $x^0 \in X^0_{\mathbf{opt}}$ (для этих целей достаточно знания v_N). Итак, $x^0 \in X^0$ и при этом $v_N(x^0, \overline{1,N}) = V[x^0] = \mathbb{V}$. Из предложения 1 следует поэтому, что

$$\mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}). \tag{4.1}$$

Поскольку точка старта выбрана, мы можем воспользоваться процедурой [1, раздел 3.5] (см. также [13]), которую сейчас обсудим совсем кратко. Полагаем, что $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$, получая УП из $X^0 \times X^0$ и, в частности, из $\mathbf{X} \times \mathbb{X}$. С учетом (4.1) находим индекс $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и УП $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$ со свойством

$$\mathbb{V} = \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}); v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})\}) \tag{4.2}$$

(см. [1, (3.5.3)]). В силу (3.10) имеем свойство $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$ (поскольку $(x^0, \overline{1,N}) \in D_N$), а тогда применяем предложение 1:

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; j\})\}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

С учетом (4.3) выбираем индекс $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и УП $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$, для которых

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

При этом согласно (3.10) реализуется включение $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{N-2}$. Тогда (см. [1, (3.5.9)]) имеем в силу (4.2), (4.4) цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{V} = \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}); \sup(\{\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\})\}) = \\ = \sup(\sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}); \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})\}); v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}) = \\ = \sup(\{\max_{i \in \overline{1,2}}(\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(i-1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(i)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_j \colon j \in \overline{1,i-1}\}) + \\ + c_{\eta_i}(\mathbf{z}^{(i)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_j \colon j \in \overline{1,i-1}\})); v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_j \colon j \in \overline{1,2}\})\}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

В связи с (4) отметим, что случай $N = 2$ подробно обсуждается в [1, замечание 3.5.1]: в этом случае из (4) следует, что

$$\begin{gathered} \mathbb{V} = \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}); \\ \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})\}), \end{gathered}$$

а $((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,2}}, x^0) \in \mathbf{SOL}$ (учитываем оптимальность x^0).

Возвращаясь к общему случаю $N \geqslant 2$, отметим, что процедуры решения локальных задач, подобных (4.1) и (4.3) (см. в этой связи (4.2) и (4.4)) следует продолжать вплоть до исчерпывания $\overline{1,N}$. В итоге (см. [1, с. 96]) будут построены маршрут

$$\eta = (\eta_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$$

и согласованная с ним траектория

$$(\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\eta[x^0],$$

для которых справедливо равенство

$$\mathfrak{B}_\eta[(\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}. \tag{4.6}$$

В силу (2.28) $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}[x^0]$, а тогда (см. (2.44))

$$(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}, x^0) \in \mathbb{D}.$$

Поэтому из (4.6) вытекает (см. (2.47)) требуемое свойство оптимальности:

$$(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}. \tag{4.7}$$

При $\mathbb{V} \leqslant \mathbf{d}$ оптимальный маршрутный процесс (4.7) реализует, как уже отмечалось, нужный вариант неравенств (2.43).

§ 5. Задача курьера на узкие места

Вернемся теперь к задаче, связанной на идейном уровне с движением воздушного транспорта и намеченной во введении. Мы будем рассматривать ее как очень частный случай задачи (2.45). Итак, мы полагаем далее, что

$$m_1 \in X, \ \ldots, \ m_N \in X \tag{5.1}$$

и при этом $M_j = \{m_j\} \quad \forall j \in \overline{1,N}$. Итак, мы заменяем мегаполисы «городами», как это принято в ЗК. Мы сохраняем, однако, $\mathbf{K}$ со свойством (2.6), приходя по сути дела к задаче курьера [6–8]. В согласии с (2.2) мы полагаем, что точки (5.1) попарно различны ($m_i \neq m_j$ при $i \neq j$) и не содержатся в X^0. В отношении (2.3) заметим, что при $j \in \overline{1,N}$ в нашем случае

$$\mathbb{M}_j = \{(m_j, m_j)\}. \tag{5.2}$$

Схема (2.4) сводится в данном случае к следующей (система «перелетов»)

$$(x \in X^0) \to m_{\alpha(1)} \to \ldots \to m_{\alpha(N)}, \tag{5.3}$$

где $\alpha \in \mathbf{A}$. Итак, мы сохраняем множество $\mathbf{A}$ маршрутов, допустимых по предшествованию. В условия предшествования здесь может вкладываться следующее содержание: при $\mathbf{n} \triangleq |\mathbf{K}| \in \mathcal{N}$ УП $(\mu_1, \nu_1) \in \mathbf{K}, \ \ldots, \ (\mu_\mathbf{n}, \nu_\mathbf{n}) \in \mathbf{K}$, исчерпывающие $\mathbf{K}$, определяют систему заданий

