

УДК 517.54

© *И. С. Полянский, К. О. Логинов*

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА НА ЕДИНИЧНЫЙ КРУГ

В статье разработано приближенно-аналитическое решение задачи конформного отображения внутренних точек произвольного многоугольника на единичный круг. На предварительном этапе задача конформного отображения сформулирована в виде краевой задачи (задача Шварца). Последняя сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром типа Коши относительно неизвестной комплексной функции плотности на границе области с последующим вычислением интеграла Коши. Разработанное приближенно-аналитическое решение основано на разложении ядра Коши в системе многочленов Лежандра первого и второго рода. Выполнена априорная и апостериорная оценки сходимости и точности заданного решения. Определены экспоненциальная сходимость решения в $L_2([0, 1])$ и полиномиальная в $C([0, 1])$. Для наглядного сравнения результативности разработанного решения приведены расчеты на тестовых примерах.

Ключевые слова: конформное отображение, произвольный многоугольник, задача Шварца, логарифмический потенциал двойного слоя, комплексная функция плотности, уравнение Фредгольма, многочлены Лежандра.

DOI: [10.35634/vm220108](https://doi.org/10.35634/vm220108)

Введение

Свойства конформного отображения [1] обуславливают его широкое применение в решении краевых и начально-краевых задач математической физики [2–10]. В связи с тем, что любую область на плоскости можно аппроксимировать многоугольной областью, в теории функции комплексного переменного в отдельный класс выделяют задачи прямого и обратного конформного отображения многоугольника на каноническую область [7, 11]. Решение задачи прямого конформного отображения многоугольника известно и осуществляется путем вычисления интеграла Кристоффеля–Шварца [1, 10]. Особенность подобного решения состоит в необходимости определения неизвестных акцессорных параметров, для нахождения которых Фильчаковым П. Ф., Trefethen L. N., Driscoll T. A., Куфаревым П. П., Харом И. С., Коппенфельсем В. и др. [1, 11] разработан ряд эффективных методов. Обратная задача конформного отображения многоугольника решается с применением численных [1, 9, 12, 13] и численно-аналитических [7, 14] методов. Общие недостатки данных методов заключаются: в ограничении на применение относительно произвольных многоугольников; снижении вычислительной устойчивости и сходимости при решении задачи конформного отображения вогнутых многоугольников сложной геометрической формы на каноническую область; привязки к прямому решению задачи конформного отображения. Наибольший интерес из существующих методов представляют результаты работы [15], в которой обратная задача конформного отображения односвязной области с кусочно-гладкой границей сводится к численному решению интегрального уравнения относительно неизвестной комплексной функции плотности с последующим вычислением интеграла типа Коши. Недостаток [15] состоит в невысокой (полиномиальной) сходимости численного решения в $L_2([0, 1])$ в отношении обратной задачи конформного отображения многоугольника.

Цель настоящей статьи состоит в формировании относительно простого приближенно-аналитического соотношения, позволяющего эффективно решать обратную задачу конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг при устранении указанного недостатка [15]. В основу формируемого решения положим результаты [15, 16].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим односвязную область $\Omega \subset \mathbb{C}$: $0 \in \Omega$, ограниченную кривой Γ без самопересечений при:

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{N-1} \Gamma_j,$$

где Γ_j — прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_j и P_{j+1} — вершины области Ω при $j = 0, N-1$, $P_N = P_0$, и допускающий следующее параметрическое представление [16]

$$\Gamma_j = \{\zeta_j = \zeta_j(t) = e_j t + P_j, \quad t \in [0, 1]\}, \quad e_j = P_{j+1} - P_j.$$

Обозначим $B_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ — единичный круг.

Для определения функции $w = f(z) = u(z) + iv(z)$, конформно отображающей внутреннюю точку $z = (x + iy) \in \Omega$ на B_1 [12, 13, 15], сформулируем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, & z &\in \Omega; \\ \operatorname{Re} \ln \frac{f(z)}{z} &= -\ln |\zeta_j(t)|, & z &= \zeta_j(t) \in \Gamma_j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с учетом условий нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = \gamma > 0$, где $\gamma \in \mathbb{R}$.

Опираясь на результаты [15], задачу Шварца (1.1) сведем к следующему виду.

Теорема 1. *Предположим, что для $\Omega \subset \mathbb{C}$ функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ удовлетворяет условиям (1.1), тогда f можно представить в виде*

$$f(z) = \frac{\tilde{C}_0}{2\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{e_j \sigma_j(t)}{\zeta_j(t) - z} dt + \tilde{C}_1, \quad (1.2)$$

где \tilde{C}_0, \tilde{C}_1 — некоторые комплексные постоянные; $\sigma_j(t) \in \mathbb{C}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\overline{\zeta_j^{-1}(t)} = \sigma_j(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \sigma_k(s) K_{j,k}(t, s) ds. \quad (1.3)$$

В выражении (1.3) ядро $K_{j,k}(t, s)$ интегрального уравнения определяется соотношением [16]:

$$K_{j,k}(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{e_k}{e_j t + P_j - e_k s - P_k} \right], & j \neq k, \\ 0, & j = k. \end{cases} \quad (1.4)$$

Доказательство. Из интегральной формулы Коши с учетом заданной параметризации Γ следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{e_j \phi_j(t)}{\zeta_j(t) - z} dt, \quad (1.5)$$

где $\phi_j(t)$ определяет значения $f(z)$ на Γ_j .

Известно [17], что если $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ — голоморфная функция, то u и v — гармонические функции:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0. \quad (1.6)$$

С учетом (1.1), (1.6) при представлении u, v действительными частями некоторых комплексных чисел $\varepsilon = u + i\tilde{u}$, $\xi = v + i\tilde{v} \in \mathbb{C}$, используя теорию логарифмического потенциала двойного слоя [18], определим φ, ψ — значения u, v на Γ :

$$\begin{aligned} 2\Phi_j(t) &= \varphi_j(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \varphi_k(s) K_{j,k}(t,s) ds; \\ 2\Psi_j(t) &= \psi_j(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \psi_k(s) K_{j,k}(t,s) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $K_{j,k}(t,s)$ определяется соотношением (1.4); $\Phi_j(t)$ и $\Psi_j(t)$ в обозначениях теоремы Сохоцкого–Племеля [19] задают значения функций $u(z)$ и $v(z)$ вблизи Γ_j при $z \in \Omega$.

Переходя к $f = u + iv$ и учитывая обозначения (1.5), перепишем (1.7) в следующем виде

$$2F_j(t) = \phi_j(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \phi_k(s) K_{j,k}(t,s) ds, \quad (1.8)$$

где $F_j(t) = \Phi_j(t) + i\Psi_j(t)$; $\phi_j(t) = \varphi_j(t) + i\psi_j(t)$.

Для определения $F_j(t)$ (значение функций $f(z)$ вблизи Γ_j при $z \in \Omega$) используем результаты, полученные в [15].

Задав разложение в ряд Лорана функции $G(z) = 1/f(z)$ в окрестности точки $z = 0$:

$$G(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

с учетом определения многочленов Фабера и известной из [20] взаимосвязи между функциями $\hat{f}(z) = 1/f(1/z)$ «внешнего» \hat{f} и «внутреннего» f конформного отображения (\hat{f} — функция отображения точек $\mathbb{C} \setminus \Omega$ на внешность B_1 с условиями нормировки $\hat{f}(\infty) = \infty$, $\hat{f}'(\infty) = \gamma > 0$), введем в рассмотрение функцию

$$(G(z))^n = q_n(z) + G_n^0(z), \quad (1.9)$$

где $n \in \mathbb{N}$; $q_n(z) = \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{z^m}$; $G_n^0(z)$ — аналитическая в Ω функция при $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G_n^0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ для $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Для введенных представлений (1.9) из леммы 3.2 в [15, с. А3720] известно, что для $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ и функции $f(z)$, удовлетворяющей граничному условию задачи (1.1) ($|f(\zeta)| = 1$, $\zeta \in \Gamma$), справедливо:

$$\overline{q_n(z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} (f(\zeta))^n \operatorname{Im} \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} \right]; \quad \overline{a_{-1}z^{-1}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(\zeta) \operatorname{Im} \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} \right]. \quad (1.10)$$

Принимая во внимание (1.9), (1.10), введенную параметризацию Γ при обозначении $\tilde{\sigma}_j(t) = f(\zeta_j(t))$ и приближении $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ к граничной точке $\zeta \in \Gamma$, получим интегральное уравнение:

$$\overline{a_{-1}\zeta_j^{-1}}(t) = \tilde{\sigma}_j(t) + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \tilde{\sigma}_k(s) K_{j,k}(t, s) ds. \quad (1.11)$$

Из результатов теоремы 6.24 [21, с. 93] известно, что функция $\phi_j(t)$ является решением внешней $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ краевой задачи в теории логарифмического потенциала двойного слоя, если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\overline{a_{-1}\zeta_j^{-1}}(t) = \phi_j(t) + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \phi_k(s) K_{j,k}(t, s) ds + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \phi_k(s) ds. \quad (1.12)$$

Соотношения (1.11), (1.12) определяют справедливость тождества $\phi_j(t) = \tilde{\sigma}_j(t) + \text{const}$, которое при использовании результатов [15, с. 9] для условий нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = \gamma > 0$ и введении обозначения $\sigma_j(t) = 0.5\overline{a_{-1}^{-1}}\phi_j(t) - \frac{\text{const}}{4a_{-1}}$ позволяют определить $F_j(t) = \overline{a_{-1}\zeta_j^{-1}}(t) + \text{const}$ и свести (1.8) к виду

$$\overline{\zeta_j^{-1}}(t) = \sigma_j(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \sigma_k(s) K_{j,k}(t, s) ds, \quad (1.13)$$

Полученное соотношение (1.13) с учетом (1.5) при обозначении $\tilde{C}_0 = 0.5\overline{a_{-1}^{-1}}$, $\tilde{C}_1 = -\frac{\text{const}}{4a_{-1}}$ определяют справедливость (1.2), (1.3), что и требовалось доказать. \square

Константы \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 в заданном соотношении (1.2) являются аксессуарными параметрами, определяющими поворот, растяжение и сдвиг отображения $w = f(z)$, и могут быть определены аналогично константам в интеграле Кристоффеля–Шварца [7] при удовлетворении условиям нормировки и граничному условию задачи (1.1).

