УДК 517.588

© *Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков*

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НУЛЕВЫМ ПОТОКОМ ЧЕРЕЗ ОКРУЖНОСТИ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА НА $\mathbb{H}^2$

Классическим свойством периодической функции на вещественной оси является возможность ее представления тригонометрическим рядом Фурье. Естественным аналогом условия периодичности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ является постоянство интегралов от функции по всем шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Функции с указанным свойством можно разложить в ряд Фурье по сферическим гармоникам, коэффициенты которого разлагаются в ряды по функциям Бесселя. Этот факт допускает обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^m$, имеющие нулевой поток через сферы фиксированного радиуса. В данной работе изучаются векторные поля с нулевым потоком через окружности фиксированного радиуса на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Получено описание таких полей в виде рядов по гипергеометрическим функциям. Результаты, полученные в работе, можно использовать при решении задач, связанных с гармоническим анализом векторных полей на областях в $\mathbb{H}^2$.

Ключевые слова: векторные поля, плоскость Лобачевского, нулевые сферические средние, гипергеометрические ряды Горна.

DOI: 10.35634/vm220101

Введение

Пусть $V_r(\mathbb{R}^m)$ $(m \geqslant 2)$ — множество локально суммируемых функций в $\mathbb{R}^m$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса r. Класс $V_r(\mathbb{R}^m)$, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Ж. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [1–3] и монографии [4–6], содержащие обширную библиографию). Перечислим основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ [4–7]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [8, гл. 6] для функций с нулевыми сферическими средними.

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля [4–6, 9, 10]).

3. Теоремы о двух радиусах для класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ и его аналогов [1–7, 11, 12]. Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Ж. Дельсарта о двух радиусах для гармонических функций [13, 14].

4. Характеризация различных классов периодических в среднем функций посредством уравнения средних значений [4–6, 15–17].

5. Описание функций класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [4–6, 18, 19] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).

6. Проблема продолжения [4–6, 20, 21].

7. Теоремы о стирании особенностей [4–6, 19, 22, 23].

8. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным интегральным средним [5, 6, 24–30].

9. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [4–6, 31].

10. Интерполяционные задачи для функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ [32].

11. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [4–6, 9, 12, 25–27].

Отметим, что важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение векторных аналогов класса функций с нулевыми шаровыми (сферическими) средними, в частности, их описание в виде рядов по специальным функциям. Мотивацией для этой задачи может служить одномерный случай, где естественным аналогом класса $V_r(\mathbb{R}^m)$ является класс $2r$-периодических локально интегрируемых функций на вещественной оси. Если рассматривать функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие

$$f\,(x-r) - f\,(x+r) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса r. Согласно классической теории рядов Фурье, такие функции можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд. Нетривиальные обобщения этого факта на векторные поля в евклидовых пространствах получены в работах [7, 33]. При этом остается совершенно неисследованным случай неевклидовых пространств, например, пространств постоянной кривизны. Целью данной работы является описание векторных полей, имеющих нулевой поток через все окружности фиксированного радиуса на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

§ 1. Формулировка основного результата

Как обычно, будем отождествлять $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Пусть $B = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ — открытый единичный круг в $\mathbb{R}^2$ со стандартной структурой многообразия и с римановой структурой, задаваемой формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle_z = \frac{(\xi, \eta)}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1.1}$$

где ξ и η — произвольные касательные векторы в точке $z \in B$. Здесь через (ξ, η) обозначено каноническое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Это риманово многообразие называют моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (см., например, [34, раздел IV]).

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(B)$ действует транзитивно на B посредством конформных отображений. Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, реализованной на круге B. Гиперболическая метрика d на этой плоскости определяется равенством

$$d(0, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in B,$$

и условием инвариантности относительно группы $\mathcal{M}(B)$. Геодезический круг

$$B_R = \{x \in B \colon d(0, z) < R\} \quad (R > 0)$$

(соответственно, геодезическая окружность $S_R = \{z \in B \colon d(0, z) = R\}$) совпадает с открытым евклидовым кругом (соответственно, евклидовой окружностью) радиуса $\operatorname{th} R$ с центром в нуле. Гиперболические эквиваленты элемента площади $dxdy$ и элемента длины $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ в $\mathbb{R}^2$ определяются равенствами

$$dz_h = \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad ds_h = \frac{ds}{1 - x^2 - y^2}. \tag{1.2}$$

Гиперболическая дивергенция div_h гладкого векторного поля $\overrightarrow{A} \colon B_R \to \mathbb{C}^2$ связана с евклидовой дивергенцией div_e соотношением

$$\operatorname{div}_h \overrightarrow{A} = (1 - |z|^2)^2 \operatorname{div}_e \frac{\overrightarrow{A}}{(1 - |z|^2)^2}. \tag{1.3}$$

Поле $\overrightarrow{A} \in C^1(B_R)$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div}_h \overrightarrow{A} = 0$.

