ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 562–577.

УДК 517.977.54

© *Б. И. Ананьев*

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются две задачи нелинейного гарантированного оценивания фазовых состояний динамических систем. Предполагается, что неизвестные измеримые по t возмущения линейно входят в уравнение движения и аддитивно — в уравнения измерения. Эти возмущения стеснены нелинейными интегральными функционалами, один из которых является аналогом функционала обобщенной работы. Исследуемая задача состоит в построении информационных множеств по данным измерения, содержащих истинное положение траектории. Используется подход динамического программирования. Если для первого функционала требуется решить нелинейное уравнение в частных производных первого порядка, что не всегда возможно, то для функционала обобщенной работы достаточно найти решение линейного уравнения Ляпунова первого порядка, что существенно упрощает задачу. Тем не менее, даже в этом случае приходится налагать дополнительные условия на параметры системы для того, чтобы траектория системы, соответствующая наблюдаемому сигналу, существовала. Если уравнение движения линейно по фазовой переменной, то многие предположения выполняются автоматически. Для этого случая обсуждается вопрос о взаимной оценке сверху и снизу информационных множеств по включению для разных функционалов. В заключение рассмотрен наиболее прозрачный линейно-квадратичный случай. Изложение иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: нелинейное гарантированное оценивание, информационные множества, функционал обобщенной работы.

DOI: 10.35634/vm210403

Задачи гарантированного оценивания имеют достаточно давнюю историю [1, 2]. В монографиях [3, 4] разработана более общая теория оценивания без статистики возмущений, основанная на результатах выпуклого и функционального анализа. Эллипсоидальные и численные методы были рассмотрены в [4, 5]. В предположении ограниченности в каком-либо смысле шума, воздействующего на систему, оценивающий процесс производится в терминах информационного множества. Такое множество связывается с каждым процессом измерения и содержит все возможные фазовые состояния, совместимые с измерениями и наложенными ограничениями. Различные аспекты гарантированного оценивания, в том числе и вопросы практического применения, для линейных и нелинейных систем рассматривались также в [6–8] и во многих других работах.

Данная работа посвящена изучению некоторых задач гарантированного оценивания со специальными ограничениями для шума. Рассматривается нелинейная векторная система с наблюдением вида

$$\dot{x} = f(t,x) + b(t,x)v, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{0.1}$$
$$y = g(t,x) + w, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{0.2}$$

Здесь x — фазовый вектор системы, не доступный для измерения; v, w — неопределенные измеримые вектор-функции от времени (возмущения); y — наблюдаемый вектор (выход); $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n. Предположения о функциях f, b, g сформулированы в следующем параграфе. При исследовании будем придерживаться подходов монографии [4], где имеется обширная библиография по рассматриваемой тематике.

§ 1. Задача с нелинейным функционалом и основные предположения

Отметим, что в координатной записи система (0.1) имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(t,x) + \sum_{j=1}^{r} b_{ij}(t,x)v_j, \quad i \in 1:n, \quad y_k = g_k(t,x) + w_k, \quad k \in 1:m,$$

где $1:n$ обозначает множество $\{1,\ldots,n\}$. Предположим, что неизвестные вектор-функции v, w в системе (0.1), (0.2) вместе с начальным состоянием $x(0)$ в момент $t = T$ стеснены ограничением

$$J = F(x(0)) + \int_0^T \left(Q(t,w(t)) + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j(t)|}{k_j} \right)^q \right) dt \leqslant 1, \tag{1.1}$$

где $k_j > 0$, $q > 1$ — константы.

Относительно функций в (0.1), (0.2), (1.1) сделаем следующее предположение.

Предположение 1. Вектор-функции f, g и матрица b непрерывны в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$; якобианы f_x, g_x существуют и непрерывны в D; якобиан F_x непрерывен в проекции множества D на $\mathbb{R}^n$; проекция множества D на $\mathbb{R}$ содержит отрезок $[0,T]$. Функция Q и ее якобиан Q_w непрерывны на $\mathbb{R}^{m+1}$. Неизвестные вектор-функции v, w принадлежат пространствам $L_q^r[0,T]$ и $L_\infty^m[0,T]$ соответственно.

Поскольку теорема Каратеодори [9, гл. 2, теорема 1.1] гарантирует лишь локальное существование решения уравнения (0.1) с возмущением $v(\cdot)$, делаем еще одно предположение.

Предположение 2. Наблюдаемая функция $y(\cdot)$ (см. (0.2)) для системы (0.1) на отрезке $[0,T]$ порождается некоторой тройкой $x(0), v(\cdot), w(\cdot)$ элементов, где $v(\cdot) \in L_q^r[0,T]$, $w(\cdot) \in$ $\in L_\infty^m[0,T]$, причем для каждого момента $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$F(x(0)) + \int_0^t \left(Q(s,w(s)) + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j(s)|}{k_j} \right)^q \right) ds \leqslant 1.$$

Здесь $x(0) \in D_0$ (D_0 — сечение множества D при $t = 0$); соответствующая траектория $(t, x(t)) \in D$ для всех $t \in [0,T]$.