Таким образом, задача Шварца (1.1) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1.3) относительно неизвестной комплексной функции плотности $\sigma_j(t)$ с последующим вычислением интеграла (1.2).

§ 2. Представление ядра интегрального уравнения неизвестной комплексной функции плотности в задаче Шварца

Решение интегрального уравнения (1.3) с учетом положительных свойств экспоненциально сходящегося метода [16] предполагается выполнить при разложении ядра $K_{j,k}(t, s)$ в виде:

$$K_{j,k}(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \lambda_n^{j,k}(t) L_n(2s-1);$$

$$\lambda_n^{j,k}(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \text{Im} \left[Q_n \left(2 \frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right], & j \neq k, \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $R_{j,k} = P_j - P_k$; $L_n(\tau)$ и $Q_n(z)$ — многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно, задаваемые с учетом следующих рекуррентных соотношений [22]:

$$\begin{aligned} L_0(\tau) &= 1; & L_1(\tau) &= \tau; & L_n(\tau) &= \frac{2n-1}{n}\tau L_{n-1}(\tau) - \frac{n-1}{n}L_{n-2}(\tau); \\ Q_0(z) &= \operatorname{arcth}(z); & Q_1(z) &= z \operatorname{arcth}(z) - 1; \\ Q_n(z) &= \frac{2n-1}{n}zQ_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n}Q_{n-2}(z), & \tau &\in [-1, 1]; & z &\in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая разложение (2.1) ядра (1.4), основную часть проекционного решения интегрального уравнения (1.3) составляет задача вычисления интеграла

$$\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t) L_n(2t-1) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \operatorname{Im} \left[Q_m \left(\frac{e_j}{e_k} \tau + \frac{e_j + 2R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right] L_n(\tau) d\tau.$$

В [16] решение этой задачи выполнено аналитически при задании $L_n(\tau)$, $Q_m(z)$ через конечные суммы и гипергеометрические функции. Применение подобного способа вычислений [16] приводит к снижению вычислительной устойчивости последующего решения интегрального уравнения (1.3). Указанный недостаток предлагается устранить с применением рекуррентных соотношений в задачи аналитического вычисления интеграла вида $\int_{-1}^1 Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau$ при $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Выполним это решение при задании следующих представлений.

Учитывая результаты [24] и предложенные в [23] правила определения присоединенных функций Лежандра $L_n^{-\mu}(\tau)$, $Q_m^{-\mu}(z)$ при $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\tau \in [-1, 1]$, $z \in \mathbb{C}$, введем следующие рекуррентные обозначения:

$$\begin{aligned} L_n^{(0)}(\tau) &= L_n(\tau), & L_n^{(\mu)}(\tau) &= \frac{dL_n^{(\mu-1)}(\tau)}{d\tau}, & L_n^{(-\mu)}(\tau) &= \int_1^\tau L_n^{(-\mu+1)}(\tau) d\tau; \\ Q_m^{(0)}(z) &= Q_m(z), & Q_m^{(\mu)}(z) &= \frac{dQ_m^{(\mu-1)}(z)}{dz}, & Q_m^{(-\mu)}(z) &= (-1)^\mu \int_z^\infty Q_m^{(-\mu+1)}(z) dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Правило определения $L_n^{(\mu)}(\tau)$ является общеизвестным [22, 23] и сводится к рекуррентному вычислению

$$\begin{aligned} L_0^{(\mu)}(\tau) &= \frac{1}{2^\mu} \frac{(2\mu)!}{\mu!}, & L_1^{(\mu)}(\tau) &= \frac{\tau}{2^{\mu+1}} \frac{(2\mu+2)!}{(\mu+1)!}, \\ L_n^{(\mu)}(\tau) &= \frac{(2n-1)\tau L_{n-1}^{(\mu)}(\tau) - (n-1+\mu)L_{n-2}^{(\mu)}(\tau)}{n-\mu}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Непосредственным интегрированием и индукцией по μ аналогично [24] определим, что:

$$L_0^{(-\mu)}(\tau) = \frac{(\tau-1)^\mu}{\mu!}. \quad (2.5)$$

Из дифференциального уравнения [23] — $\left[n(n+1) - \frac{\mu^2}{1-\tau^2} \right] L_n^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left[(1-\tau^2) \frac{dL_n^\mu(\tau)}{d\tau} \right]$ для присоединенных многочленов Лежандра первого рода $L_n^\mu(\tau) = (-1)^\mu (1-\tau^2)^{\frac{1}{2}\mu} L_n^{(\mu)}(\tau)$

и тождества [22] $L_{n-1}^\mu(\tau) - L_{n+1}^\mu(\tau) = -(2n+1)\sqrt{1-\tau^2}L_n^{\mu-1}(\tau)$ с учетом (2.5) следует правило определения $L_n^{(-\mu)}(\tau)$ при $n \neq 0$:

$$L_n^{(-\mu)}(\tau) = \begin{cases} \frac{(-1)^\mu (1-\tau^2)^\mu}{(n+\mu)!} L_n^{(\mu)}(\tau), & n = \mu; \\ \frac{1}{2n+1} \left(L_{n+1}^{(-\mu+1)}(\tau) - L_{n-1}^{(-\mu+2)}(\tau) \right), & n \neq \mu. \end{cases} \quad (2.6)$$

Непосредственным дифференцированием и индукцией по μ зададим следующие соотношения:

$$Q_0^{(\mu)}(z) = \frac{(-1)^\mu \mu!}{2\mu} \left[\frac{1}{(z-1)^\mu} - \frac{1}{(z+1)^\mu} \right]; \quad (2.7)$$

$$Q_1^{(\mu)}(z) = \begin{cases} \frac{z}{1-z^2} + \operatorname{arcth}(z), & \mu = 1; \\ \frac{(-1)^\mu \mu!}{2\mu(\mu-1)} \left[\frac{\mu+z}{(z+1)^\mu} + \frac{\mu-z}{(z-1)^\mu} \right], & \mu > 1, \end{cases}$$

откуда

$$Q_m^{(\mu)}(z) = \frac{(2m-1)zQ_{m-1}^{(\mu)}(z) - (m-1+\mu)Q_{m-2}^{(\mu)}(z)}{m-\mu}. \quad (2.8)$$

Для определения функций $Q_m^{(-\mu)}(z)$ с учетом особенностей комплексного логарифма [22] вычислим следующие неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \int Q_0(z) dz &= \frac{1}{2} [\ln(1-z^2) + 2z \operatorname{arcth}(z)] + c_1^1 = \frac{1}{2} [\ln(z^2-1) + 2z \operatorname{arcth}(z)] + c_2^1; \\ \iint Q_0(z) dz dz &= \frac{1}{2} [z \ln(1-z^2) + (z^2+1) \operatorname{arcth}(z) - z] + zc_1^1 + c_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} [z \ln(z^2-1) + (z^2+1) \operatorname{arcth}(z) - z] + zc_2^1 + c_2^2; \\ Q_1^{(-1)}(z) &= \frac{-(1-z^2)}{2} Q_1^{(1)} = \frac{(z^2-1)}{2} \left(\operatorname{arcth}(z) - \frac{z}{z^2-1} \right); \\ \iint Q_1(z) dz dz &= \int Q_1^{(-1)}(z) dz = \frac{1}{6} [(z^3-3z) \operatorname{arcth}(z) - \ln(1-z^2) - z^2] + c_1^3 = \\ &= \int Q_1^{(-1)}(z) dz = \frac{1}{6} [(z^3-3z) \operatorname{arcth}(z) - \ln(z^2-1) - z^2] + c_2^3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, c_1^3, c_2^3$ — некоторые постоянные.