$$\mu_1 \to \nu_1, \ldots, \mu_\mathbf{n} \to \nu_\mathbf{n} \tag{5.4}$$

по перевозке соответствующих грузов. Имеется в виду, что при каждом $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$ наш объект управления (ОУ), самолет или вертолет, должен при посещении «города» m_{μ_j} принять груз и доставить его в «город» m_{ν_j}. Это следует проделать для всех $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$ (итак, определена система заданий). Возможность выполнения заданий (5.4) в процессе «перелетов» (5.3) представляет основной вопрос дальнейшего исследования. Мы предполагаем заданным параметр $\mathbf{d} \in \mathbb{R}_+$, определяющий, как и в более общей постановке § 2, максимально возможный ресурс на каждом «перелете» в (5.3). Это ограничение, которое необходимо соблюдать.

Заметим, что в нашем случае (5.2) $\mathfrak{M}_j = \{m_j\}$ и $\mathbf{M}_j = \{m_j\}$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Поэтому $\tilde{\mathbb{X}}$ в (2.13) есть множество $\mathcal{M} \triangleq \{m_j \colon j \in \overline{1, N}\}$ всех «городов», подлежащих посещению; $\mathbf{X} = \mathcal{M} \cup X^0$. Мы сохраняем функцию $\mathbf{c}$ (2.32) при упомянутых $\mathcal{M}$ и $\mathbf{X}$; зависимость от списка заданий здесь также допускаем, хотя во многих практических задачах она отсутствует (эту зависимость мы также будем исключать на уровне вычислительного эксперимента). Функции $c_1, \ldots, c_N$ будем далее предполагать равными нулю тождественно. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$ система перемещений (5.3) характеризуется значением $\pi[x; \alpha] \in \mathbb{R}_+$, которое является наибольшим из $\mathbf{c}(x, m_{\alpha(1)}, \overline{1, N})$ и

$$\max_{t \in \overline{1, N-1}} \mathbf{c}(m_{\alpha(t)}, m_{\alpha(t+1)}, \alpha^1(\overline{t+1, N})) \in \mathbb{R}_+.$$

Этому определению удобно придать несколько иную форму, обращаясь к понятию траектории. Действительно, следуя идейно (5.3), сопоставим точке $x \in X^0$ и маршруту $\alpha \in \mathbf{A}$ траекторию

$$\mathbf{y}[x; \alpha] \colon \overline{0, N} \to X \tag{5.5}$$

по следующему правилу:

$$(\mathbf{y}[x; \alpha](0) \triangleq x) \& (\mathbf{y}[x; \alpha](t) \triangleq m_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1, N}). \tag{5.6}$$

С учетом (5.5) и (5.6) величину $\pi[x; \alpha]$ можно при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$ охарактеризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi[x; \alpha] &\triangleq \max_{t \in \overline{0, N-1}} \mathbf{c}(\mathbf{y}[x; \alpha](t), \mathbf{y}[x; \alpha](t+1), \alpha^1(\overline{t+1, N})) = \\ &= \max_{t \in \overline{1, N}} \mathbf{c}(\mathbf{y}[x; \alpha](t-1), \mathbf{y}[x; \alpha](t), \alpha^1(\overline{t, N})); \end{aligned} \tag{5.7}$$

$\pi[x; \alpha] \in \mathbb{R}_+$. Как и в случае (2.43), нас прежде всего интересует вопрос о том, а существуют ли $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$, для которых

$$\mathbf{c}(\mathbf{y}[x; \alpha](t), \mathbf{y}[x; \alpha](t+1), \alpha^1(\overline{t+1, N}) \leqslant \mathbf{d} \ \ \forall t \in \overline{0, N-1}; \tag{5.8}$$

введение критерия (5.7) и последующее использование его в экстремальной задаче является инструментом при проверке осуществимости (5.8). Итак, мы привлекаем экстремальную задачу

$$\pi[x; \alpha] \to \min, \quad x \in X^0, \ \alpha \in \mathbf{A}. \tag{5.9}$$

Данной задаче сопоставляется экстремум

$$\mathbf{v} \triangleq \min_{(x, \alpha) \in X^0 \times \mathbf{A}} \pi[x; \alpha] = \min_{x \in X^0} \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \pi[x; \alpha] \in \mathbb{R}_+ \tag{5.10}$$