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ множество всех непрерывных векторных полей $\overrightarrow{A} \colon B_R \to \mathbb{C}^2$, имеющих нулевой поток через все геодезические окружности радиуса r, лежащие в B_R, т. е.

$$\mathcal{V}_r(B_R) = \Big\{ \overrightarrow{A} \in C(B_R) \colon \int_{gS_r} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n_h} \rangle \, ds_h = 0 \;\; \forall g \in \mathcal{M}(B) : gS_r \subset B_R \Big\},$$

где

$$\overrightarrow{n_h} = (1 - |z|^2) \overrightarrow{n}, \tag{1.4}$$

а $\overrightarrow{n}$ — евклидов единичный вектор внешней нормали к соответствующей гладкой кривой. Описание гладких полей класса $\mathcal{V}_r(B_R)$, приведенное ниже, опирается на свойства тригонометрических рядов Фурье и свойства некоторых специальных функций.

Пусть, как обычно, Γ — гамма-функция, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$ — символ Похгаммера, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т. е.

$$F(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j \, j!} z^j, \quad |z| < 1 \tag{1.5}$$

(см. [35, гл. 2, п. 2.1.1]). Функция $F(a, b; c; z)$ связана с неполной бета-функцией $B_z(\alpha, \beta)$ формулой

$$F(a, b; b+1; z) = bz^{-b} B_z(b, 1-a) \tag{1.6}$$

(см. [36, гл. 7, п. 7.3.1, формула (28)]).

Обозначим $N(r)$ — множество положительных корней λ уравнения

$$P^{-1}_{-(i\lambda+1)/2}(\operatorname{ch} 2r) = 0,$$

где $P^{\mu}_{\zeta}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\mu/2} F\left(-\zeta, \zeta+1; 1-\mu; \frac{1-t}{2}\right)$ — функция Лежандра первого рода [35, гл. 3, § 3.2]. Отметим, что множество $N(r)$ имеет вид $N(r) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, причем

$$\lambda_j \sim \frac{\pi}{r} j, \quad j \to \infty$$

(см. [37, лемма 7]).

Пусть ρ, φ ($\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) — полярные координаты точки $z = (x, y) \in \mathbb{C}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ такие, что

$$z = (x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Всякой функции $f \in C(B_R)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(\rho)e^{ik\varphi}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}, \tag{1.7}$$

где

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad 0 < \rho < \operatorname{th} R. \tag{1.8}$$

Всюду в дальнейшем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \dfrac{i\lambda + 1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}$, $\rho \in [0, 1)$ обозначим

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \rho^{|k|}(1 - \rho^2)^2 H_{\lambda,k}(\rho), \tag{1.9}$$

где

$$H_{\lambda,k}(\rho) = \frac{1}{2\rho^{|k|+2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu + |k|)_j\,(\nu)_j}{j!\,(|k| + 1)_j}\,B_{\rho^2}\left(j + \frac{|k| + 2}{2}, \nu - 1\right). \tag{1.10}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, лежащем в промежутке $[0; 1)$ (см. доказательство леммы 7 ниже).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$, $r < R \leqslant +\infty$, $\overrightarrow{A}\colon B_R \to \mathbb{C}^2$ — векторное поле класса C^∞. Для того чтобы $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overrightarrow{A}(z) = (1 - |z|^2)^2\mathcal{B}(z)\overrightarrow{z} + \overrightarrow{C}(z), \quad z \in B_R, \tag{1.11}$$

где $\overrightarrow{C}$ — соленоидальное векторное поле класса C^∞, $\mathcal{B}$ — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \sum_{\lambda\in N(r)} \gamma_{k,\lambda}\,\rho^{|k|}H_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \operatorname{th} R, \tag{1.12}$$

в которых константы $\gamma_{k,\lambda}$ убывают быстрее любой фиксированной степени λ при $\lambda \to \infty$.