Учитывая (2.9), введем в рассмотрение функции $Q_m^{(\mu)}(z)$ и $Q_m^{\prime(\mu)}(z)$, которые согласно (2.2) удовлетворяют дифференциальному уравнению [23]

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dQ_m^{(\mu)}(z)}{dz} \right] = - \left[m(m+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] Q_m^{(\mu)}(z)$$

для присоединенных многочленов Лежандра второго рода $Q_m^\mu(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} Q_m^{(\mu)}(z)$ при определении через рекуррентные соотношения $Q_m^{\prime(\mu)}(z)$:

$$\begin{aligned}
Q_0^{(-1)}(z) &= \frac{1}{2} [\ln(1-z^2) + 2z \operatorname{arcth}(z)], \\
Q_0^{(-2)}(z) &= \frac{1}{2} [z \ln(1-z^2) + (z^2+1) \operatorname{arcth}(z) - z], \\
Q_0^{(-\mu)}(z) &= \frac{2z(1-\mu) Q_0^{(-\mu+1)}(z) - (1-z^2) Q_0^{(-\mu+2)}(z)}{\mu(1-\mu)} - \frac{z^{\mu-1}}{\mu!(\mu-1)}, \\
Q_1^{(-2)}(z) &= \frac{1}{6} \left[(z^3 - 3z) \operatorname{arcth}(z) - \ln(1-z^2) - z^2 + \frac{2}{3} \right], \\
Q_m^{(-\mu)}(z) &= \begin{cases} \frac{(-1)^\mu (1-z^2)^\mu}{(m+\mu)!} Q_m^{(\mu)}(z), & m = \mu; \\ \frac{1}{2m+1} \left(Q_{m+1}^{(-\mu+1)}(z) - Q_{m-1}^{(-\mu+2)}(z) \right), & m \neq \mu, \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

и $Q_n^{(m)}(z)$:

$$\begin{aligned}
Q_0^{(-1)}(z) &= \frac{1}{2} [\ln(z^2-1) + 2z \operatorname{arcth}(z)], \\
Q_0^{(-2)}(z) &= \frac{1}{2} [z \ln(z^2-1) + (z^2+1) \operatorname{arcth}(z) - z], \\
Q_0^{(-\mu)}(z) &= \frac{2z(1-\mu) Q_0^{(-\mu+1)}(z) - (1-z^2) Q_0^{(-\mu+2)}(z)}{\mu(1-\mu)} - \frac{z^{\mu-1}}{\mu!(\mu-1)}, \\
Q_1^{(-2)}(z) &= \frac{1}{6} \left[(z^3 - 3z) \operatorname{arcth}(z) - \ln(z^2-1) - z^2 + \frac{2}{3} \right], \\
Q_m^{(-\mu)}(z) &= \begin{cases} \frac{(-1)^\mu (1-z^2)^\mu}{(m+\mu)!} Q_m^{(\mu)}(z), & m = \mu; \\ \frac{1}{2m+1} \left(Q_{m+1}^{(-\mu+1)}(z) - Q_{m-1}^{(-\mu+2)}(z) \right), & m \neq \mu. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Лемма 1. Интеграл $\int_a^b Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau$, содержащий произведение функций Лежандра первого L_n и второго Q_m родов при $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1a + z_2, z_1b + z_2 \neq [-1; 1]$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, можно вычислить соотношением

$$\int_a^b Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau = \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{(-1)^{\mu+1}}{z_1^\mu} \begin{bmatrix} L_n^{(\mu-1)}(b) Q_m^{(-\mu)}(z_1b + z_2) - \\ -L_n^{(\mu-1)}(a) Q_m^{(-\mu)}(z_1a + z_2) \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

где $L_n^{(\mu-1)}(\tau)$ задается выражением (2.4); $Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2)$ определяется по правилу

$$Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2) = \begin{cases} Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2), & \beta_1 \geq \beta_2, \\ Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2), & \beta_1 < \beta_2; \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left| \arg \left[\frac{(z_1b + z_2 + 1)(z_1a + z_2 - 1)}{(z_1b + z_2 - 1)(z_1a + z_2 + 1)} \right] \right|; \quad \beta_2 = \left| \arg \left[\frac{(z_1b + z_2 + 1)(z_1a + z_2 + 1)}{(z_1b + z_2 - 1)(z_1a + z_2 - 1)} \right] \right|. \tag{2.13}$$

Доказательство. Используя формулу интегрирования по частям, тождество [22] $\int Q_m(\tau) d\tau = \frac{-\tau(1-\tau^2)}{m(m+1)} \frac{dQ_m(\tau)}{d\tau}$, определим интеграл от произведения многочленов Лежандра

первого и второго рода в виде

$$\int Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau = L_n(\tau) \frac{-[1 - (z_1\tau + z_2)^2]}{z_1 m(m+1)} Q_m^{(1)}(z_1\tau + z_2) + \frac{1}{z_1 m(m+1)} \int Q_m^{(1)}(z_1\tau + z_2) L_n^{(1)}(\tau) [1 - (z_1\tau + z_2)^2] d\tau + c, \quad (2.14)$$

где c — некоторая постоянная.

Учитывая тождество [22] $\int Q_m^{(\mu-1)}(\tau) (1 - \tau^2)^{\mu-1} d\tau = \frac{-(1-\tau^2)^\mu}{(m-\mu+1)(m+\mu)} Q_m^{(\mu)}(\tau)$, зададим выражение

$$\int Q_m^{(\mu-1)}(z_1\tau + z_2) L_n^{(\mu-1)}(\tau) d\tau = L_n^{(\mu-1)}(\tau) \frac{-[1 - (z_1\tau + z_2)^2]^\mu}{z_1(m-\mu+1)(m+\mu)} Q_m^{(\mu)}(z_1\tau + z_2) + \frac{1}{z_1(m-\mu+1)(m+\mu)} \int Q_m^{(\mu)}(z_1\tau + z_2) L_n^{(\mu)}(\tau) [1 - (z_1\tau + z_2)^2]^\mu d\tau + c. \quad (2.15)$$

Индукцией по μ для заданных соотношений (2.14), (2.15) с учетом $L_n^{(n+1)}(\tau) = 0$ при $m > n$ получим

$$\int Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau = - \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{L_n^{(\mu-1)}(\tau) [1 - (z_1\tau + z_2)^2]^\mu Q_m^{(\mu)}(z_1\tau + z_2)}{z_1^\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} [(m+\nu)(m-\nu+1)]} + c = - \sum_{\mu=1}^{n+1} \left[\frac{[1 - (z_1\tau + z_2)^2]^\mu (m-\mu)! L_n^{(\mu-1)}(\tau) Q_m^{(\mu)}(z_1\tau + z_2)}{z_1^\mu (m+\mu)!} \right] + c. \quad (2.16)$$

Учитывая тождество из [23] $Q_m^\mu(z) = \frac{(m+\mu)!}{(m-\mu)!} Q_m^{-\mu}(z)$ для присоединенных многочленов Лежандра второго рода, приведем (2.16) к виду

$$\int Q_m(z_1\tau + z_2) L_n(\tau) d\tau = \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{(-1)^{\mu+1}}{z_1^\mu} [L_n^{(\mu-1)}(\tau) Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2)] + c, \quad (2.17)$$

где $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Из формулу Ньютона–Лейбница, выражений (2.10), (2.11), (2.17) следует справедливость (2.12) при задании $Q_m^{(-\mu)}(z_1\tau + z_2)$ по правилу (2.13), которое учитывает условие выбора одинаковых ветвей в определении комплексного логарифма, что и требовалось доказать. \square

Лемма 2. Интеграл $\int_a^b (Q_n(z))^2 dz$, содержащий функцию Лежандра второго рода $Q_n(z)$, можно вычислить соотношением

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \frac{1}{2n+1} \left[(Q_0(z))^2 (\bar{z} - 1) + \left(\ln \left(\frac{\bar{z} + 1}{4} \right) + 2i\pi \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\ln(\bar{z} + 1)}{2} + Li_2 \left(\frac{\bar{z} + 1}{2} \right) + \sum_{h=0}^{n-1} \mathcal{T}_{n-h}(z) \right]_a^b, \quad (2.18)$$

где

$$\mathcal{T}_n(z) = \frac{1}{n^2} \left\{ z \left[(Q_n(z))^2 \left((2n+1)^2 z^2 - n(3n+2) \right) + (Q_{n+1}(z))^2 (n+1)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2(n+1) \left[(2n+1) z^2 - n \right] Q_n(z) Q_{n+1}(z) \right\}. \quad (2.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Примем во внимание рекуррентное соотношение [23] $Q_n(z) = \frac{2n-1}{n} z Q_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(z)$ и приведем интеграл в левой части (2.18) к виду

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \int_a^b \left[\frac{2n-1}{n} z Q_{n-1}(z) Q_n(z) - \frac{n-1}{n} Q_{n-2}(z) Q_n(z) \right] dz. \quad (2.20)$$

Учитывая определение $Q_n^1(z) = \sqrt{1-z^2} Q_n^{(1)}(z)$ и тождество $\int_a^b Q_n(z) Q_m(z) dz = \frac{[\sqrt{1-z^2} (Q_m(z) Q_n^1(z) - Q_n(z) Q_m^1(z))]}{(n-m)(n+m+1)} \Big|_a^b$ [22] при $n \neq m$, сведем (2.20) к равенству

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \frac{2n-1}{n} \int_a^b z Q_{n-1}(z) Q_n(z) dz - \\ - \frac{n-1}{n(4n-2)} \left[(Q_n(z) Q_{n-2}^{(1)}(z) - Q_{n-2}(z) Q_n^{(1)}(z)) (1-z^2) \right]_a^b. \quad (2.21)$$

Используя выражение $z Q_n(z) = \frac{n+1}{2n+1} Q_{n+1}(z) + \frac{n}{2n+1} Q_{n-1}(z)$ [23] и вышеуказанное тождество из [22], представим первый интеграл правой части (2.21) в виде

$$\int_a^b z Q_{n-1}(z) Q_n(z) dz = \frac{n}{2n+1} \int_a^b (Q_{n-1}(z))^2 dz + \\ + \frac{n+1}{2(2n+1)^2} \left[(Q_{n+1}(z) Q_{n-1}^{(1)}(z) - Q_{n-1}(z) Q_{n+1}^{(1)}(z)) (1-z^2) \right]_a^b. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в (2.21) и обозначив $\mathcal{Q}_n(z) = (1-z^2) \left[\frac{(2n-1)(n+1)}{2n(2n+1)^2} (Q_{n+1}(z) \times Q_{n-1}^{(1)}(z) - Q_{n-1}(z) Q_{n+1}^{(1)}(z)) - \frac{n-1}{n(4n-2)} (Q_n(z) Q_{n-2}^{(1)}(z) - Q_{n-2}(z) Q_n^{(1)}(z)) \right]$, приведем (2.20) к виду