Из предположения 2 следует существование решения с указанными данными на отрезке $[0,T]$. Отметим, что для линейных систем (0.1), (0.2) предположения 1, 2 выполняются автоматически. Введем основное определение.

Определение 1 (см. [4]). *Информационным множеством* (сокращенно ИМ) $\mathbf{X}(t,y)$ системы (0.1) в момент t называется совокупность всех векторов $\{x\}$, для которых найдется тройка $(x(0), v(\cdot), w(\cdot))$ такая, что функция (0.2) для системы (0.1) на отрезке $[0,t]$ почти всюду совпадает с измеренным сигналом $y(s)$, $s \in [0,t]$, $x(t) = x$ и выполняются ограничения предположения 2.

Задача с функционалом вида (1.1) состоит в нахождении ИМ $\mathbf{X}(t,y)$ для всякого t по данным наблюдения. Отметим, что ИМ $\mathbf{X}(t,y) \neq \varnothing$ для всех $t \in [0,T]$, поскольку хотя бы одна тройка совместимых элементов с данным сигналом существует по предположению 2. При этом истинное состояние $x(t) \in \mathbf{X}(t,y)$.

Один из методов решения задачи с функционалом вида (1.1) использует динамическое программирование [4, 10]. Введем функцию Беллмана

$$\mathbf{V}(t,x) = \min_{v(\cdot)} J(t,x,v), \tag{1.2}$$

где функционал $J(t,x,v)$ определяется формулой

$$J(t,x,v) = F(x(0)) + \int_0^t \left(Q(s, y(s) - g(s, x(s))) + \sum_{j=1}^r \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j(s)|}{k_j} \right)^q \right) ds, \quad x(t) = x.$$

Уравнение Беллмана для $\mathbf{V}(t,x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t &= \min_v \left\{ -\left(f(t,x) + b(t,x)v\right)' \mathbf{V}_x + Q(t, y(t) - g(t,x)) + \sum_{j=1}^r \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j|}{k_j} \right)^q \right\} = \\ &= -f'(t,x)\mathbf{V}_x + Q(t, y(t) - g(t,x)) - \sum_{j=1}^r \frac{k_j^p}{p} \left| b'_{\cdot j}(t,x)\mathbf{V}_x \right|^p, \quad \mathbf{V}(0,x) = F(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $b_{\cdot j}$ — j-й столбец матрицы b; $\mathbf{V}_x$ — вектор-столбец частных производных; $p = q/(q-1)$; минимум достигается на функциях

$$v_j^* = k_j^p \left| b'_{\cdot j}(t,x)\mathbf{V}_x \right|^{p-1} \operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}(t,x)\mathbf{V}_x \right), \quad j \in 1:r. \tag{1.4}$$

Замечание 1. В случае, если q — четное целое число, знаки модуля и sign в формулах (1.3), (1.4) можно опустить.

Уравнение (1.3) является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Если допустить, что это уравнение имеет гладкое решение $\mathbf{V}(t,x)$ при $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, и оптимальные управления с обратной связью (1.4) обеспечивают продолжимое на весь отрезок $t \in [0,T]$ решение уравнения (0.1), то, ввиду предположения 2, ИМ $\mathbf{X}(t,y)$ определится формулой

$$\mathbf{X}(t,y) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{V}(t,x) \leqslant 1 \}. \tag{1.5}$$

Можно попытаться найти негладкие решения для (1.3). В частности, минимаксное решение в смысле [10] для этого уравнения. Если функция $\mathbf{V}(t,x)$ (см. (1.2)) в каком-то смысле найдена, то ИМ $\mathbf{X}(t,y)$ *по определению задаем формулой* (1.5).

Замечание 2. В случае, когда q — достаточно большое число, то $p \approx 1$ и уравнение (1.3) в приближении примет более простой вид

$$\mathbf{V}_t = -f'(t,x)\mathbf{V}_x + Q(t, y(t) - g(t,x)) - \sum_{j=1}^r k_j \left| b'_{\cdot j}(t,x)\mathbf{V}_x \right|, \quad \mathbf{V}(0,x) = F(x).$$

Однако это уравнение, по-прежнему, нелинейное из-за наличия модуля.

Чтобы избежать численного решения уравнений (1.3) или уравнения в замечании 2, в следующем параграфе рассмотрим другую задачу, которую проще решить аналитическими методами.