и непустое множество $\mathbf{sol}$ всех оптимальных решений:

$$\mathbf{sol} \triangleq \{(x, \alpha) \in X^0 \times \mathbf{A} \mid \pi[x; \alpha] = \mathbf{v}\} \in \mathrm{Fin}(X^0 \times \mathbf{A}). \tag{5.11}$$

В то же время (5.10), (5.11) могут быть извлечены из построений предыдущих параграфов. Рассмотрим эти конструкции. Для этого мы прежде всего конкретизируем построение предыдущих параграфов для рассматриваемого сейчас случая (см. (5.1), (5.2)). Напомним, что при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$ из (2.14), (5.2) следует, что

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] = \{(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x,x))\&(z_\tau = (m_{\alpha(\tau)}, m_{\alpha(\tau)}) \ \ \forall \tau \in \overline{1,N})\}; \tag{5.12}$$

видно, что (5.12) — одноэлементное множество: единственным элементом (5.12) является отображение $\mathcal{Z}_\alpha[x] \in \mathfrak{Z}$, для которого

$$(\mathcal{Z}_\alpha[x](0) \triangleq (x,x))\&(\mathcal{Z}_\alpha[x](\tau) = (m_{\alpha(\tau)}, m_{\alpha(\tau)}) \ \ \forall \tau \in \overline{1,N}); \tag{5.13}$$

$\mathfrak{Z}_\alpha[x] = \{\mathcal{Z}_\alpha[x]\}$. Соответственно, из (2.28) получаем, что при $x \in X^0$

$$\mathbf{D}[x] = \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} = \mathcal{Z}_\alpha[x]\} = \{(\alpha, \mathcal{Z}_\alpha[x]) \colon \alpha \in \mathbf{A}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathfrak{Z}). \tag{5.14}$$

Далее, из (2.42) получаем, что справедлива цепочка равенств

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \max_{t\in\overline{0,N-1}} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \alpha^1(\overline{t+1,N})) = \\ = \max_{t\in\overline{1,N}} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) \in \mathbb{R}_+,\end{gathered}$$

где $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$. С учетом одноэлементности множеств $\mathfrak{Z}_\alpha[x]$, $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$, получаем теперь (см. (5.13)) следующее представление. При $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$ непременно $\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathfrak{B}_\alpha[\mathcal{Z}_\alpha[x]]$, а потому

$$\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \max_{t\in\overline{0,N-1}} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathcal{Z}_\alpha[x](t)), \mathrm{pr}_1(\mathcal{Z}_\alpha[x](t+1)), \alpha^1(\overline{t+1,N})). \tag{5.15}$$

В связи с (5.15) заметим, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $t \in \overline{0,N}$

$$(\mathrm{pr}_1(\mathcal{Z}_\alpha[x](t)) = \mathbf{y}[x;\alpha](t))\&(\mathrm{pr}_2(\mathcal{Z}_\alpha[x](t)) = \mathbf{y}[x;\alpha](t)). \tag{5.16}$$

В итоге из (5.15), (5.16) вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]$

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathfrak{B}_\alpha[\mathcal{Z}_\alpha[x]] = \\ = \max_{t\in\overline{0,N-1}} \mathbf{c}(\mathbf{y}[x;\alpha](t), \mathbf{y}[x;\alpha](t+1), \alpha^1(\overline{t+1,N})) = \pi[x;\alpha];\end{gathered} \tag{5.17}$$

мы учли (5.7), (5.15) и (5.16). В силу (2.49) и (5.17) получаем, что при $x \in X^0$

$$V[x] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{Z}_\alpha[x]} \mathfrak{B}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \mathfrak{B}_\alpha[\mathcal{Z}_\alpha[x]] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \pi[x;\alpha]. \tag{5.18}$$

Обсудим конкретную реализацию множества (2.44). Для этого напомним (5.14). Тогда (см. (2.44), (5.14))

$$\begin{gathered}\mathbb{D} \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (z_t)_{t\in\overline{0,N}} = \mathcal{Z}_\alpha[x]\} = \\ = \{(\alpha, \mathcal{Z}_\alpha[x], x) \colon (\alpha, x) \in \mathbf{A} \times X^0\}.\end{gathered} \tag{5.19}$$

Мы учитываем при этом, что согласно (2.28) при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}$

$$((\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}[x]) \Leftrightarrow (\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]).$$