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \frac{2n-1}{2n+1} \int_a^b (Q_{n-1}(z))^2 dz + [\mathcal{Q}_n(z)]_a^b. \quad (2.23)$$

Проведя аналогичные (2.20)–(2.23) преобразования относительно вычисления интеграла $\int_a^b (Q_{n-1}(z))^2 dz$, представим выражение (2.23) в виде

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = [\mathcal{Q}_n(z)]_a^b + \frac{2n-1}{2n+1} \left[[\mathcal{Q}_{n-1}(z)]_a^b + \frac{2n-3}{2n-1} \int_a^b (Q_{n-2}(z))^2 dz \right]. \quad (2.24)$$

Приняв обозначение $\mathcal{A}_{n,h} = \frac{2(n-h+1)-1}{2n+1}$ при рекуррентном продолжении (2.24), определим интеграл $\int_a^b (Q_n(z))^2 dz$ соотношением

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \sum_{h=0}^{n-2} \mathcal{A}_{n,h} [Q_{n-h}(z)]_a^b + \mathcal{A}_{n,n-1} \int_a^b (Q_1(z))^2 dz. \quad (2.25)$$

Применяя известные из [22] рекуррентные соотношения для многочленов Лежандра и выражение $Q_n^{(1)}(z) = \frac{n}{1-z^2} [Q_{n-1}(z) - zQ_n(z)]$ при переопределении $Q_n(z)$ в виде

$$Q_n(z) = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{(2n-1)(n+1)}{(2n+1)n} \left[(z^2(2n+1)+1) Q_{n+1}(z) Q_n(z) - (n+1)z \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [(Q_{n+1}(z))^2 + (Q_n(z))^2] \right] - (z^2(2n+1)+1) Q_n(z) Q_{n-1}(z) - nz [(Q_n(z))^2 + \right. \\ \left. + (Q_{n-1}(z))^2] \right\},$$

для (2.19) заметим справедливость тождества

$$(2n+1) \mathcal{T}_{n-h}(z) = \mathcal{A}_{n,h} Q_{n-h}(z), \quad h = \overline{0, n-1}. \quad (2.26)$$

Учитывая (2.2), (2.26), сведем (2.25) к виду

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \frac{1}{2n+1} \left[\sum_{h=0}^{n-1} [\mathcal{T}_{n-h}(z)]_a^b + \int_a^b (\operatorname{arcth}(z))^2 dz \right]. \quad (2.27)$$

Свойства дилогарифма $Li_2(z)$ [22] при вычислении интеграла $\int_a^b (\operatorname{arcth}(z))^2 dz$ и выражение (2.27) определяют справедливость (2.18), что и требовалось доказать. \square

§ 3. Решение задачи конформного отображения точек многоугольника на единичный круг

Разложение (2.1) ядра (1.4) интегрального уравнения (1.3) и результаты лемм 1, 2 позволяют задать приближенно-аналитическое решение задачи Шварца (1.1) при введении следующих представлений. Пусть неизвестная комплексная функция плотности $\sigma_j(t)$ в интегральном уравнении (1.3) определяется выражением

$$\sigma_j(t) = \overline{\zeta_j^{-1}}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_{k,n} \sqrt{2n+1} \lambda_n^{j,k}(t), \quad (3.1)$$

где

$$S_{k,n} = \sqrt{2n+1} \int_0^1 \sigma_k(s) L_n(2s-1) ds. \quad (3.2)$$

Тогда с учетом заданного разложения (2.1) ядра $K_{j,k}(t,s)$ при подстановке (3.1) в (1.3) в силу ортогональности функций $L_n(2s-1)$ на $s \in [0, 1]$, независимости $\sigma_j(t)$, $\sigma_{j+1}(t)$ для $j \in \{0, N-1\}$ и их гладкости всюду на Γ_j , Γ_{j+1} соответственно, кроме угловых точек [16],

сведем (1.3) к системе линейных уравнений $(\mathbf{E} + \mathbf{T})\vec{S} = \vec{U}$. Решение $\vec{S} = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}\vec{U}$ последнего позволяет определить неизвестную комплексную функцию плотности $\sigma_j(t)$ по правилу (3.1). В заданных обозначениях \vec{S} – блочный вектор размера $\tilde{N} = N \cdot M$, составленный из элементов $S_{j,n}$; \mathbf{E} – единичная матрица $\tilde{N} \times \tilde{N}$; \vec{U} – блочный вектор, составленный из элементов $U_{j,n} = \sqrt{2n+1} \int_0^1 \zeta_j^{-1}(t) L_n(2t-1) dt$, которые учитывая параметризацию Γ и тождество [22] $Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{L_n(t)}{z-t} dt$ при замене переменных могут быть вычислены по правилу $U_{j,n} = \frac{-2\sqrt{2n+1}}{e_j} Q_n\left(-2\frac{P_j}{e_j} - 1\right)$; \mathbf{T} – блочная матрица, составленная из элементов $\tilde{T}_{m,n}^{j,k} = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1}T_{m,n}^{j,k}$, которые при отсутствии особенностей вычисления $\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t) L_n(2t-1) dt$ (условия $j \neq k$, $j+1 \neq k$ и $j \neq k+1$) с учетом (2.12) могут быть определены по правилу:

$$T_{m,n}^{j,k} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n+1} (-1)^\mu \begin{pmatrix} L_n^{(\mu-1)}(1) \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu Q_m^{(-\mu)} \left(2\frac{e_j+R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right] - \\ - L_n^{(\mu-1)}(-1) \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu Q_m^{(-\mu)} \left(\frac{2R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right] \end{pmatrix}, & j \neq k. \end{cases}$$

Для случаев наличия особенностей вычисления $\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t) L_n(t) dt$:

1) $j \neq k$, $j+1 \neq k$ и $j = k+1$

$$T_{m,n}^{j,k} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n+1} (-1)^\mu \begin{pmatrix} L_n^{(\mu-1)}(1) \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu Q_m^{(-\mu)} \left(2\frac{e_j+R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right] - \\ - L_n^{(\mu-1)}(-1) \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu A_m^{(-\mu)} \right] \end{pmatrix}, & j \neq k; \end{cases}$$

2) $j \neq k$, $j+1 = k$ и $j \neq k+1$

$$T_{m,n}^{j,k} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n+1} (-1)^\mu \begin{pmatrix} L_n^{(\mu-1)}(1) \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu A_m^{(-\mu)} \right] - L_n^{(\mu-1)}(-1) \times \\ \times \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e_k}{e_j} \right)^\mu Q_m^{(-\mu)} \left(\frac{2R_{j,k}}{e_k} - 1 \right) \right] \end{pmatrix}, & j \neq k, \end{cases}$$

где $A_m^{(-\mu)}$ задается с учетом (2.10)–(2.12) и правила (2.13) по следующему рекуррентному правилу:

$$\begin{aligned} A_0^{(0)} &= 2 \ln(2) - i\frac{\pi}{2}, & A_1^{(0)} &= 2 \ln(2) - i\frac{\pi}{2} - 1, & A_m^{(0)} &= \frac{2m-1}{m} A_{m-1}^{(0)} - \frac{m-1}{m} A_{m-2}^{(0)}; \\ A_0^{(-1)} &= \ln(2), & A_0^{(-2)} &= \ln(2) - \frac{1}{2}, & A_0^{(-\mu)} &= \frac{2(1-\mu) A_0^{(-\mu+1)}}{\mu(1-\mu)} - \frac{1}{\mu!(\mu-1)}; \\ A_1^{(-1)} &= -\frac{1}{2}, & A_1^{(-2)} &= -\frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{18}, & A_m^{(-\mu)} &= \frac{1}{2m+1} \left(A_{m+1}^{(-\mu+1)} - A_{m-1}^{(-\mu+1)} \right). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (1.3) в операторной форме:

$$\vec{\sigma} + \mathcal{K}\vec{\sigma} = \vec{\epsilon}, \quad (3.3)$$

где $\vec{\sigma} = (\sigma_j)_N$; $\vec{\epsilon} = (\overline{\zeta_j^{-1}})_N$; $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{j,k})_{N \times N}$ — матричный оператор; $\mathcal{K}\vec{\sigma} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_{0,k} \sigma_k; \dots; \dots; \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_{N-1,k} \sigma_k \right)$; $(\mathcal{K}_{j,k} \sigma_k)(t) \equiv \int_0^1 K_{j,k}(t, s) \sigma_k(s) ds$ — линейный ограниченный оператор на пространстве функций из $C([0, 1])$ [16].

При введении в рассмотрение линейного ограниченного оператора

$$(\mathcal{K}_{j,k}^M \sigma_k)(t) \equiv \sum_{n=0}^M (2n+1) \lambda_n^{j,k}(t) \int_0^1 L_n(s) \sigma_k(2s-1) ds$$

по аналогии с (3.3) и учетом (3.1), (3.2) определим уравнение

$$\vec{\sigma}_M + \mathcal{K}^M \vec{\sigma}_M = \vec{\epsilon}, \quad (3.4)$$

где $\vec{\sigma}_M = (\sigma_{j,M})_N$ обозначает приближение комплексной функции плотности $\vec{\sigma}$ соотношением (3.1) при замене бесконечной суммы по индексу n конечной с ограничением числа слагаемых до M .