Из следствия 1 ниже видно, что ряд (1.12) можно почленно дифференцировать на $[0, 1)$ любое число раз. Отметим также, что функции $H_{\lambda,k}$ выражаются через гипергеометрический ряд Горна двух переменных (см. [38, введение], [39, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{H}^2$ с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$, $\operatorname{cl}\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Если $\overrightarrow{A} \in C^1(\operatorname{cl}\mathcal{D})$, то*

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}_h \overrightarrow{A}\, dz_h = \int_{\partial\mathcal{D}} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n_h}\rangle\, ds_h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равенств (1.1), (1.2) и (1.4), имеем

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h}\rangle\, ds_h = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h})}{(1-|z|^2)^2}\frac{ds}{(1-|z|^2)} = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\overrightarrow{A},\overrightarrow{n})}{(1-|z|^2)^2}\, ds.$$

Используя теперь формулу Грина и формулы (1.2), (1.3), получаем

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h}\rangle\, ds_h = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}_e \frac{\overrightarrow{A}}{(1-|z|^2)^2}\, dxdy = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}_h \overrightarrow{A}\, dz_h.$$

Таким образом, лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^1(B_R)$ *и*

$$F(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Тогда коэффициенты Фурье функций f *и* F *связаны соотношением*

$$F_k(\rho) = \rho f_k'(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \operatorname{th} R. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения коэффициентов Фурье и функции F имеем

$$\begin{gathered} F_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(\rho e^{i\varphi}) + \rho\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(\rho e^{i\varphi})\right)e^{-ik\varphi}d\varphi. \end{gathered} \tag{2.2}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (1.8) по ρ, получаем

$$f_k'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(\rho e^{i\varphi}) + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(\rho e^{i\varphi})\right)e^{-ik\varphi}d\varphi. \tag{2.3}$$

Сравнивая формулы (2.2) и (2.3), приходим к соотношению (2.1). □

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{B} \in C^1(B_R)$, $\overrightarrow{B}(z) = (1-|z|^2)^2\mathcal{B}(z)\overrightarrow{z}$. *Тогда*

$$(1-|z|^2)^{-2}(\operatorname{div}_h\overrightarrow{B})(z) = 2\mathcal{B}(z) + x\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}(z) + y\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}(z). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.3), имеем

$$\begin{gathered} (1-|z|^2)^{-2}(\operatorname{div}_h\overrightarrow{B})(z) = \operatorname{div}_e(\mathcal{B}(z)\overrightarrow{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{B}(z)x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{B}(z)y) = \\ = 2\mathcal{B}(z) + x\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}(z) + y\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}(z), \end{gathered}$$

что и требовалось. □

Лемма 4. *Пусть* $\overrightarrow{A} \in C^2(B_R)$ *и*

$$\overrightarrow{B}(z) = (1-|z|^2)^2\mathcal{B}(z)\overrightarrow{z}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{B}(z) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \overrightarrow{A})(tz)\, t}{(1-t^2|z|^2)^2}\, dt.$$

Тогда

$$\operatorname{div}_h \overrightarrow{B} = \operatorname{div}_h \overrightarrow{A}. \tag{2.6}$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \overrightarrow{A})_k(t\rho)\, t}{(1-t^2\rho^2)^2}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Для краткости положим

$$f(z) = \frac{(\operatorname{div}_h \overrightarrow{A})(z)}{(1-|z|^2)^2}.$$

Используя (2.4) и формулу

$$x\frac{\partial}{\partial x}(f(tz)) + y\frac{\partial}{\partial y}(f(tz)) = t\frac{d}{dt}(f(tz)),$$

находим

$$(1-|z|^2)^{-2}(\operatorname{div}_h \overrightarrow{B})(z) = 2\int_0^1 f(tz)t\, dt + \int_0^1 t\left(x\frac{\partial}{\partial x}(f(tz)) + y\frac{\partial}{\partial y}(f(tz))\right) dt =$$
$$= 2\int_0^1 f(tz)t\, dt + \int_0^1 t^2\frac{d}{dt}(f(tz))\, dt.$$

Преобразуя последнее слагаемое с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(1-|z|^2)^{-2}(\operatorname{div}_h \overrightarrow{B})(z) = 2\int_0^1 f(tz)t\, dt + t^2 f(tz)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f(tz)t\, dt = f(z),$$

т. е. равенство (2.6) доказано.