Кроме того, согласно (2.46), (5.10) и (5.17) имеем цепочку равенств

$$\mathbb{V} = \min_{(\alpha,x)\in\mathbf{A}\times X^0} \mathfrak{B}_\alpha[\mathcal{Z}_\alpha[x]] = \min_{(\alpha,x)\in\mathbf{A}\times X^0} \pi[x;\alpha] = \mathbf{v}. \tag{5.20}$$

Итак, в нашем частном случае глобальный экстремум $\mathbb{V}$ определяется посредством (5.10). Рассмотрим представление множества (2.47): с учетом (5.17) и (5.19)

$$\begin{aligned}\mathbf{SOL} &= \{(\alpha, \mathcal{Z}_\alpha[x], x) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{B}_\alpha[\mathcal{Z}_\alpha[x]] = \mathbf{v}\} = \{(\alpha, \mathcal{Z}_\alpha[x], x) \in \mathbb{D} \mid \pi[x;\alpha] = \mathbf{v}\} \\ &= \{(\alpha, \mathcal{Z}_\alpha[x], x)\colon (x,\alpha) \in \mathbf{sol}\};\end{aligned} \tag{5.21}$$

итак, в нашем случае множество (2.47) полностью определяется посредством (5.11).

Рассмотрим вопрос о конкретизации процедуры (3.11) для рассматриваемого сейчас частного случая (см. (5.1), (5.3)). Мы сохраняем здесь процедуру (3.3), (3.4). Далее, в силу (5.2) имеем равенство

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{m_j \colon j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\},$$

где $\mathbf{K}_1$ соответствует § 3. Множества-слои D_0 и D_N определяются так же, как в § 3. Если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s$, то $\mathcal{J}_s(K)$ определяется правилом (3.5),

$$\mathcal{M}_s[K] = \{m_j \colon j \in \mathcal{J}_s(K)\}, \tag{5.22}$$

$\mathbb{D}_s[K]$ соответствует (3.5) при $\mathcal{M}_s[K]$, определяемом в (5.22). Слой D_s, где $s \in \overline{1,N-1}$, находится посредством (3.6). Далее мы ограничимся построением рекуррентной процедуры (3.11), где $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется в (3.8). С учетом (3.9) и (5.18) получаем для рассматриваемого случая, что

$$v_N(x, \overline{1,N}) = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \pi[x;\alpha] \quad \forall x \in X^0. \tag{5.23}$$

Тем самым определена функция $v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$. Напомним важное свойство (3.10) и отметим конкретизацию предложения 1: при $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$

$$v_s(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \sup(\{\mathbf{c}(x,m_j,K); v_{s-1}(m_j, K\setminus\{j\})\}); \tag{5.24}$$

правило (5.24) определяет преобразование v_{s-1} в v_s, а, стало быть, и рекуррентную процедуру (3.11) с финальной функцией (5.23); замечание 2 сохраняет свою силу. Итак, мы при $x \in X^0$ в виде $v_N(x, \overline{1,N})$ имеем экстремум задачи

$$\pi[x;\alpha] \to \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}. \tag{5.25}$$

С учетом (5.10) и (5.23) получаем теперь, что

$$\mathbf{v} = \min_{x\in X^0} v_N(x, \overline{1,N}). \tag{5.26}$$

Таким образом, рассматриваемый сейчас вариант итерационной процедуры приводит после исполнения (5.26) к эстремуму $\mathbf{v}$, что позволяет (см. (5.7)) ответить на вопрос об осуществимости неравенств (5.8): система неравенств (5.8) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\min_{x\in X^0} v_N(x, \overline{1,N}) = \mathbf{v} \leqslant \mathbf{d}. \tag{5.27}$$

Заметим, кстати, что свойство (3.10) в нашем случае (5.2) принимает следующий вид: при $s \in \overline{1,N}$, $(x,K) \in D_s$ и $j \in \mathbf{I}(K)$

$$(m_j, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{5.28}$$

Рассмотрим теперь процедуру построения решения из множества (5.11), то есть построения оптимального решения задачи (5.10). Прежде всего, учитывая (5.26), выбираем $x_0 \in X^0$ со свойством

$$v_N(x_0, \overline{1,N}) = \mathbf{v}. \tag{5.29}$$

(предполагается, что все функции в (3.11) уже построены). Теперь рассматриваем построение оптимального маршрута из $\mathbf{A}$ в задаче (5.25) при $x = x_0$. Для этого заметим, что (см. (5.24))

$$\mathbf{v} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_j, \overline{1,N}); v_{N-1}(m_j, \overline{1,N} \setminus \{j\})\}). \tag{5.30}$$

С учетом этого выбираем $\omega_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ так, что при этом

$$\mathbf{v} = \sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_{\omega_1}, \overline{1,N}); v_{N-1}(m_{\omega_1}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})\}). \tag{5.31}$$