Также для (1.2), (3.5) и с учетом обозначений из (3.8) введем в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\vec{\sigma})(z) &\equiv \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \sigma_j(t) H_j(t, z) dt, \\ (\mathcal{H}^M \vec{\sigma}_M)(z) &\equiv -2 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^M (2n+1) Q_n \left(2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1 \right) \times \int_0^1 L_n(2t-1) \sigma_{j,M}(t) dt. \end{aligned}$$

При определении оценок приближения векторной функции $\vec{\varphi}$ будем использовать нормы в пространствах $C([0, 1])$ и $L_2([0, 1])$ [25]:

$$\|\vec{\varphi}\|_C = \max_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in \{0, N-1\}}} |\varphi_j(t)|; \quad \|\vec{\varphi}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 (\varphi_j(t))^2 dt}.$$

Теорема 2. $\exists \tilde{M} \in \mathbb{N}: \forall M \geq \tilde{M}$ решение

$$\tilde{f}_M(z) = \tilde{C}_1 - \frac{\tilde{C}_0}{\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^M \sqrt{2n+1} Q_n \left(2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1 \right) S_{j,n} \quad (3.5)$$

задачи Шварца (1.1) существует и единственно, при этом справедливы оценки

$$\|f - \tilde{f}_M\|_C \leq \text{const} \max_{j=0, N-1} \left\{ \frac{2\varpi_j^{-1} |e_j|^2 (4\pi - \alpha_j)}{|\overline{P_j} |e_j|^2 - \overline{e_j} \text{Re}(e_j \overline{P_j})|} \right\} \left(\frac{1}{M+0.5} + \frac{1}{M+1.5} \right); \quad (3.6)$$

$$\|f - \tilde{f}_M\|_{L_2} \leq \frac{\text{const} \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \vartheta_j M 2^{-M}}}{(2M+1) \sqrt{2M+3}}, \quad (3.7)$$

где const — положительна и не зависит от M .

В выражениях (3.5)–(3.7) приняты обозначения: $\varpi_j = \min \{ \Theta_j, \pi (\pi + |\pi - \alpha_j|)^{-1} \}$;
 $\Theta_j = \begin{cases} |\sin \alpha_j|, & \alpha_j \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \alpha_j \in [\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2], \end{cases}$ [26]; α_j – внутренний угол Ω при вершине P_j ;

$$\vartheta_j = \frac{\operatorname{arctg} \left[\frac{|e_j|^2 + \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)}{\sqrt{|e_j|^2 |P_j|^2 - \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)^2}} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)}{\sqrt{|e_j|^2 |P_j|^2 - \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)^2}} \right]}{\sqrt{|e_j|^2 |P_j|^2 - \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)^2}};$$

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_0 C_1;$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^M \left[\sqrt{2n+1} \times S_{j,n} Q_n \left(-2 \frac{P_j}{e_j} - 1 \right) \right];$$

$$\tilde{C}_0 = \left| C_1 - \frac{1}{\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^M \sqrt{2n+1} Q_n \left(2 \frac{\zeta_k(0, 5) - P_j}{e_j} - 1 \right) S_{j,n} \right|^{-1} \text{ при } k \in \{0, N-1\}.$$

Доказательство. Используя результаты [16], аналогично (2.1) определим разложение подынтегрального выражения $\frac{e_j}{\zeta_j(t-z)}$ из (1.2) в виде:

$$H_j(t, z) = \frac{e_j}{\zeta_j(t) - z} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n \left(2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1 \right) L_n(2t-1). \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в (1.2), получим

$$f(z) = -\frac{\tilde{C}_0}{\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n \left(2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1 \right) \int_0^1 L_n(2t-1) \sigma_j(t) dt + \tilde{C}_1. \quad (3.9)$$

Далее, подставив (3.2) в (3.9), определим справедливость (3.5) для случая $M \rightarrow \infty$. Из форм представления операторов \mathcal{H} , \mathcal{K} следует наличие обратного оператора $(I + \mathcal{K})^{-1}$, обеспечивающего разрешимость уравнения (3.3) в виде $\vec{\sigma} = (I + \mathcal{K})^{-1} \vec{\epsilon}$. Для формирования оценок приближенно-аналитического решения (3.5) задачи Шварца (1.1) в $C([0, 1])$ и $L_2([0, 1])$ по аналогии с [16] функцию $\vec{\sigma}$ представим в виде $\vec{\sigma} = \rho \vec{\zeta}$, где $\vec{\zeta}$ – новая искомая функция в (3.3), а $\rho = \rho(t) = 2\sqrt{t-t^2}$ – весовая функция [16]. Используя введенные представления и неравенство Коши–Буняковского [25] определим оценку в $C([0, 1])$:

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_M\|_C &\leq \| \mathcal{H} \vec{\sigma} - \mathcal{H} \vec{\sigma}_M + \mathcal{H} \vec{\sigma}_M - \mathcal{H}^M \vec{\sigma}_M \|_C \leq \\ &\leq \| \rho \mathcal{H} \|_C \| \vec{\zeta} - \vec{\zeta}_M \|_C + \| \vec{\zeta}_M \|_C \| \rho (\mathcal{H} - \mathcal{H}^M) \|_C. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Принимая во внимание (2.1), (2.10)–(2.12), (3.5), (3.1), результаты [16] и параметризацию Γ , определим соотношения

$$\| \rho \mathcal{H} \|_C \leq \max_{z \in \Omega} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \left| \frac{e_j 2\sqrt{t-t^2}}{\zeta_j(t-z)} \right| dt \leq 4\pi - \min_{j=0, N-1} \{ \alpha_j \}; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \| \vec{\zeta}_M \|_C &= \| [\rho (I + \mathcal{K}^M)]^{-1} \vec{\epsilon} \|_C \leq \| [\rho (I + \mathcal{K}^M)]^{-1} \|_C \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ j=0, N-1}} \left\{ \left| \zeta_j^{-1}(t) \right| \right\} = \\ &= \| [\rho (I + \mathcal{K}^M)]^{-1} \|_C \max_{j=0, N-1} \left\{ \frac{2|e_j|^2}{|P_j |e_j|^2 - e_j \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)|} \right\} = \\ &= \operatorname{const} \max_{j=0, N-1} \left\{ \frac{2\varpi_j^{-1} |e_j|^2}{|P_j |e_j|^2 - e_j \operatorname{Re}(e_j \bar{P}_j)|} \right\}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)\|_C &\leq \max_{z \in \Omega} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_0^1 \rho(t) \times \right. \\ &\times \left. \left[2 \sum_{n=0}^M (2n+1) Q_n \left(2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1 \right) L_n(2t-1) + \frac{e_j}{\zeta_j(t) - z} \right] dt \right|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя замену переменных $t = \frac{\tau+1}{2}$, $\nu_j = 2 \frac{z - P_j}{e_j} - 1$ при обозначении $\tilde{\rho}(\tau) = \rho\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = \sqrt{1-\tau^2}$ с учетом формулы Кристоффеля [23], приведем (3.13) к виду

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)\|_C &\leq \max_{z \in \Omega} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{-1}^1 \tilde{\rho}(\tau) \left[\frac{1}{\nu_j - \tau} - \sum_{n=0}^M (2n+1) Q_n(\nu_j) L_n(\tau) \right] d\tau \right| = \\ &= (M+1) \max_{z \in \Omega} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\rho}(\tau)}{\nu_j - \tau} [Q_M(\nu_j) L_{M+1}(\tau) - Q_{M+1}(\nu_j) L_M(\tau)] d\tau \right| \leq \\ &\leq (M+1) \sum_{j=0}^{N-1} \left| \begin{aligned} &\lim_{\nu \rightarrow -1} Q_M(\nu) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} L_{M+1}(\tau) d\tau - \\ & - \lim_{\nu \rightarrow -1} Q_{M+1}(\nu) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} L_M(\tau) d\tau \end{aligned} \right|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая правило выражения сдвинутого на интервал ортогональности $[0, 1]$ многочлена Лежандра первого рода $\tilde{L}_M(t)$ через сумму [22] $\tilde{L}_M(t) = (-1)^M \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} \binom{M+n}{n} (-t)^n$ ($\tau = 2t - 1$), свойства гамма-функции и обобщенной гипергеометрической функции [22], вычислим интеграл из (3.14) соотношением

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} L_M(\tau) d\tau &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^M \frac{(-1)^{M+n} (M+n)! \Gamma(n+1/2)}{(n+1)! (n!)^2 (M-n)!} = \\ &= (-1)^M \pi {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, -M, M+1; 1, 2; 1 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15), тождества [22]

$$\lim_{\nu \rightarrow -1} Q_M(\nu) = \frac{-\infty \left[\cos\left(\frac{M\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-M}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+M}{2}\right) + \sin\left(\frac{M\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-M}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+M}{2}\right) \right]}{\Gamma\left(\frac{1-M}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-M}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+M}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+M}{2}\right)},$$

свойств гипергеометрических функций с учетом теоремы Заальшютца [22] и свойства символа Похгаммера $(-x)_n = (-1)^n (x-n+1)_n$ окончательно сформируем оценку (3.13) в виде