Далее, используя (1.8) и теорему Фубини, имеем

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{B}(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(t\rho e^{i\varphi})tdt\, e^{-ik\varphi}d\varphi =$$
$$= \int_0^1 t\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi dt = \int_0^1 t f_k(t\rho)\, dt.$$

Отсюда следует равенство (2.7). □

Лемма 5. *Пусть* $a, b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b > 1$, $\rho_0 \in (0,1)$. *Тогда*

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]} |F(a,b;b+1;\rho^2)| \leqslant |b|(1-\rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a, 0\}}, \tag{2.8}$$

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]} \left|\frac{d}{d\rho}F(a,b;b+1;\rho^2)\right| \leqslant 2\rho_0|a||b|(1-\rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a+1, 0\}}. \tag{2.9}$$

Доказательство. В силу интегрального представления Эйлера гипергеометрической функции, при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ имеем

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt$$

(см. [35, гл. 2, п. 2.1.3, формула (10)]). В частности, если $\operatorname{Re} b > 0$, $0 \leqslant \rho < 1$, то

$$\frac{F(a, b; b+1; \rho^2)}{b} = \int_0^1 t^{b-1}(1 - t\rho^2)^{-a} dt. \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно получить оценку (2.8). Оценка (2.9) следует из (2.8) и следующей формулы дифференцирования гипергеометрической функции:

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) \tag{2.11}$$

(см. [35, гл. 2, п. 2.1.2, формула (7)]). □

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\rho \in [0, 1)$ положим

$$h_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} \rho^{|k|} (1 - \rho^2)^{\nu} F\left(\nu + |k|, \nu; |k| + 1; \rho^2\right), \tag{2.12}$$

где, как и выше, $\nu = \nu(\lambda) = \dfrac{1}{2}(i\lambda + 1)$. Если $\lambda \in (0, +\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, имеет место оценка

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d^s}{d\rho^s} h_{\lambda,k}(\rho) \right| = O(\lambda^s), \quad \lambda \to \infty \tag{2.13}$$

(см. [37, лемма 2]). Отметим также равенство

$$(\mathcal{L} + (\lambda^2 + 1) Id)(h_{\lambda,k}(\rho) e^{ik\varphi}) = 0,$$

где Id — тождественный оператор, $\mathcal{L}$ — оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbb{H}^2$, т. е.

$$\mathcal{L} = (1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

(см. [37, § 2, формула (9)]).

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $V_r(B_R)$ множество функций $f \in L_{loc}(B_R)$, для которых

$$\int_{gB_r} f(x, y) dz_h = 0$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B)$, таких что $g(\operatorname{cl} B_r) \subset B_R$. Следующий результат получен В. В. Волчковым (см. [37, лемма 14, теорема 3]).

Теорема 2. 1) *Пусть $f \in L_{loc}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда (1.7) имеет вид*

$$f_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 < \rho < \operatorname{th} R, \tag{2.14}$$

где $c_{k,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\sum\limits_{\lambda \in N(r)} |c_{k,\lambda}| < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

2) *Пусть $f \in V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство (2.14), где $c_{k,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \to \infty$ для любого $s \in \mathbb{Z}_+$.*

Лемма 6. *Имеет место интегральное представление*

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} \int_0^1 \left(\frac{1 - \rho^2}{1 - t^2\rho^2} \right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho)\, t\, dt, \quad 0 \leqslant \rho < 1. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.12) и (1.5) следует, что

$$\frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}}\int_0^1\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho)\,t\,dt=$$
$$=\rho^{|k|}(1-\rho^2)^2\int_0^1 t^{|k|+1}(1-t^2\rho^2)^{\nu-2}F\left(\nu+|k|,\nu;|k|+1;t^2\rho^2\right)dt=$$
$$=\rho^{|k|}(1-\rho^2)^2\int_0^1 t^{|k|+1}(1-t^2\rho^2)^{\nu-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j}{(|k|+1)_j\,j!}t^{2j}\rho^{2j}dt.$$

В силу признака Вейерштрасса, указанный ряд сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$. Поэтому после его почленного интегрирования и замены переменной $t=\sqrt{u}$ в интеграле, приходим к равенству

$$\frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}}\int_0^1\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho)\,t\,dt=$$
$$=\rho^{|k|}(1-\rho^2)^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j}{2j!\,(|k|+1)_j}\rho^{2j}\int_0^1 u^{j+\frac{|k|}{2}}(1-u\rho^2)^{\nu-2}du.$$