§ 2. Задача с функционалом обобщенной работы и некоторые дополнительные предположения

Заменим функционал J в неравенстве (1.1) функционалом обобщенной работы:

$$I = F(x(0)) + \int_0^T \left(Q(t,w) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q} \left(\frac{|v_j|}{k_j} \right)^q + \frac{1}{p} \left(\frac{|\widetilde{v}_j|}{k_j} \right)^q \right) \right) dt \leqslant 1,$$
$$\text{где } \widetilde{v}_j = k_j^p \left| b'_{\cdot j}(t,x) V_x \right|^{p-1} \operatorname{sign} \left(b'_{\cdot j}(t,x) V_x \right), \quad j \in 1:r. \tag{2.1}$$

Здесь V_x и V_{x_i} — градиент и частные производные функции $V(t,x)$, которая является решением линейного дифференциального уравнения Ляпунова в частных производных:

$$V_t + f'(t,x)V_x = Q(t,w(t)) \quad \text{при почти всех} \quad t \in [0,T], \quad V(0,x) = F(x), \tag{2.2}$$

где V_x — вектор-столбец. Замечание 1 относительно числа q и модуля остается в силе. В условиях предположения 1 однозначное решение уравнения (2.2) достаточно просто находится методом характеристик (см., например, [11, с. 11]). Действительно, пусть $\eta(t,s,\xi)$ — единственное гладкое по своим аргументам решение уравнения $\dot{x} = f(t,x)$, то есть $\partial\eta(t,s,\xi)/\partial t = f(t,\eta(t,s,\xi))$, с начальным условием $\eta(s,s,\xi) = \xi$. Это решение определено на максимальном интервале существования при $t \in (\omega_-(s,\xi), \omega_+(s,\xi))$. Уравнение $x = \eta(t,s,\xi)$ в силу теоремы существования и единственности имеет решение $\xi = \eta(s,t,x)$, причем согласно теореме Пеано [12, теорема V.3.1] производная по t определяется формулой

$$\partial\eta/\partial x = -\eta'_x f(t,x).$$

Используя эту формулу и дифференцируя функцию

$$V(t,x) = F(\eta(0,t,x)) + \int_0^t Q(s,w(s))\,ds \tag{2.3}$$

как сложную, убеждаемся, что она решает уравнение (2.2) в открытом множестве

$$\widetilde{D} = \{(t,x) \mid 0 < t < \omega_+(0,\eta(0,t,x))\} \subset D. \tag{2.4}$$

Открытость множества (2.4) вытекает из полунепрерывности снизу функции ω_+. Фактически, множество (2.4) состоит из всех пар (t,x), для которых существует вектор $\xi \in D_0$ такой, что $x = \eta(t,0,\xi)$.

По аналогии с предположением 2 делаем еще одно предположение.

Предположение 3. Наблюдаемая функция $y(\cdot)$ (см. (0.2)) для системы (0.1) на отрезке $[0,T]$ порождается некоторой тройкой $x(0), v(\cdot), w(\cdot)$ элементов, где $v(\cdot) \in L_q^r[0,T]$, $w(\cdot) \in L_\infty^m[0,T]$, причем для каждого момента $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$F(x(0)) + \int_0^t \left(Q(s,w(s)) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q} \left(\frac{|v_j(s)|}{k_j} \right)^q + \frac{1}{p} \left(\frac{|\widetilde{v}_j(s,x(s))|}{k_j} \right)^q \right) \right) ds \leqslant 1. \tag{2.5}$$

Здесь $x(0) \in D_0$ (D_0 — сечение множества D при $t = 0$); соответствующая траектория $(t,x(t)) \in \widetilde{D}$ для всех $t \in [0,T]$; функции $\widetilde{v}_j$ определены в (2.1).

Из предположения 3, в частности, следует, что $\omega_+(0,x(0)) > T$.

В работе [13] функционалы типа (2.1) рассматривались применительно к задачам оптимального управления. Также аналогично предыдущему введем следующее определение.

Определение 2. Пусть выполнены предположения 1, 3. *Информационным множеством* (сокращенно Им) $X(t,y)$ системы (0.1) в момент t при ограничении вида (2.1) называется совокупность всех векторов $\{x\}$, для которых найдется тройка $(x(0), v(\cdot), w(\cdot))$ такая, что функция (0.2) для уравнения (0.1) на отрезке $[0,t]$ почти всюду совпадает с измеренным сигналом $y(s)$, $s \in [0,t]$, $x(t) = x$ и выполняются ограничения (2.2), (2.3), (2.5).

Задача с функционалом вида (2.1) состоит в нахождении Им $X(t,y)$ для всякого t по данным наблюдения. Отметим, что Им $X(t,y) \neq \varnothing$ для всех $t \in [0,T]$, поскольку хотя бы одна тройка совместимых элементов с данным сигналом существует по предположению 3. При этом истинное состояние $x(t) \in X(t,y)$.