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)\|_C &\leq \text{const}(M+1) \left[{}_3F_2\left(\frac{1}{2}, -M, M+1; 1, 2; 1\right) - \right. \\ &\quad \left. - {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, -M-1, M+2; 1, 2; 1\right) \right] = \\ &= \text{const}(M+1)^2 {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, -M, M+2; 3, 2; 1\right) \leq \\ &\leq \text{const}(M+1)^2 {}_3F_2\left(\frac{3}{2}, -M, M+2; 2, \frac{5}{2}; 1\right) = \\ &= \text{const}(M+1)^2 \frac{(0.5)_M (-M)_M}{(2)_M (-M-1.5)_M} = \text{const}(M+1) \frac{\Gamma(M+0.5)}{\Gamma(M+2.5)} = \\ &= \frac{\text{const}}{2} \left(\frac{1}{M+0.5} + \frac{1}{M+1.5} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следуя [16, 25] при выполнении неравенства $\|[\rho(I + \mathcal{K})]^{-1}\| \|\rho(\mathcal{K} - \mathcal{K}^M)\|_C < 1$ (здесь $\|[\rho(I + \mathcal{K})]^{-1}\| \leq \max_{j \in \{0, N-1\}} \{\text{const} \varpi_j^{-1}\}$ [16]) с учетом неравенства Коши–Буняковского и выражения (3.12), определим оценку:

$$\begin{aligned} \|\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_M\|_C &\leq \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ j=0, N-1}} \left\{ \left| \overline{\zeta_j^{-1}}(t) \right| \right\} \left\| [\rho(I + \mathcal{K})]^{-1} - [\rho(I + \mathcal{K}^M)]^{-1} \right\|_C \leq \\ &\leq \max_{j=0, N-1} \left\{ \frac{2|e_j|^2}{|\overline{P_j}| |e_j|^2 - \overline{e_j} \text{Re}(e_j \overline{P_j})|} \right\} \frac{\|\rho \Delta \mathcal{K}\|_C \left\| [\rho(I + \mathcal{K})]^{-1} \right\|_C^2}{1 - \left\| [\rho(I + \mathcal{K})]^{-1} \right\|_C \|\rho \Delta \mathcal{K}\|_C}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\Delta \mathcal{K} = \mathcal{K} - \mathcal{K}^M$.

Принимая во внимание соотношения (1.4), (3.8) и предшествующие результаты, полученные в ходе преобразований (3.10)–(3.16), окончательно определим справедливость оценки (3.6), что и требовалось доказать относительно полиномиальной сходимости в $C([0, 1])$ решения (3.5) задачи Шварца (1.1).

Следуя аналогичным (3.10) представлениям при определении (3.11)–(3.17) с учетом результатов [16, 26], зададим следующие оценки в $L_2([0, 1])$:

$$\|f - \tilde{f}_M\|_{L_2} \leq \|\rho \mathcal{H}\|_{L_2} \|\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_M\|_{L_2} + \|\vec{\zeta}_M\|_{L_2} \|\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)\|_{L_2}; \quad (3.18)$$

$$\|\rho \mathcal{H}\|_{L_2} \leq 0.5\pi^2; \quad (3.19)$$

$$\|\vec{\zeta}_M\|_{L_2} \leq \text{const} \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \vartheta_j}; \quad (3.20)$$

$$\|\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_M\|_{L_2} \leq \text{const} \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \vartheta_j \frac{\|\rho \Delta \mathcal{K}\|_{L_2} \left\| [\rho(I + \mathcal{K})]^{-1} \right\|_{L_2}^2}{1 - \left\| [\rho(I + \mathcal{K})]^{-1} \right\|_{L_2} \|\rho \Delta \mathcal{K}\|_{L_2}}}. \quad (3.21)$$

Принимая аналогичную (3.14) замену переменных с учетом формулы Кристоффеля [23], неравенства Коши–Буняковского, свойств ортогональных многочленов, результатов леммы 2, тождества [22] для многочлена Лежандра второго рода

$$\tilde{Q}_n(z) = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})} z^{-n-1} {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; \frac{1}{z^2}\right),$$

гамма-функции $\Gamma(n) \Gamma(n + \frac{1}{2}) = 2^{1-2n} \sqrt{\pi} \Gamma(2n)$ и формулы Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, сформируем следующую оценку для $\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)$ в $L_2([0, 1])$:

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathcal{H} - \mathcal{H}^M)\|_{L_2}^2 &\leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \frac{e_j}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma^{-1}} \int_0^1 \tilde{\rho}^2(\tau) \left(\frac{M+1}{\nu_j - \tau}\right)^2 [Q_M(\nu_j) L_{M+1}(\tau) - Q_{M+1}(\nu_j) L_M(\tau)]^2 d\tau d\nu_j \right| \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \frac{e_j}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma^{-1}} \int_0^1 \tilde{\rho}^2(\tau) \left(\frac{M+1}{\nu_j - \tau}\right)^2 d\tau d\nu_j \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left[\frac{(Q_M(\nu_j))^2}{2M+3} + \frac{(Q_{M+1}(\nu_j))^2}{2M+1} \right] d\nu_j \right| \leq \\ &\leq \frac{\text{const} M 2^{-M}}{(2M+1) \sqrt{2M+3}}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

С учетом заданных аналогичных [16] представлений (3.18)–(3.22) и соотношений (1.4), (3.9) окончательно определим справедливость оценки (3.7), что и требовалось доказать относительно экспоненциальной сходимости в $L_2([0, 1])$ решения (3.5) задачи Шварца (1.1). \square

§ 4. Апостериорная оценка точности метода и тестовые примеры

Результаты оценок (3.6), (3.7) свидетельствуют о предпочтительности предложенного приближенно-аналитического решения (3.5) задачи Шварца (1.1) в сравнении с известными [15] (численные методы из [15] и метод квадратур со сглаживанием [26]), обеспечивая высокую точность при небольших M . Для наглядной демонстрации преимуществ приближенно-аналитического решения (3.5) проведем дополнительную апостериорную оценку точности относительно вычислений $\vec{\sigma}$ и $w = f(z)$ для областей простой (правильный многоугольник) и сложной (вогнутый многоугольник) форм с использованием САПР MathCad. В качестве области простой формы выбран правильный треугольник с вершинами $P_0 = 5$; $P_1 = -2.5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$; $P_2 = -2.5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

На рис. 1 приведены сравнительные результаты расчета модуля комплексной функций плотности $|\sigma_j^M(t)|$ на ребрах треугольника при приближенном решении интегрального уравнения (1.3) разработанным методом и методом квадратур для различных порядков аппроксимации M и зависимость среднего отклонения ошибки

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 |\sigma_j(t) - \sigma_j^M(t)|^2 dt}$$

численного расчета $\sigma_j(t)$ от M .

На рис. 2 приведены примеры решения задачи по правилу (3.5) конформного отображения внутренних точек треугольника Ω на единичный круг и сравнительная зависимость среднего отклонения ошибки

$$\tilde{\delta} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(z) - \tilde{f}_M(z)|^2 dz}$$

численного расчета $f(z)$ от M .

На рис. 3 приведены решения задачи конформного отображения для вогнутого девятнадцатиугольника на B_1 по правилу (3.5) при различных значениях M .

На рис. 4 приведены решения задачи конформного отображения для вогнутого двадцатичетырехугольника на B_1 по правилу (3.5) при различных значениях M .

Заключение

Полученное соотношение (3.5) позволяет с полиномиальной (3.6) в $C([0, 1])$ и экспоненциальной (3.7) в $L_2([0, 1])$ скоростями сходимости формировать приближенно-аналитическое решение задачи Шварца (1.1) — конформного отображения внутренних точек произвольного многоугольника Ω на единичный круг B_1 . Оценка (3.6) определяет наибольшую погрешность решения (3.5) задачи (1.1) вблизи j -х угловых точек Ω при условиях: максимального отклонения внутреннего угла α_j при вершине P_j от π ; минимального удаления от начала координат вершины P_j ; максимального различия длин ребер e_{j-1} и e_j , содержащих вершину P_j . Оценка (3.7) определяет наибольшую погрешность решения (3.5) задачи (1.1) в случае максимального отличия границы Γ многоугольника Ω от окружности. Результаты

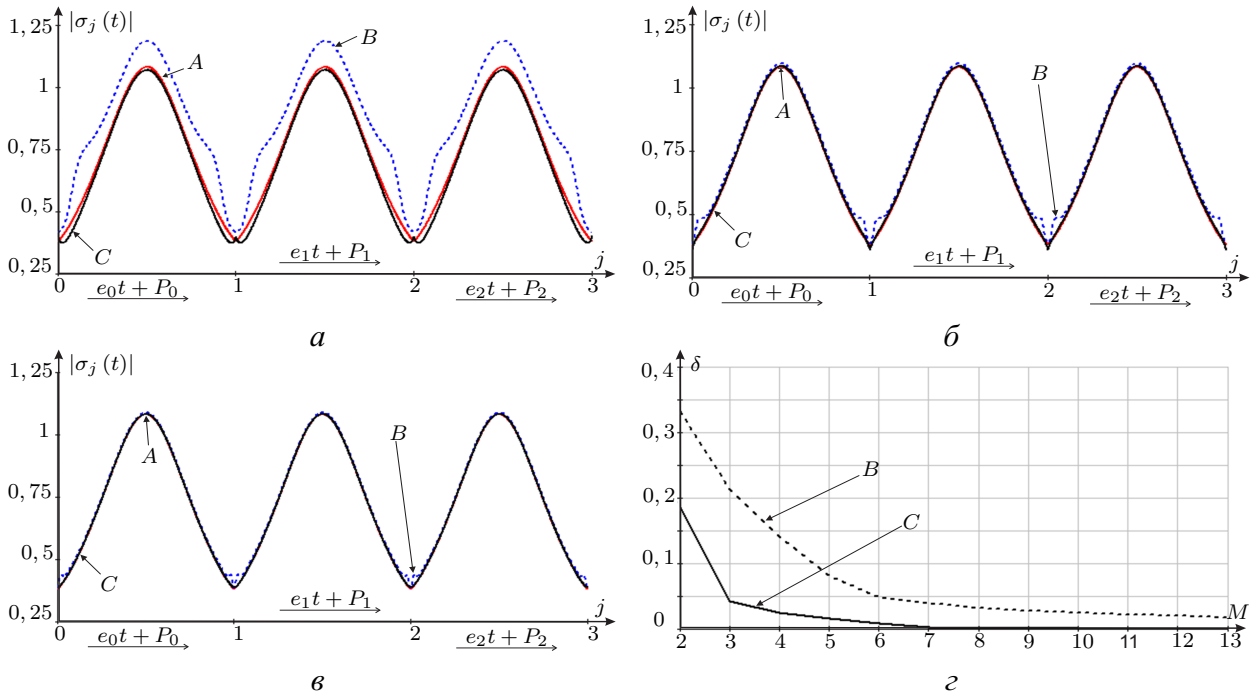


Рис. 1. Расчет $|\sigma_j^M(t)|$ на ребрах треугольника для $M = 3$ (а), $M = 6$ (б), $M = 9$ (в), и зависимость δ от M (г) при сравнении результатов в отношении точного (А), существующих (В) и предложенного (С) решений