Используя теперь (2.10), (1.10), (1.6) и (1.9), получаем (2.15). □

Следствие 1. *Если $\lambda\in(0,+\infty)$, то при любых $\rho_0\in(0,1)$, $s\in\mathbb{Z}_+$, справедлива оценка*

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]}\left|\frac{d^s}{d\rho^s}\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho)\right|=O(\lambda^{s-|k|}),\quad \lambda\to\infty. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (2.15) с применением формулы Лейбница, имеем

$$\frac{d^s}{d\rho^s}\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho)=\frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}}\sum_{m=0}^{s}\frac{s!}{m!(s-m)!}\times\int_0^1 t^{m+1}h^{(m)}_{\lambda,k}(t\rho)\frac{d^{s-m}}{d\rho^{s-m}}\left(\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^2\right)dt.$$

Отсюда и из (2.13) получаем требуемое. □

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\rho^{|k|}(1-\rho^2)^2\left[\rho H'_{\lambda,k}(\rho)+(|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho)\right]=\frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}}h_{\lambda,k}(\rho).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу асимптотики

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)}=z^{\alpha-\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right),\quad |\arg z|<\pi$$

(см. [35, гл. 1, § 1.18, формула (4)]), имеем

$$\left|\frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j}{j!\,(|k|+1)_j\,(2j+|k|+2)}\right|\sim\frac{|k|!}{2\,|\Gamma\left(\nu+|k|\right)\Gamma\left(\nu\right)|}j^{-\operatorname{Im}\lambda-2},\quad j\to+\infty.$$

Отсюда, из леммы 5 и (1.6) видно, что ряд (1.10) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно на отрезке $[0,\rho_0]$ при любом $\rho_0<1$. Поэтому, используя (2.11), (1.6) и теорему о дифференцировании функционального ряда, находим

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j\,\rho^{2j}}{j!\,(|k|+1)_j} \left(F\left(2-\nu, j+1+\frac{|k|}{2}; j+2+\frac{|k|}{2}; \rho^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2-\nu)\rho^2}{j+1+\dfrac{|k|+2}{2}} F\left(2-\nu+1, j+2+\frac{|k|}{2}; j+3+\frac{|k|}{2}; \rho^2\right)\right).$$

Выражение с гипергеометрическими функциями в скобках преобразуется с помощью формулы

$$F\,(a,b;c;z) + \frac{az}{c} F\,(a+1,b+1;c+1;z) = F\,(a,b+1;c;z)$$

(см. [40, гл. 7, § 5, п. 2, формула (16)]). При этом получаем

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j\,\rho^{2j}}{j!\,(|k|+1)_j} F\left(2-\nu, j+2+\frac{|k|}{2}; j+2+\frac{|k|}{2}; \rho^2\right).$$

Поскольку

$$F\,(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}$$

(см. [35, гл. 2, § 2.8, п. 2, формула (1)]), последнее соотношение можно записать в виде

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) = (1-\rho)^{\nu-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j\,(\nu)_j\,\rho^{2j}}{j!\,(|k|+1)_j}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из (1.5) и (2.12). □

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда по лемме 1 гиперболическая дивергенция поля $\overrightarrow{A}$ принадлежит классу $V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Поэтому ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$(\mathrm{div}_h \overrightarrow{A})_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \mathrm{th}\, R, \tag{3.1}$$

где $c_{k,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $c_{k,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \to \infty$ для любого $s > 0$ (см. второе утверждение в теореме 2). Положим $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$, где векторное поле $\overrightarrow{B}$ определяется равенством (2.5). В силу соотношений (3.1), (2.13), (2.15) и леммы 4, поле $\overrightarrow{C}$ является соленоидальным и

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \int_0^1 \frac{t}{(1-t^2\rho^2)^2} \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(t\rho)dt = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} \frac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} \rho^{|k|}\, H_{\lambda,k}(\rho).$$

При этом коэффициенты $\gamma_{k,\lambda} = \dfrac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} c_{k,\lambda}$ ведут себя как $O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \to \infty$ для любого $s > 0$. Тем самым необходимость в теореме 1 доказана.