Согласно (5.28) получаем очевидное включение

$$(m_{\omega_1}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}) \in D_{N-1} \tag{5.32}$$

(в связи с (5.32) заметим, что (см. § 3) $(x_0, \overline{1,N}) \in D_N$). Из (5.24), (5.32) следует, что

$$\begin{gathered} v_{N-1}(m_{\omega_1}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})} \sup(\{\mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_j, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}); v_{N-2}(m_j, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1; j\})\}). \end{gathered} \tag{5.33}$$

С учетом (5.33) выбираем $\omega_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})$ так, что при этом

$$\begin{gathered} v_{N-1}(m_{\omega_1}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}) = \\ = \sup(\{\mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}); v_{N-2}(m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1; \omega_2\})\}). \end{gathered} \tag{5.34}$$

С учетом (5.32) получаем теперь, что (см. (5.28))

$$(m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1; \omega_2\}) = (m_{\omega_2}, (\overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}) \setminus \{\omega_2\}) \in D_{N-2}. \tag{5.35}$$

Из (5.31) и (5.34) получаем следующую цепочку равенств

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_{\omega_1}, \overline{1,N}); \sup(\{\mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\}); v_{N-2}(m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1; \omega_2\})\})\}) = \\ = \sup(\{\sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_{\omega_1}, \overline{1,N}); \mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})\}); v_{N-2}(m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1; \omega_2\})\}). \end{gathered} \tag{5.36}$$

Замечание 3. Заметим, что при $N = 2$ из (5.36) сразу следует, что

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \sup(\{\sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_{\omega_1}, \overline{1,N}); \mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})\}); 0\}) = \\ = \sup(\{\mathbf{c}(x_0, m_{\omega_1}, \overline{1,N}); \mathbf{c}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}, \overline{1,N} \setminus \{\omega_1\})\}). \end{gathered} \tag{5.37}$$

При этом $\omega_1 \neq \omega_2$, а тогда $\tilde{\omega} \triangleq (\omega_i)_{i \in \overline{1,2}} \in \mathbb{P}$, а потому при $t \in \overline{1,N}$ имеем, что

$$\overline{1,N} \setminus \{\omega_i \colon i \in \overline{1,t-1}\} = \{\omega_i \colon i \in \overline{t,N}\},$$

откуда следует, что

$$\omega_t \in \mathbf{I}(\{\omega_i \colon i \in \overline{t,N}\}).$$

В силу (2.11) $\tilde{\omega} \in \mathbf{A}$. Тогда из (5.37) получаем (при $N = 2$), что $\mathbf{v} = \pi[x_0; \tilde{\omega}]$, то есть

$$(x_0, \tilde{\omega}) \in \mathbf{sol} \tag{5.38}$$

(см. (5.11)). В самом деле в нашем случае

$$\mathbf{y}[x_0; \tilde{\omega}] \colon \overline{0,2} \to X$$

имеет вид $\mathbf{y}[x_0; \tilde{\omega}](0) = x_0$, $\mathbf{y}[x_0; \tilde{\omega}](1) = m_{\omega_1}$ и $\mathbf{y}[x_0; \tilde{\omega}](2) = m_{\omega_2}$. Итак, в данном простейшем случае оптимальное решение извлекается из (5.36). □

Возвращаясь к общему случаю $N \geqslant 2$, заметим, что процедуры решения локальных экстремальных задач, подобные (5.31), (5.34), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,N}$. В результате будет построен маршрут

$$\tilde{\omega} = (\omega_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A},$$

для которого будет выполнено $\pi[x_0; \tilde{\omega}] = \mathbf{v}$. Если при этом $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{d}$, то решение $(x_0, \tilde{\omega}) \in \mathbf{sol}$ может использоваться для реализации (5.8).

§ 6. Вычислительный эксперимент (решение модельных задач)

Рассмотрим две модельные задачи, а именно: задачу об осуществимости системы инспекций и задачу об осуществимости системы перелетов с заданным планом доставки грузов. В обоих случаях отождествляем X с плоскостью $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; тогда X^0 есть заданное непустое конечное плоское множество возможных точек старта.