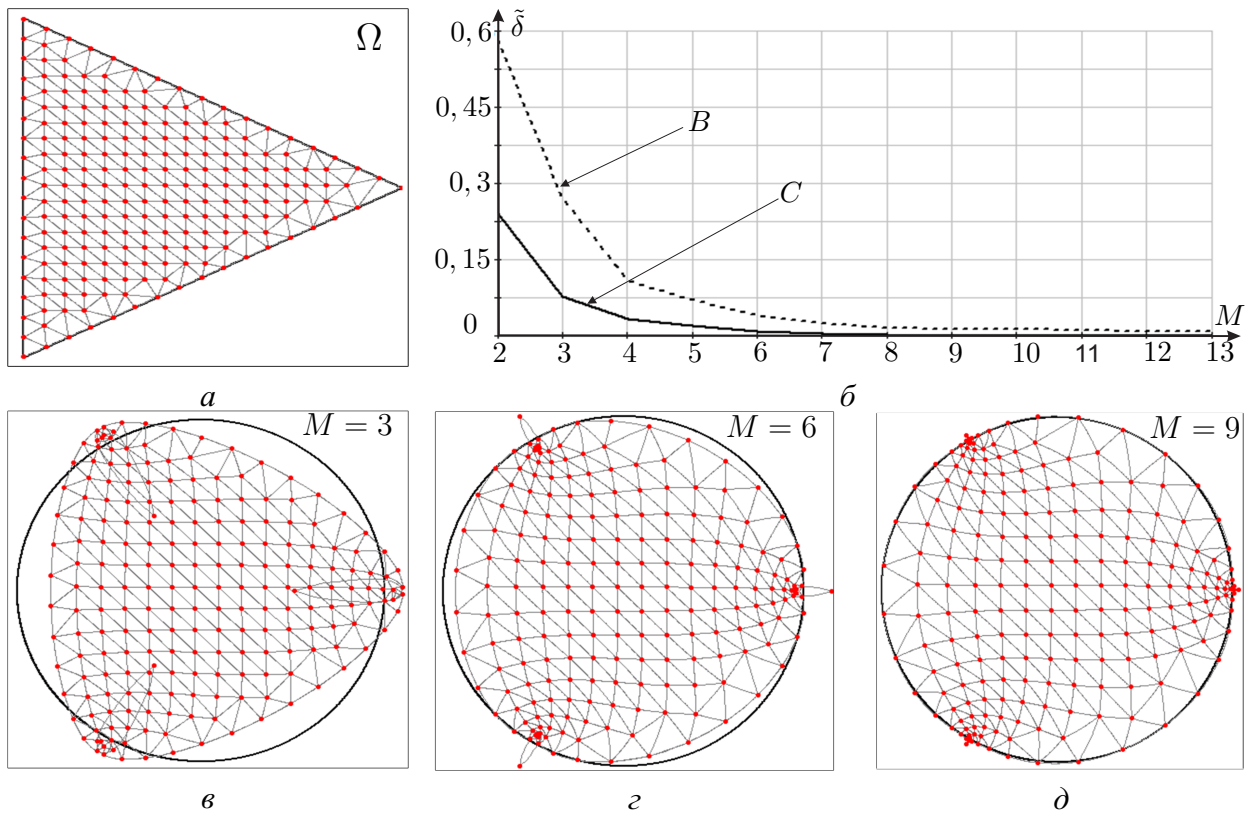


Рис. 2. Конформное отображение Ω (а) по правилу (3.5) на B_1 для $M = 3$ (б), $M = 6$ (в), $M = 9$ (д) и зависимость $\tilde{\delta}$ от M (г) при сравнении результатов в отношении существующих (В) и предложенного (С) решений

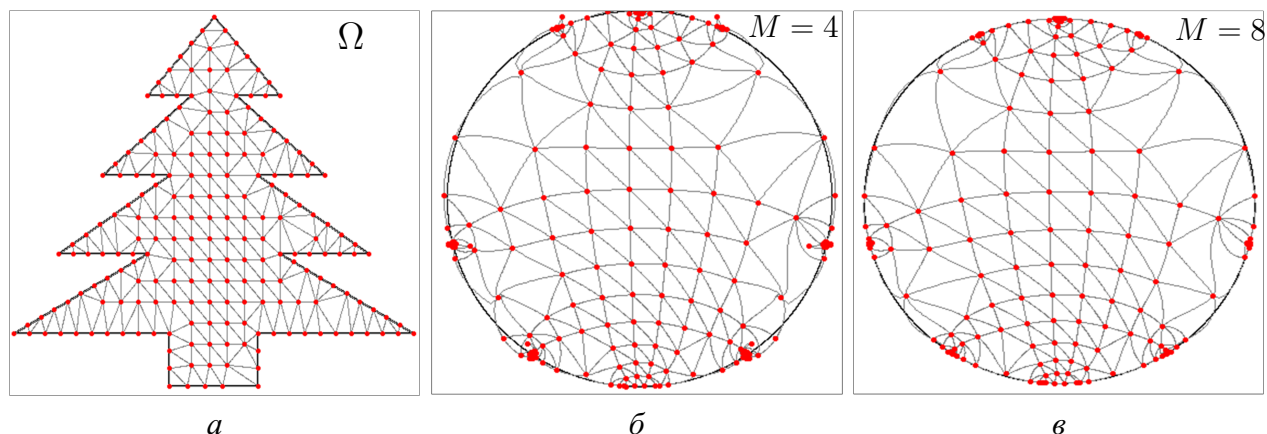


Рис. 3. Пример расчета $\tilde{f}_M(z)$ для вогнутого девятнадцатиугольника (а) при $M = 4$ (б), $M = 8$ (в)

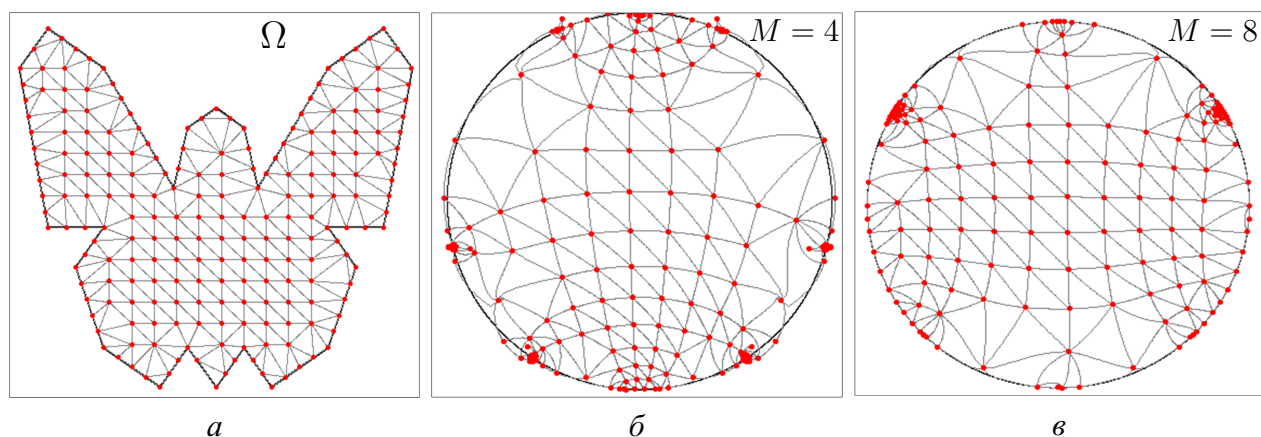


Рис. 4. Пример расчета $\tilde{f}_M(z)$ для вогнутого двадцатичетырёхугольника (а) при $M = 4$ (б), $M = 8$ (в)

моделирования (рис. 1–4) при получении апостериорных оценок подтверждают справедливость (3.5)–(3.7) и свидетельствуют о предпочтительности предложенного приближенно-аналитического решения задачи (1.1) в сравнении с известными [15]. Высокая точность предложенного приближенно-аналитического решения (3.5) обеспечивается при небольших значениях $M \in [8; 14]$ (см. рис. 3, 4). Заданное правило (2.12) с учетом рекуррентных представлений (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) в сравнении с [16] позволяют обеспечить высокую вычислительную устойчивость итогового решения (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Driscoll T. A., Trefethen L. N. Schwarz–Christoffel mapping. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546808>
2. Полянский И. С. Баричесентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл: Академия ФСО России, 2017.
3. Григорьев О. А. Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 10. С. 1629–1638. <https://doi.org/10.7868/S0044466913100074>
4. Badreddine M., DeLillo T. K., Sahraei S. A comparison of some numerical conformal mapping methods for simply and multiply connected domains // Discrete and Continuous Dynamical Systems.