Определим функционал $I(t,x,v)$ по формуле

$$I(t,x,v) = F(x(0)) + \int_0^t \left(\widetilde{Q}(s,x(s)) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q}\left(\frac{|v_j(s)|}{k_j}\right)^q + \frac{1}{p}\left(\frac{|\widetilde{v}_j(s,x(s))|}{k_j}\right)^q\right)\right) ds,$$
$$\widetilde{Q}(s,x) = Q(s, y(s) - g(s,x)), \quad x(t) = x,$$

где функции $\widetilde{v}_j$ определяются как в (2.1) и для функции $V(t,x)$ почти всюду по t выполняется уравнение

$$V_t + f'(t,x)V_x = \widetilde{Q}(t,x), \quad t \in [0,T], \quad V(0,x) = F(x), \tag{2.6}$$

в частных производных. Ниже будет показано, что минимум функционала $I(t,x,v)$ достигается на функциях

$$\widetilde{v}_j = k_j^p \left|b'_{\cdot j}(s,x)V_x\right|^{p-1} \operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}(s,x)V_x\right), \quad j \in 1:r, \tag{2.7}$$

где $V(s,x)$ — решение уравнения (2.6). Но для этого необходимо сделать дополнительное предположение.

Предположение 4. Для всякой пары $(t,x) \in \widetilde{D}$ (см. (2.4)), $t \in (0,T]$, существует единственное решение интегрального уравнения

$$\widetilde{x}(s) = x - \int_s^t \left(f(u,\widetilde{x}(u)) + \sum_{j=1}^r b_{\cdot j}(u,\widetilde{x}(u))\widetilde{v}_j(u,\widetilde{x}(u))\right) dt,$$

причем траектория $(s,\widetilde{x}(s))$ лежит в $\widetilde{D}$ для $\forall s \in [0,t]$.

При выполнении предположения 4 функционал $I(t,x,\widetilde{v})$ равен

$$F(\widetilde{x}(0)) + \int_0^t \left(\widetilde{Q}(s,\widetilde{x}(s)) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{|\widetilde{v}_j(s,\widetilde{x}(s))|}{k_j}\right)^q\right) ds.$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 3, 4. *Тогда минимум функционала* $I(t,x,v)$ *в силу системы* (0.1) *по всем допустимым управлениям* v *равен* $V(t,x)$ (*решение уравнения* (2.6)). *Минимум достигается на функциях* $\widetilde{v}_j$ *вида* (2.7).

Доказательство. Отметим вначале, что решение уравнения (2.5) так же, как и (2.2), можно представить в явном виде

$$V(t,x) = F(\eta(0,t,x)) + \int_0^t \widetilde{Q}(s,\eta(s,t,x))\,ds. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) проверяется дифференцированием подобно (2.3). Пусть траектория $(s,\,x(s))$ системы (0.1) с краевым условием $x(t) = x$ лежит в $\widetilde{D}$ для $\forall s \in [0,t]$. Возьмем полную производную от $V(s,x(s))$ в силу системы:

$$\dot{V} = V_s + \sum_{i=1}^n V_{x_i}\dot{x}_i = V_s + \sum_{i=1}^n V_{x_i}\left(f_i + \sum_{j=1}^r b_{ij}v_j\right) =$$
$$= \widetilde{Q} + \sum_{j=1}^r b'_{\cdot j}V_x v_j = \widetilde{Q} + \sum_{j=1}^r \frac{|\widetilde{v}_j|^{q-1}}{k_j^q} v_j \operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}(s,x)V_x\right).$$

Интегрируя полученное выражение на отрезке $[0,t]$, получаем равенство

$$F(x(0)) + \int_0^t \widetilde{Q}(s,x)ds = V(t,x) - \int_0^t \sum_{j=1}^r \frac{|\widetilde{v}_j|^{q-1}}{k_j^q} v_j \operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}(s,x)V_x\right) ds.$$

Сравнивая равенство с функционалом I, находим, что

$$I(t,x,v) = V(t,x) + \int_0^t \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q}\left(\frac{|v_j|}{k_j}\right)^q + \frac{1}{p}\left(\frac{|\widetilde{v}_j|}{k_j}\right)^q - \frac{|\widetilde{v}_j|^{q-1}}{k_j^q} v_j \operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}V_x\right)\right) ds. \tag{2.9}$$

Для получения представления (2.9) использовали равенства

$$p = q/(q-1), \quad p-1 = 1/(q-1), \quad b'_{\cdot j}V_x = \frac{|\widetilde{v}_j|^{q-1}}{k_j^q}\operatorname{sign}\left(b'_{\cdot j}(s,x)V_x\right).$$

При подстановке функций $v_j = \widetilde{v}_j$ (см. (2.7)) интегральное выражение в (2.9) становится равным нулю. Заметим теперь, что выполняется элементарное неравенство

$$\frac{1}{q}|v|^q + \frac{1}{p}|\widetilde{v}|^q \pm |\widetilde{v}|^{q-1}v \geqslant 0 \quad \forall v,\ \forall \widetilde{v},$$

которое обращается в равенство при $v = \mp|\widetilde{v}|$. Отсюда окончательно следует утверждение теоремы.