В первой задаче предполагаем, что оптимизируется очередность циклов, каждый из которых предусматривает этап внешнего перемещения к заданному мегаполису и последующее посещение всех его «городов», (инспекцию «городов»). По условию задачи требуется, чтобы на каждый цикл было израсходовано время не больше заданного. Полагая, что все перемещения осуществляются с фиксированной скоростью, данное ограничение можно свести к ограничению на расстояние, проходимое исполнителем при осуществлении цикла. Мы полагаем, что стоимости внешних перемещений (значения функции $\mathbf{c}$) определяются евклидовыми расстояниями на $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Стоимости внутренних работ (значения функций $c_1, \ldots, c_N$) определяются экстремумами метрических ЗК, связанных с посещением всех «городов» мегаполиса (при этом сами стоимости перемещений между «городами» мегаполиса также определяются в виде евклидовых расстояний), т. е. с инспекцией «городов». Подробности описания см. в [1, с. 183]. Отметим, что отношения (2.3) определяются в виде декартовых квадратов мегаполисов.

Рассматриваемые в настоящей статье алгоритмические конструкции были реализованы в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке C++ и работающей под управлением 64-х разрядной операционной системы Windows (начиная с версии Windows 7). Данная программа позволяет хранить исходные данные и результаты работы в текстовом файле специальной структуры, а для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления результатов (траектории посещения мегаполисов), увеличения отдельных участков графика и сохранения изображения в файл графического формата bmp; вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с центральным процессором Intel Core i7 с объемом ОЗУ 64 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1.

Рассмотрим модельный пример решения задачи обхода 35 мегаполисов, в роли которых выступают множества точек, расположенных на равных угловых расстояниях друг от друга на окружностях (12 точек на каждой окружности). При этом внутренние работы при посещении каждого мегаполиса заключаются в решении ЗК по обходу упомянутых выше точек на окружности с началом в точке «входа» в мегаполис и окончанием в точке «выхода» из него; разумеется, выбор точек «входа» и «выхода» также оптимизируется в интересах общего критерия задачи.

Пусть задано множество начальных позиций в виде

$$X^0 = \big\{(90,35);\ (0,0);\ (-50,40);\ (40,-55);\ (-70,-100);\ (90,-35)\big\},$$

а количество адресных пар (мощность множества $\mathbf{K}$) равно 49.

Получены следующие результаты:

Величина совокупных затрат: $\mathbf{v} = 105.618$.

Выбрана точка старта (90,35).

Первая УП (по порядку посещения мегаполисов): $\big((67,60);(48.34,55)\big) \in M_8 \times M_8$.

Последняя УП маршрута и трассы: $\big((-34.39,-56);(-36,-62)\big) \in M_{22} \times M_{22}$.

Время вычисления: 34 ч. 7 мин. 14 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

Рассмотрим теперь пример решения задачи курьера на узкие места, имея в виду конструкции § 5. Мы сохраняем предположения о том, что $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Фиксируем «города» (5.1), отождествляемые каждый с плоским вектором. Анализируем возможность организации перемещений (по смыслу «перелетов») (5.3) с обязательным осуществлением перевозок (5.4): при каждом $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$ наш ОУ должен сначала посетить пункт m_{μ_j} и лишь затем пункт m_{ν_j}. В качестве этих пунктов могут рассматриваться аэродромы; при посещении m_{μ_j} на борт ОУ (самолет, вертолет) будет принят груз, предназначенный для m_{ν_j}. Напомним, что «перелеты» (5.3) должны всякий раз удовлетворять ресурсному ограничению, определяемому посредством $\mathbf{d}$. Грубо говоря, должно удовлетворяться ограничение на запас «топлива», которое может быть пересчитано в условие, выражаемое в терминах значений функции $\mathbf{c}$. Например (и это делается в примере), упомянутое первичное требование преобразуется в условие на дальность беспосадочного полета. Как уже отмечалось, вопрос об осуществимости (5.3), (5.4) исчерпывающим образом может быть решен посредством использования задачи (5.9): речь идет о построении v_N и определении экстремума (5.26), который следует сравнить с $\mathbf{d}$. В случае $\mathbf{v} \leq \mathbf{d}$ решение экстремальной задачи может использоваться для реализации (5.8).

Итак, рассмотрим модельный пример задачи обхода 35 одноэлементных множеств, т. е. решение задачи курьера. Пусть

$$X^0 = \big\{(90,35);\ (0,0);\ (90,-35);\ (-80,70);\ (-70,-80);\ (-80,25);\ (80,-90)\big\} \text{ и } \mathbf{n} = 74.$$

Получены следующие результаты:

Величина совокупных затрат: $\mathbf{v} = 71.028$.

Выбрана точка старта $(0,0)$.

Первый пункт посещения: $(-40,50) \in M_{30}$.