- Сер. В. 2019. Vol. 24. No. 1. P. 55–82. <https://doi.org/10.3934/dcddb.2018100>
5. Полянский И. С., Пехов Ю. С. Бариеентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 5 (54). С. 244–262.
 6. Favraud G., Pagneux V. Multimodal method and conformal mapping for the scattering by a rough surface // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2015. Vol. 471. No. 2175. 20140782. <https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0782>
 7. Радыгин В. М., Полянский И. С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 25–35. <https://doi.org/10.17223/19988621/39/3>
 8. Радыгин В. М., Полянский И. С. Методы конформных отображений многогранников в \mathbb{R}^3 // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 60–68. <https://doi.org/10.20537/vm170106>
 9. Nasser M. M. S., Vuorinen M. Conformal invariants in simply connected domains // Computational Methods and Function Theory. 2020. Vol. 20. Issue 3. P. 747–775. <https://doi.org/10.1007/s40315-020-00351-8>
 10. Hao Y., Simoncini V. Matrix equation solving of PDEs in polygonal domains using conformal mappings // Journal of Numerical Mathematics. 2021. Vol. 29. No. 3. P. 221–244. <https://doi.org/10.1515/jnma-2020-0035>
 11. Trefethen L. N. Numerical conformal mapping with rational functions // Computational Methods and Function Theory. 2020. Vol. 20. Issue 3. P. 369–387. <https://doi.org/10.1007/s40315-020-00325-w>
 12. Barnett A. H. Evaluation of layer potentials close to the boundary for Laplace and Helmholtz problems on analytic planar domains // SIAM Journal of Scientific Computing. 2014. Vol. 36. No. 2. P. A427–A451. <https://doi.org/10.1137/120900253>
 13. Широкова Е. А. О приближенном конформном отображении единичного круга на односвязную область // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 57–67. <http://mi.mathnet.ru/ivm8880>
 14. Богатырев А. Б. Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Математический сборник. 2012. Т. 203. № 12. С. 35–56. <https://doi.org/10.4213/sm8087>
 15. Wala M., Klöckner A. Conformal mapping via a density correspondence for the double-layer potential // SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. Vol. 40. No. 6. P. A3715–A3732. <https://doi.org/10.1137/18M1174982>
 16. Ильинский А. С., Полянский И. С. Приближенный метод определения гармонических бариеентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 3. С. 391–408. <https://doi.org/10.1134/S0044466919030098>
 17. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
 18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
 19. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
 20. Jung Y., Lim M. Series expansions of the layer potential operators using the Faber polynomials and their applications to the transmission problem // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2021. Vol. 53. No. 2. P. 1630–1669. <https://doi.org/10.1137/20M1348698>
 21. Kress R. Linear integral equations. New York: Springer, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3>
 22. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
 23. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
 24. Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. № 1. С. 55–67. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21421992>
 25. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.

26. Арушанян И. О. О численном решении граничных интегральных уравнений II рода в областях с угловыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 6. С. 101–113. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf2235>

Поступила в редакцию 26.03.2021

Принята к публикации 10.12.2021

Полянский Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., сотрудник, Академия ФСО России, 302024, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1282-1522>

E-mail: van341@mail.ru

Логинов Кирилл Олегович, сотрудник, Академия ФСО России, 302024, Россия, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8715-6029>

E-mail: kvirs@mail.ru

Цитирование: И. С. Полянский, К. О. Логинов. Приближенный метод решения задачи конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 107–129.

I. S. Polyanskii, K. O. Loginov

Approximate method for solving the problem of conformal mapping of an arbitrary polygon to a unit circle

Keywords: conformal mapping, arbitrary polygon, Schwartz problem, logarithmic double layer potential, complex density function, Fredholm equation, Legendre polynomials.

MSC2020: 30C20

DOI: [10.35634/vm220108](https://doi.org/10.35634/vm220108)

In the article, an approximate analytical solution of the problem of conformal mapping of internal points of an arbitrary polygon to a unit circle is developed. At the preliminary stage, the conformal mapping problem is formulated as a boundary value problem (Schwartz problem). The latter is reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the second kind with a Cauchy-type kernel with respect to an unknown complex density function at the boundary domain, followed by the calculation of the Cauchy integral. The developed approximate analytical solution is based on the Cauchy kernel decomposition in the Legendre polynomial system of the first and second kind. A priori and a posteriori estimates of the convergence and accuracy of the given solution are fulfilled. The exponential convergence of the solution in $L_2([0, 1])$ and the polynomial one in $C([0, 1])$ are defined. Calculations on test examples are given for a visual comparison of the effectiveness of the developed solution.

REFERENCES

1. Driscoll T. A., Trefethen L. N. *Schwarz–Christoffel mapping*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546808>
2. Polyanskii I. S. *Baritsentricheskii metod v vychislitel'noi elektrodinamike* (Barycentric method in computational electrodynamics), Orel: Russian Federation Security Guard Service Federal Academy, 2017.
3. Grigor'ev O. A. Numerical-analytical method for conformal mapping of polygons with six right angles, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 10, pp. 1447–1456. <https://doi.org/10.1134/S0965542513100072>
4. Badreddine M., DeLillo T. K., Sahraei S. A comparison of some numerical conformal mapping methods for simply and multiply connected domains, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 55–82. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018100>
5. Polyanskii I. S., Pekhov Yu. S. Barycentric method in solving singular integral equations of the electrodynamic theory of mirror antennas, *SPIIRAS Proceedings*, 2017, issue 5 (54), pp. 244–262 (in Russian).
6. Favraud G., Pagneux V. Multimodal method and conformal mapping for the scattering by a rough surface, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2015, vol. 471, no. 2175, 20140782. <https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0782>
7. Radygin V. M., Polyanskii I. S. Modified method of successive conformal mappings of polygonal domains, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2016, no. 1 (39), pp. 25–35 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/19988621/39/3>
8. Radygin V. M., Polyanskii I. S. Methods of conformal mappings of polyhedra in \mathbb{R}^3 , *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 60–68 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170106>
9. Nasser M. M. S., Vuorinen M. Conformal invariants in simply connected domains, *Computational Methods and Function Theory*, 2020, vol. 20, issue 3, pp. 747–775. <https://doi.org/10.1007/s40315-020-00351-8>
10. Hao Y., Simoncini V. Matrix equation solving of PDEs in polygonal domains using conformal mappings, *Journal of Numerical Mathematics*, 2020, vol. 29, no. 3, pp. 221–244. <https://doi.org/10.1515/jnma-2020-0035>

11. Trefethen L.N.. Numerical conformal mapping with rational functions, *Computational Methods and Function Theory*, 2020, vol. 20, issue 3, pp. 369–387. <https://doi.org/10.1007/s40315-020-00325-w>
12. Barnett A.H. Evaluation of layer potentials close to the boundary for Laplace and Helmholtz problems on analytic planar domains, *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2014, vol. 36, no. 2, pp. A427–A451. <https://doi.org/10.1137/120900253>
13. Shirokova E.A. On the approximate conformal mapping of the unit disk on a simply connected domain, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, issue 3, pp. 47–56. <https://doi.org/10.3103/S1066369X14030050>
14. Bogatyrev A. B. Conformal mapping of rectangular heptagons, *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 12, pp. 1715–1735. <https://doi.org/10.1070/SM2012v203n12ABEH004284>
15. Wala M., Klöckner A. Conformal mapping via a density correspondence for the double-layer potential, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018, vol. 40, no. 6, pp. A3715–A3732. <https://doi.org/10.1137/18M1174982>
16. Il'inskii A. S., Polyanskii I. S. An approximate method for determining the harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 366–383. <https://doi.org/10.1134/S0965542519030096>
17. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems), Moscow: Nauka, 1977.
18. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1977.
19. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations), Moscow: Nauka, 1968.
20. Jung Y., Lim M. Series expansions of the layer potential operators using the Faber polynomials and their applications to the transmission problem, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2021, vol. 53, no. 2, pp. 1630–1669. <https://doi.org/10.1137/20M1348698>
21. Kress R. *Linear integral equations*, New York: Springer, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3>
22. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Tables of integrals, sums, series, and products), Moscow: Fizmatlit, 1963.
23. Hobson E. W. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
24. Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. On properties of integrals of the Legendre polynomial, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2014, vol. 47, no. 1, pp. 28–38. <https://doi.org/10.3103/S1063454114010051>
25. Krasnov M. L. *Integral'nye uravneniya* (Integral equations), Moscow: Nauka, 1975.
26. Arushanyan I. O. On the numerical solution of boundary integral equations of the second kind in domains with corner points, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1996, vol. 36, no. 6, pp. 773–782. <https://zbmath.org/?q=an:1161.65369>

Received 26.03.2021

Accepted 10.12.2021

Ivan Sergeevich Polyanskii, Doctor of Physics and Mathematics, Employee, Russian Federation Security Guard Service Federal Academy, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302024, Russia.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1282-1522>

E-mail: van341@mail.ru

Kirill Olegovich Loginov, Employee, Russian Federation Security Guard Service Federal Academy, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302024, Russia.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8715-6029>

E-mail: kvirs@mail.ru

Citation: I.S. Polyanskii, K.O. Loginov. Approximate method for solving the problem of conformal mapping of an arbitrary polygon to a unit circle, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 107–129.