Более короткое доказательство состоит в использовании уравнения Беллмана для системы (0.1) с функционалом (2.1). Для функции Беллмана $V(t,x) = \min\limits_{v(\cdot)} I(t,x,v)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} V_t = \min_v \Bigg\{ -\left(f(t,x) + b(t,x)v\right)' V_x + \widetilde{Q}(t,x) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q}\left(\frac{|v_j|}{k_j}\right)^q + \frac{1}{p}\left(\frac{|\widetilde{v}_j|}{k_j}\right)^q\right)\Bigg\} &= \\ = -f'(t,x)V_x + \widetilde{Q}(t,x), \quad V(0,x) = F(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

$\square$

Следствие 1. *Если решение уравнения (2.2) найдено, то Им $X(t,y)$ определится формулой*

$$X(t,y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(t,x) \leqslant 1\}. \tag{2.11}$$

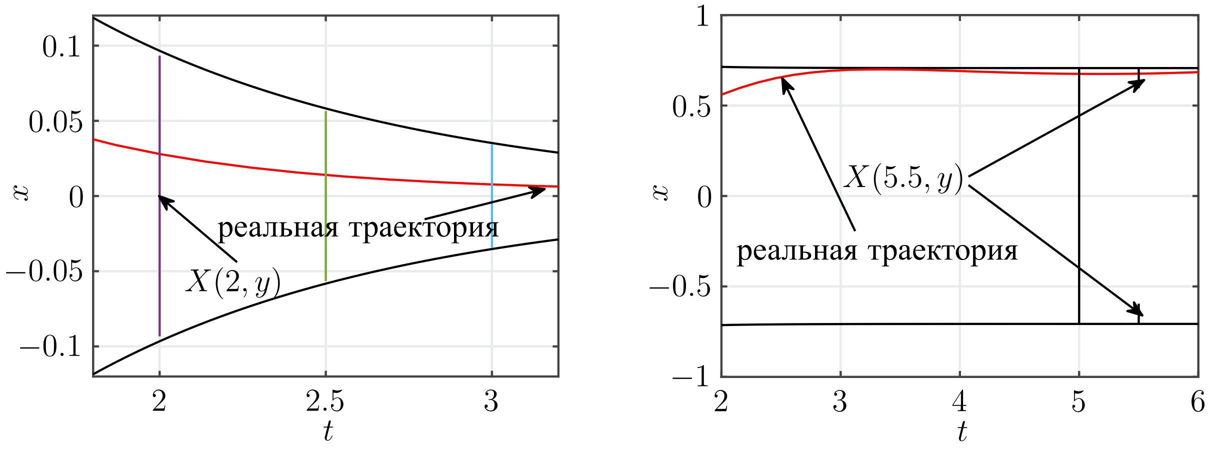

Рис. 1. Им и реальные траектории в примерах 1, 2.

Замечание 3. Предположения 3, 4 трудно проверить. Если предположение 3 не выполняется, то Им $X(t, y)$ может быть пустым при некоторых t. Однако ограничиваемся лишь такими сигналами, для которых множества, определяемые по формуле (2.11), не пусты. В этом случае имеем включение $x(t) \in X(t, y)$ для неизвестного истинного состояния при условиях теоремы 1. Для обеспечения предположения 3 задачу иногда следует рассматривать локально на малом отрезке $[0, T]$. Для предположения 4 нужны дополнительные жесткие условия. Среди них: функции (2.7) являются липшицевыми в области $\widetilde{D} = D$, якобианы f_x, b_x ограничены в D. В общем случае, если решение (2.8) уравнения (2.6) найдено, то Им $X(t, y)$ *по определению задаем формулой* (2.11). Более того, можно считать, что функции F, Q, g являются непрерывными и лишь кусочно-дифференцируемыми. Для нахождения функции V напрямую используем формулу (2.8).

Рассмотрим иллюстрирующие примеры.

Пример 1. Дана одномерная система с кубической нелинейностью и квадратичной нелинейностью в канале наблюдения:

$$\dot{x} = \mu x^3 - x(v+1), \quad y = x^2 + w, \quad \mu < 0, \quad t \in [0, T].$$

Пусть в функционале (2.1) имеем $Q(t, w) = w$, $q = 3$, $k = 1$ и

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad w(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, T/2], \\ +1, & t \in (t/2, T]. \end{cases}$$

В данном примере условия Липшица не выполняются. Воспользуемся теоремой 1 и найдем решение системы $\dot{x} = \mu x^3 - x$ с начальным условием $x(s) = \xi$. Разделяя переменные, находим функцию $\eta(t, s, \xi) = \xi / \sqrt{(1 - \mu\xi^2)e^{2(t-s)} + \mu\xi^2}$. Это единственное решение устойчиво, сходится к нулю и продолжимо до бесконечности при любых начальных условиях $(s, \xi) \in \mathbb{R}^2$. С другой стороны, область $\widetilde{D}$ (см. (2.4)) определится как

$$\widetilde{D} = \left\{(t, x) \mid |x| < q(t) = 1/\sqrt{-\mu(e^{2t} - 1)},\ t > 0\right\},$$