Наоборот, пусть $\overrightarrow{A} \in C^\infty(B_R)$ и имеют место разложения (1.11), (1.12). Тогда (см. соотношения (2.4), (2.1), (2.16) и лемму 7)

$$(\mathrm{div}_h \overrightarrow{B})_k(\rho) = (1-\rho^2)^2 \left(\rho \mathcal{B}_k'(\rho) + 2\mathcal{B}_k(\rho)\right) =$$
$$= (1-\rho^2)^2 \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \rho^{|k|} (\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2) H_{\lambda,k}(\rho)) =$$
$$= \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} h_{\lambda,k}(\rho).$$

Это разложение и теорема 2 показывают, что $\mathrm{div}_h \overrightarrow{B} \in V_r(B_R)$. Учитывая, что $\mathrm{div}_h \overrightarrow{C} = 0$, отсюда и из леммы 1 заключаем, что $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. Dordrecht: Springer, 1992. P. 185–194. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2_17
2. Беренстейн К. А., Струппа Д. К. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111. http://mi.mathnet.ru/intf154
3. Zalcman L. Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Radon Transforms and Tomography. 2001. Vol. 278. P. 69–74.
4. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9
5. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer, 2009. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8
6. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8
7. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1972. Vol. 72. Issue 3. P. 403–416. https://doi.org/10.1017/S0305004100047241
8. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
9. Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // Journal d’Analyse Mathématique. 1994. Vol. 63. P. 255–286. https://doi.org/10.1007/BF03008426
10. Degtyarev S. P. Liouville property for solutions of the linearized degenerate thin film equation of fourth order in a halfspace // Results in Mathematics. 2016. Vol. 70. P. 137–161. https://doi.org/10.1007/s00025-015-0467-x
11. Ungar P. Freak theorem about functions on a sphere // Journal of the London Mathematical Society. 1954. Vol. s1-29. Issue 1. P. 100–103. https://doi.org/10.1112/JLMS/S1-29.1.100
12. Schneider R. Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1969. Vol. 26. Issue 2. P. 381–384. https://doi.org/10.1016/0022-247x(69)90160-7
13. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 246. P. 1358–1360 (in French). https://zbmath.org/0084.09403
14. Netuka I., Veselý J. Mean value property and harmonic functions // Classical and modern potential theory and applications. Dordrecht: Springer, 1994. P. 359–398. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1138-6_29
15. Kuznetsov N. Mean value properties of harmonic functions and related topics (a survey) // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 242. Issue 2. P. 177–199. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04473-w

16. Trofymenko O. D. Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 229. Issue 1. P. 96–107. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3664-9
17. Trofymenko O. D. Mean value theorems for polynomial solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 254. Issue 3. P. 439–443. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05315-4
18. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34. http://mi.mathnet.ru/msb43
19. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30. https://doi.org/10.4213/sm255
20. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Непрерывное периодическое в среднем продолжение функций с отрезка // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. № 1. С. 21–25. https://doi.org/10.31857/S2686954321010185
21. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Непрерывное продолжение функций с отрезка до функций в $\mathbb{R}^n$ с нулевыми шаровыми средними // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 3. С. 3–14. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-3-3-14
22. Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А. Стирание особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23. № 2. С. 19–33. https://doi.org/10.46698/u3425-9673-4629-c
23. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 543–552. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.306
24. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // Journal d'Analyse Mathématique. 1990. Vol. 54. P. 259–287. https://doi.org/10.1007/bf02796152
25. Berkani M., El Harchaoui M., Gay R. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 2000. Vol. 43. Issue 1. P. 29–57. https://doi.org/10.1080/17476930008815300
26. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Доклады Академии наук. 2001. Т. 379. № 5. С. 587–590. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44507980
27. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. Вып. 5. С. 169–197. http://mi.mathnet.ru/aa820
28. Rubin B. Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections // Analysis and Mathematical Physics. 2019. Vol. 9. Issue 4. P. 1627–1664. https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1
29. Salman Y. Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres // Analysis and Mathematical Physics. 2017. Vol. 7. Issue 2. P. 165–185. https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7
30. Hielscher R., Quellmalz M. Reconstructing a function on the sphere from its means along vertical slices // Inverse Problems and Imaging. 2016. Vol. 10. Issue 3. P. 711–739. https://doi.org/10.3934/ipi.2016018
31. Ochakovskaya O. A. Approximation in L^p by linear combinations of the indicators of balls // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 218. No. 1. P. 39–46. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3009-5
32. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Интерполяционные задачи для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 490. № 1. С. 20–23. https://doi.org/10.31857/S268695432001021X
33. Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20. Вып. 4. С. 20–34. https://doi.org/10.23671/VNC.2018.4.23384
34. Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.

35. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М.: Наука, 1966.
36. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Физматлит, 2003.
37. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 3–26. https://doi.org/10.4213/im326
38. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // УМН. 1992. Т. 47. Вып. 4 (286). С. 3–82. http://mi.mathnet.ru/umn4540
39. Садыков Т. М., Цих А. К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014. https://elibrary.ru/item.asp?id=41147144
40. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 28.01.2022

Принята к публикации 07.03.2022

Волчкова Наталья Петровна, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики им. В. В. Пака, Донецкий национальный технический университет, 283000, ДНР, г. Донецк, ул. Артема, 58.
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6193-2782
E-mail: volna936@gmail.com

Волчков Виталий Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет, 283001, ДНР, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4274-0034
E-mail: volna936@gmail.com

Цитирование: Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков. Векторные поля с нулевым потоком через окружности фиксированного радиуса на $\mathbb{H}^2$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 3–17.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 1. Pp. 3–17.

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov

Vector fields with zero flux through circles of fixed radius on $\mathbb{H}^2$

Keywords: vector fields, Lobachevskii plane, zero spherical means, Horn hypergeometric series.

MSC2020: 53C65, 44A35

DOI: 10.35634/vm220101

A classic property of a periodic function on the real axis is the possibility of its representation by a trigonometric Fourier series. The natural analogue of the periodicity condition in Euclidean space $\mathbb{R}^m$ is the constancy of integrals of a function over all balls (or spheres) of fixed radius. Functions with the indicated property can be expanded in a Fourier series in terms of spherical harmonics whose coefficients are expanded into series in Bessel functions. This fact can be generalized to vector fields in $\mathbb{R}^m$ with zero flux through spheres of fixed radius. In this paper we study vector fields which have zero flux through every circle of fixed radius on the Lobachevskii plane $\mathbb{H}^2$. A description of such fields in the form of series in terms of hypergeometric functions is obtained. These results can be used to solve problems concerning harmonic analysis of vector fields on domains in $\mathbb{H}^2$.

REFERENCES

1. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem, *Approximation by solutions of partial differential equations*, Dordrecht: Springer, 1992, pp. 185–194. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2436-2_17
2. Berenstein C. A., Struppa D. C. Complex analysis and convolution equations, *Several complex variables. V: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Berlin: Springer, 1993, vol. 54, pp. 1–108. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58011-6_1
3. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74.
4. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations*, Dordrecht: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9
5. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, London: Springer, 2009. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8
6. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*, Basel: Birkhäuser, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0572-8
7. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, issue 3, pp. 403–416. https://doi.org/10.1017/S0305004100047241
8. John F. *Plane waves and spherical means. Applied to partial differential equations*, New York: Springer, 1981. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9453-2
9. Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1994, vol. 63, pp. 255–286. https://doi.org/10.1007/BF03008426
10. Degtyarev S. P. Liouville property for solutions of the linearized degenerate thin film equation of fourth order in a halfspace, *Results in Mathematics*, 2016, vol. 70. pp. 137–161. https://doi.org/10.1007/s00025-015-0467-x
11. Ungar P. Freak theorem about functions on a sphere, *Journal of the London Mathematical Society*, 1954, vol. s1-29, issue 1, pp. 100–103. https://doi.org/10.1112/JLMS/S1-29.1.100
12. Schneider R. Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969, vol. 26, issue 2, pp. 381–384. https://doi.org/10.1016/0022-247x(69)90160-7
13. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 246, pp. 1358–1360. https://zbmath.org/0084.09403