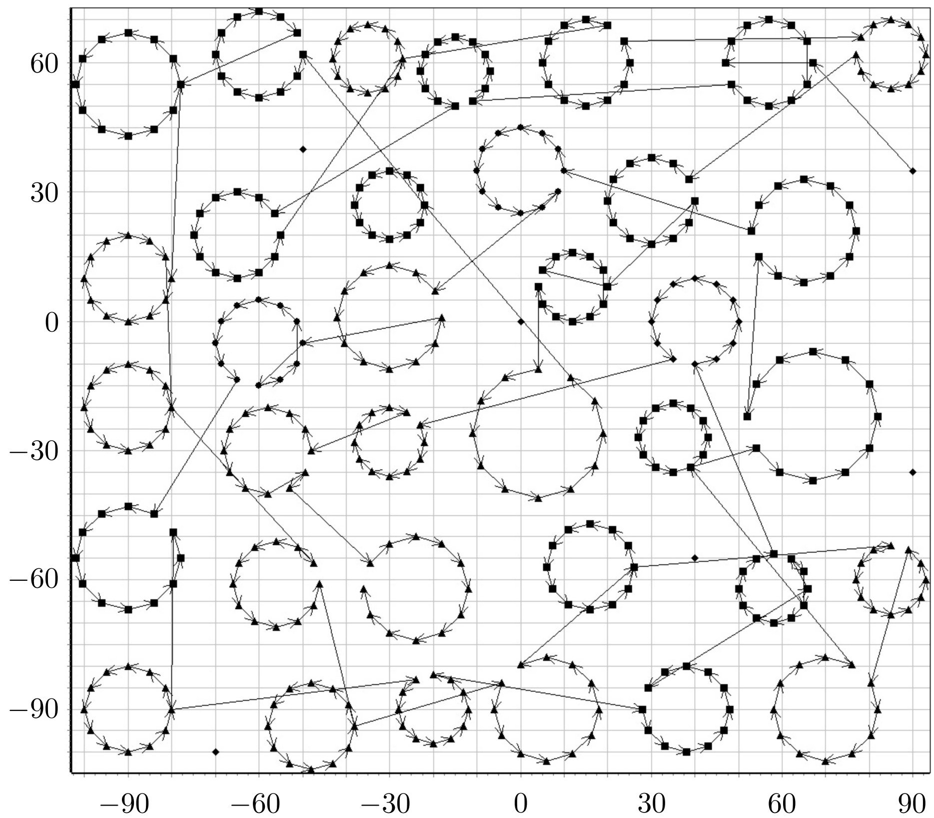

Рис. 1: Траектория движения по мегаполисам

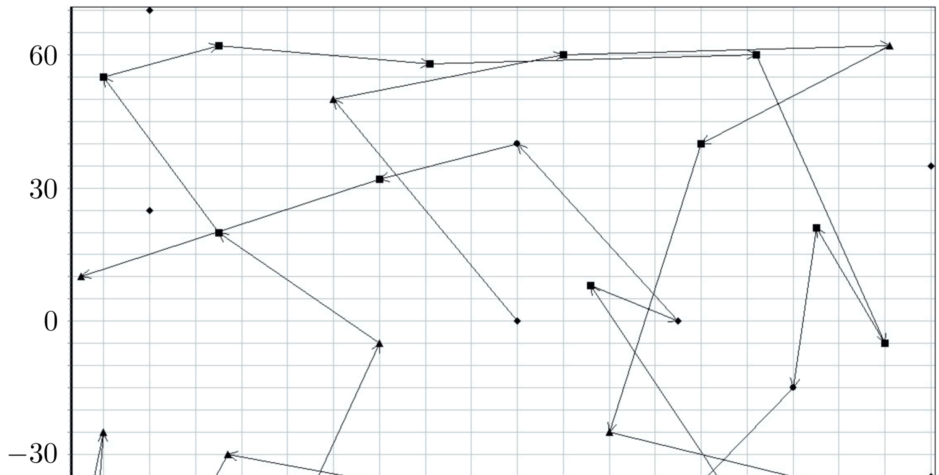

Рис. 2: Траектория решения задачи курьера на узкие места

Последний пункт посещения: $(-95, 10) \in M_{31}$.
Время вычисления: 27 ч. 3 мин. 29 сек.
График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075–02–2022–874).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: Ленанд, 2021.
2. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Оптимальная маршрутизация в задачах последовательного обхода мегаполисов при наличии ограничений // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7. Вып. 2. С. 209–233. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17205
3. Gutin G., Punnen A. The traveling salesman problem and its variations. New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
4. Cook W. J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/?q=an:1236.00007
5. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
6. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33. http://mi.mathnet.ru/at6414
7. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Точные методы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 10. С. 3–29. http://mi.mathnet.ru/at6433
8. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 11. С. 3–26. http://mi.mathnet.ru/at6463
9. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
10. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 219–228.
11. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 202–218.
12. Сергеев С. И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика 1995. Вып. 7. С. 144–150. http://mi.mathnet.ru/at3684
13. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача «на узкие места» // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 121–140. https://doi.org/10.20537/vm160110
14. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Динамическое программирование в обобщенной задаче «на узкие места» и оптимизация точки старта // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 348–363. https://doi.org/10.20537/vm180306
15. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
16. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
18. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
19. Ченцов А. Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82. https://doi.org/10.20537/vm130107

20. Ченцов А. Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 134–149. http://mi.mathnet.ru/at3783
21. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.
22. Lawler E. L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Report BW106. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1979.

Поступила в редакцию 07.09.2022

Принята к публикации 10.10.2022

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов. Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 569–592.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov

Dynamic programming and solvability of bottleneck routing problem with resource constraints

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/vm220406

The article deals with the problem of admissible routing for a system of cycles each of which contains exterior permutation and works connected with megalopolises (non-empty finite sets) visiting. In the initial setting, a resource constraint is given; this constraint should be fulfilled for every cycle under permutation. The solvability conditions in this problem are connected with the extremum of the auxiliary bottleneck routing problem without above-mentioned constraint, in which the apparatus of widely understood dynamic programming (DP) is used. A particular case of the setting is the known bottleneck courier problem which can be used (in particular) for routing a vehicle (airplane or helicopter) aiming to realize the given shipping system with a limited fuel reserve on each flight. An algorithm implemented on a personal computer is constructed.

Funding. This work was funded within the framework of research at the Ural Mathematical Center supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement number 075–02–2022–874).