поскольку только в этой области можно найти начальное состояние $\xi = \eta(0, t, x)$ для данной пары $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Уравнение (2.6) имеет вид

$$V_t + (\mu x^3 - x)V_x = y(t) - x^2, \quad V(0, x) = F(x).$$

По формуле (2.8) получаем

$$V(t,x)=\frac{x^2e^{2t}}{2(1+\mu x^2(e^{2t}-1)}+\int_0^t y(s)ds-\log(1+\mu x^2(e^{2t}-1))/(2\mu).$$

Здесь интеграл от функции $\eta(s,t,x)^2$ по s взят в явном виде. Решение $V(t,x)$ определено в области $\widetilde{D}$. Зададим численные данные для $y(s)$: $x(0)=0.5$, $v(s)=\sin(s)/2$, $\mu=-2$, $T=6$. Имеем $\widetilde{v}=|xV_x|^{1/2}\mathrm{sign}(-xV_x)$. Предположение 3 оказывается выполненным, поскольку истинная траектория лежит в границах области $\widetilde{D}$, как показано на левой картинке рис. 1, а интеграл $I=0.4504$, откуда следует неравенство (2.5) для всех $t\in[0,T]$. Дифференцируя, находим функцию

$$\widetilde{v}(t,x)=-\frac{|x|\sqrt{1-\mu x^2(e^{2t}-1)^2}}{1+\mu x^2(e^{2t}-1)},$$

которая знакоотрицательна в $\widetilde{D}$. На рис. 1 показаны также Им $X(t,y)$ в виде отрезков для $t=2,\ 2.5,\ 3$. В частности, при $t=2$ имеем $X(t,y)=[-0.0933,0.0933]\subset(-q(t),q(t))$, где интервал является сечением множества $\widetilde{D}$, $q(t)=0.0966$.

Пример 2. Изменим знак в системе предыдущего примера, то есть рассмотрим систему следующего вида

$$\dot{x}=\mu x^3+x(v+1),\quad y=x^2+w,\quad \mu<0,\quad t\in[0,T].$$

Функция η здесь имеет вид: $\eta(t,s,\xi)=\xi/\sqrt{(e^{2(s-t)}-\mu\xi^2(1-e^{2(s-t)})}$. Это единственное решение устойчиво, сходится к числу $1/\sqrt{-\mu}$ и продолжимо до бесконечности при любых начальных условиях $(s,\xi)\in\mathbb{R}^2$. Область $\widetilde{D}$ (см. (2.4)) определится как

$$\widetilde{D}=\left\{(t,x)\mid |x|<q(t)=1/\sqrt{-\mu(1-e^{-2t})},\ t>0\right\},$$

поскольку только в этой области можно найти начальное состояние $\xi=\eta(0,t,x)$ для данной пары $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$. Уравнение (2.6) имеет вид

$$V_t+(\mu x^3+x)V_x=y(t)-x^2,\quad V(0,x)=F(x).$$

По формуле (2.8) получаем

$$V(t,x)=\frac{x^2e^{-2t}}{2(1+\mu x^2(1-e^{-2t}))}+\int_0^t y(s)\,ds-\log(1+\mu x^2(1-e^{-2t}))/(2\mu).$$

Решение $V(t,x)$ определено в области $\widetilde{D}$. Имеем $\widetilde{v}=|xV_x|^{1/2}\mathrm{sign}(xV_x)$. Дифференцируя, находим функцию

$$\widetilde{v}(t,x)=\frac{|x|\sqrt{|2e^{-2t}-1-\mu x^2(1-e^{-2t})^2|}}{1+\mu x^2(1-e^{-2t})}\mathrm{sign}\left(2e^{-2t}-1-\mu x^2(1-e^{-2t})^2\right),$$

которая при малых $t\in[0,\log 2/2)$ положительна. При численных данных предыдущего примера порождающая траектория выходит из области $\widetilde{D}$. Поэтому положим $x(0)=0.1$, $v(s)=\sin(s)/10$. Значения μ, T оставим прежними. Тогда интеграл $I=0.6973$, откуда следует неравенство (2.5) для всех $t\in[0,T]$. На правой картинке рис. 1 показаны Им $X(t,y)$ в виде отрезков для $t=5,\ 5.5$. В частности, для $t=5.5$ Им $X(t,y)=(-q(t),-0.5953]\cup[0.5953,q(t))$, $q(t)=0.7071$, состоит из двух не связанных полуинтервалов, поскольку функция V вогнута по x. Для $t=5$ имеем $X(t,y)=(-q(t),q(t))$.