14. Netuka I., Veselý J. Mean value property and harmonic functions, *Classical and modern potential theory and applications*, Dordrecht: Springer, 1994, pp. 359–398. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1138-6_29
15. Kuznetsov N. Mean value properties of harmonic functions and related topics (a survey), *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 242, issue 2, pp. 177–199. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04473-w
16. Trofymenko O. D. Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 229, issue 2, pp. 96–107. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3664-9
17. Trofymenko O. D. Mean value theorems for polynomial solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 254, issue 3, pp. 439–443. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05315-4
18. Volchkov V. V. A definitive version of the local two-radii theorem, *Sb. Math.*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 783–802. https://doi.org/10.1070/SM1995v186n06ABEH000043
19. Volchkov V. V. Solution of the support problem for several function classes, *Sb. Math.*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294. https://doi.org/10.1070/SM1997v188n09ABEH000255
20. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Continuous mean periodic extension of functions from an interval, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 14–18. https://doi.org/10.1134/S106456242101018X
21. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Continuous extension of functions from a segment to functions in $\mathbb{R}^n$ with zero ball means, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 1–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X21030014
22. Volchkova N. P., Volchkov Vit. V., Ishchenko N. A. Erasing of singularities of functions with zero integrals over disks, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 19–33 (in Russian). https://doi.org/10.46698/u3425-9673-4629-c
23. Volchkov Vit. V., Volchkova N. P. The removability problem for functions with zero spherical means, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 419–426. https://doi.org/10.1134/S0037446617030065
24. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1990, vol. 54, pp. 259–287. https://doi.org/10.1007/bf02796152
25. Berkani M., El Harchaoui M., Gay R. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules, *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 2000, vol. 43, issue 1, pp. 29–57. https://doi.org/10.1080/17476930008815300
26. Volchkov Vit. V., Volchkova N. P. Inversion of the local Pompeiu transformation on a quaternionic hyperbolic space, *Dokl. Math.*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 90–93. https://zbmath.org/1041.43005
27. Volchkov Vit. V., Volchkova N. P. Inversion theorems for the local Pompeiu transformation in the quaternion hyperbolic space, *St. Petersburg Math. J.*, 2004, vol. 15, no. 5, pp. 753–771. https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00830-1
28. Rubin B. Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections, *Analysis and Mathematical Physics*, 2019, vol. 9, issue 4, pp. 1627–1664. https://doi.org/10.1007/s13324-019-00290-1
29. Salman Y. Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres, *Analysis and Mathematical Physics*, 2017, vol. 7, issue 2, pp. 165–185. https://doi.org/10.1007/s13324-016-0135-7
30. Hielscher R., Quellmalz M. Reconstructing an function on the sphere from its means along vertical slices, *Inverse Problems and Imaging*, 2016, vol. 10, issue 3, pp. 711–739. https://doi.org/10.3934/ipi.2016018
31. Ochakovskaya O. A. Approximation in L^p by linear combinations of the indicators of balls, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 218, no. 1, pp. 39–46. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3009-5
32. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Interpolation problems for functions with zero integrals over balls of fixed radius, *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 101, no. 1, pp. 16–19. https://doi.org/10.1134/S1064562420010214
33. Volchkov Vit. V., Volchkova N. P. Vector fields with zero flux through spheres of fixed radius,

Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal, 2018, vol. 20, issue 4, pp. 20–34 (in Russian). https://doi.org/10.23671/VNC.2018.4.23384

34. Ahlfors L. V. *Möebius transformations in several dimensions*, Minneapolis: University of Minnesota, 1981. https://zbmath.org/0517.30001
35. Bateman H., Erdélyi A.. *Higher transcendental functions. Vols. I, II*, New York: McGraw-Hill, 1953.
36. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series. Vol. 3. Special functions. Additional chapters*, Moscow: Fizmatlit, 2003.
37. Volchkov V. V. A definitive version of the local two-radii theorem on hyperbolic spaces, *Izv. Math.*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 207–229. https://doi.org/10.1070/IM2001v065n02ABEH000326
38. Gel'fand I. M., Graev M. I., Retakh V. S. General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type, *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 1–88. https://doi.org/10.1070/RM1992v047n04ABEH000915
39. Sadykov T. M., Tsikh A. K. *Gipergeometricheskie i algebraicheskie funktsii mnogikh peremennykh* (Hypergeometric and algebraic functions in several variables), Moscow: Nauka, 2014. https://elibrary.ru/item.asp?id=41147144
40. Vilenkin N. Ja. *Special functions and the theory of group representations*, AMS, 1968. https://doi.org/10.1090/mmono/022

Received 28.01.2022

Accepted 07.03.2022

Natal'ya Petrovna Volchkova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics named after V. V. Pak, Donetsk National Technical University, ul. Artema, 58, Donetsk, 283000, DPR.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6193-2782
E-mail: volna936@gmail.com

Vitalii Vladimirovich Volchkov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Donetsk National University, ul. Universitetskaya, 24, Donetsk, 283001, DPR.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4274-0034
E-mail: volna936@gmail.com

Citation: N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov. Vector fields with zero flux through circles of fixed radius on $\mathbb{H}^2$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 3–17.