REFERENCES

1. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. *Zadachi marshrutizatsii peremeshchenii s neadditivnym agregirovaniem zatrat* (Routing problems with non-additive cost aggregation), Moscow: Lenand, 2021.
2. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. Optimal routing in problems of sequential traversal of megapolises in the presence of constraints, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal*, 2022, vol. 7, issue 2, pp. 209–233 (in Russian). https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17205
3. Gutin G., Punnen A. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
4. Cook W. J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton, New Jercy: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/?q=an:1236.00007
5. Gimadi E. Kh., Khachay M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
6. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. *The traveling salesman problem. I: Theoretical issues*, Automation and Remote Control, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173. https://zbmath.org/?q=an:0705.90070
7. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. *The traveling salesman problem. II: Exact methods*, Automation and Remote Control, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324. https://zbmath.org/?q=an:0705.90071
8. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. *The traveling salesman problem. Approximate algorithms*, Automation and Remote Control, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479. https://zbmath.org/?q=an:0704.90095
9. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972
10. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. https://doi.org/10.1145/321105.321111
11. Held M., Karp R. M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, issue 1, pp. 196–210. https://doi.org/10.1137/0110015

12. Sergeev S. I. Algorithms for the minimax problem of the traveling salesman. I: An approach based on dynamic programming, *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, pp. 1027–1032. https://zbmath.org/?q=an:0917.90252
13. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Routing of displacements with dynamic constraints: "bottleneck problem", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 121–140. https://doi.org/10.20537/vm160110
14. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. Dynamic programming in the generalized bottleneck problem and the start point optimization, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 348–363. https://doi.org/10.20537/vm180306
15. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, North-Holland, 1967.
16. Dieudonné J. A. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
17. Cormen T. H., Leizerson C. E., Rivest R. L. *Introduction to algorithms*, Cambridge: MIT Press, 1990.
18. Chentsov A. G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extreme tasks of routing and distribution of tasks: theory questions), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008.
19. Chentsov A. G. To question of routing of works complexes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130107
20. Chentsov A. G. On a parallel procedure for constructing the Bellman function in the generalized problem of courier with internal jobs, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 3, pp. 532–546. https://doi.org/10.1134/S0005117912030113
21. Chentsov A. G., Chentsov A. A. To the question of finding the value of a constrained route task, *Problemy Upravlenia i Informatiki*, 2016, no. 1, pp. 41–54 (in Russian).
22. Lawler E. L. *Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Report BW106*, Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1979.

Received 07.09.2022

Accepted 10.10.2022

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Aleksei Aleksandrovich Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Citation: A. G. Chentsov, A. A. Chentsov. Dynamic programming and solvability of bottleneck routing problem with resource constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 569–592.