§ 3. Частный случай задачи с функционалом обобщенной работы

Пусть функция f является линейной по x, то есть

$$f(t,x) = A(t)x. \tag{3.1}$$

Тогда область $\widetilde{D} = [0,T] \times \mathbb{R}^n$ (см. (2.4)). В этом случае $\eta(t,s,\xi) = X(t,s)\xi$ и $\eta(0,t,x) = X(0,t)x$, где $X(t,s)$ — фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Уравнение (2.6) примет вид

$$V_t + x'A'(t)V_x = \widetilde{Q}(t,x), \quad V(0,x) = F(x). \tag{3.2}$$

По формуле (2.8) запишем явное решение:

$$V(t,x) = F(X(0,t)x) + \int_0^t \widetilde{Q}\,(s, X(s,t)x)\,ds. \tag{3.3}$$

Дифференцируя равенство (3.3), находим частные производные:

$$V_t = -x'A'(t)\left(X'(0,t)F_x + \int_0^t X'(s,t)\widetilde{Q}_x ds\right) + \widetilde{Q}(t,x),$$
$$V_x = X'(0,t)F_x + \int_0^t X'(s,t)\widetilde{Q}_x\,ds.$$

Рассмотрим пример.

Пример 3. Движение точки единичной массы на прямой задается уравнением

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -x^1 v(t), \quad y(t) = |x^1| + w(t), \quad t \in [0,T].$$

Здесь $-x^1 v(t)$ — сила сопротивления движению с неизвестным коэффициентом $v(t)$. Наблюдается модуль отклонения точки от положения равновесия с помехой. Примем, что функционал (2.1) имеет вид

$$F(x(0)) + \int_0^T \left(w^{4/3}(t) + v^2(t)/2 + \widetilde{v}^2/2\right) \leqslant 1,$$

где $F(x) = |x|/10$. Уравнение (2.2) имеет вид $V_t + x^2 V_{x^1} = w^{4/3}$, но мы не будем его решать (также и (3.2)), а воспользуемся сразу формулой (3.3). Здесь $\widetilde{v} = -x^1 V_{x^2}$. Зададим численные данные для формирования сигнала: $T = 2$, $v(t) = |\sin(t)|/2$, $w = \mathrm{sign}(t - T/2)/8$, $x^1(0) = x^2(0) = 1/2$. Функция $V(t,x) = \sqrt{(x^1 - tx^2)^2 + (x^2)^2}/10 + \int_0^t \left(y(s) - |x^1 - (t - s)x^2|\right)^{4/3} ds$. Интеграл $I = 0.3445$, откуда следует неравенство (2.5) для всех $t \in [0,T]$. Им $X(T,y)$ показано на рис. 2. Здесь звездочка означает истинное положение фазового вектора при $T = 2$.

Рассмотрение примера показывает, что явная формула (3.3) позволяет построить Им при кусочно-дифференцируемых функциях F, g. Множество $X(T,y)$ здесь невыпуклое и несвязное. При данных информационных условиях мы вынуждены считаться с тем, что вектор $x(T)$ может лежать в любой точке этого множества.

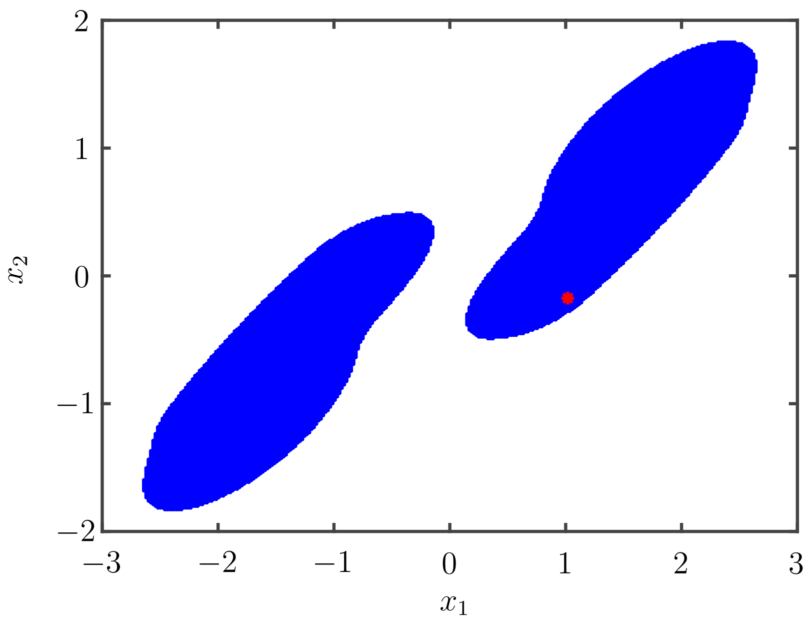

Рис. 2. Им $X(T, y)$ в примере 3

§ 4. О взаимной оценке сверху и снизу для информационных множеств

Рассматривается оценка по включению. Поскольку функционал (1.1) меньше функционала (2.1), справедливо включение

$$X(t, y) \subset \mathbf{X}(t, y).$$

Обратное включение обсудим в случае (3.1). Предположим, что

$$\widetilde{v}_j = k_j^p \left| b'_{\cdot j}(s, x) V_x \right|^{p-1} \leqslant \varkappa$$

для всех (s, x) при данном сигнале y. Тогда, заменив ограничение (2.1) на следующее

$$I(T, x, v) \leqslant 1 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\varkappa}{k_j} \right)^q,$$

получаем обратное включение

$$\mathbf{X}(t, y) \subset X(t, y).$$

Таким образом, имеем возможность оценить сложно вычисляемое ИМ $\mathbf{X}(t, y)$ сверху и снизу с помощью Им $X(t, y)$.

§ 5. Линейно-квадратичный случай

В этом случае оба уравнения Беллмана (1.3) и (2.10) имеют явное решений в виде поверхностей второго порядка и информационные множества являются эллипсоидами (см. [2, 3]). Данные множества удобно сравнивать между собой.

Итак, даны линейные уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad t \in [0, T], \quad y = G(t)x + w,$$

с квадратичными ограничениями

$$J = \|x_0\|^2_{P_0} + \int_0^T \left\{\|w(t)\|^2_{R(t)} + \|v(t)\|^2_{Q(t)}\right\} dt \leqslant 1 \ \text{ или}$$
$$I = \|x_0\|^2_{P_0} + \int_0^T \left\{\|w(t)\|^2_{R(t)} + \|v(t)\|^2_{Q(t)} + \|\widetilde{v}(t, x(t))\|^2_{Q(t)}\right\} dt \leqslant 1,$$

где символ типа $\|x\|^2_P$ означает квадратичную форму $x'Px$. Матрицы предполагаются симметричными и положительно определенными. Для фунционала I функция $\widetilde{v}(t,x) = Q^{-1}(t)B'(t)V_x/2$, где

$$V(t,x) = \|X(0,t)x\|^2_{P_0} + \int_0^t \|y(s) - G(s)X(s,t)x\|^2_{R(s)}\, ds$$

по формуле (3.3). Данную функцию удобнее описать с помощью уравнений

$$V(t,x) = \|x - \widetilde{x}(t)\|^2_{\mathcal{P}(t)} + g(t), \quad \dot{\mathcal{P}} = G'RG - A'\mathcal{P} - \mathcal{P}A, \quad \mathcal{P}(0) = P_0;$$
$$\dot{\widetilde{x}} = \mathcal{P}^{-1}G'R(y - G\widetilde{x}) + A\widetilde{x}, \quad \widetilde{x}(0) = 0; \quad \dot{g} = \|y - G\widetilde{x}\|^2_R, \quad g(0) = 0.$$

Поскольку множество $\{x \mid V(t,x) \leqslant 1\}$ — это эллипсоид, то вектор $\widetilde{x}(t)$ является центром этого эллипсоида.

В случае ИМ $\mathbf{X}(t,y)$ решение уравнения Беллмана получается в виде

$$\mathbf{V}(t,x) = \|x - \hat{x}(t)\|^2_{P(t)} + h(t), \quad \dot{P} = G'RG - PBQ^{-1}B'P - A'P - PA, \quad P(0) = P_0;$$
$$\dot{\hat{x}} = P^{-1}G'R(y - G\hat{x}) + A\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = 0; \quad \dot{h} = \|y - G\hat{x}\|^2_R, \quad h(0) = 0.$$

Здесь вектор $\hat{x}(t)$ также является центром эллипсоида $\{x \mid \mathbf{V}(t,x) \leqslant 1\}$. Структура уравнений одинакова. Справедливо очевидное утверждение.

Лемма 1. *Матрицы $P(t)$ и $\mathcal{P}(t)$ связаны неравенством $P(t) \leqslant \mathcal{P}(t)$ для всех $t \in [0,T]$.*

Действительно, начальные условия дифференциальных уравнений для этих матриц одинаковы, но уравнение Риккати содержит дополнительное отрицательное слагаемое

$$-PBQ^{-1}B'P.$$

Пример 4. Рассмотрим соотношение между множествами на примере линейного осциллятора, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad Q = q.$$

Отсюда $P(t) \equiv P_0$ и

$$\dot{\hat{x}}^1 = \hat{x}^2, \quad \dot{\hat{x}}^2 = -\hat{x}^1 + (y - \hat{x}^2)/\sqrt{q}, \quad \dot{h} = (y - \hat{x}^2)^2.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{P}(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{q} + t/2 - \sin(2t)/4 & 1/4 - \cos(2t)/4 \\ 1/4 - \cos(2t)/4 & \sqrt{q} + t/2 + \sin(2t)/4 \end{bmatrix}.$$

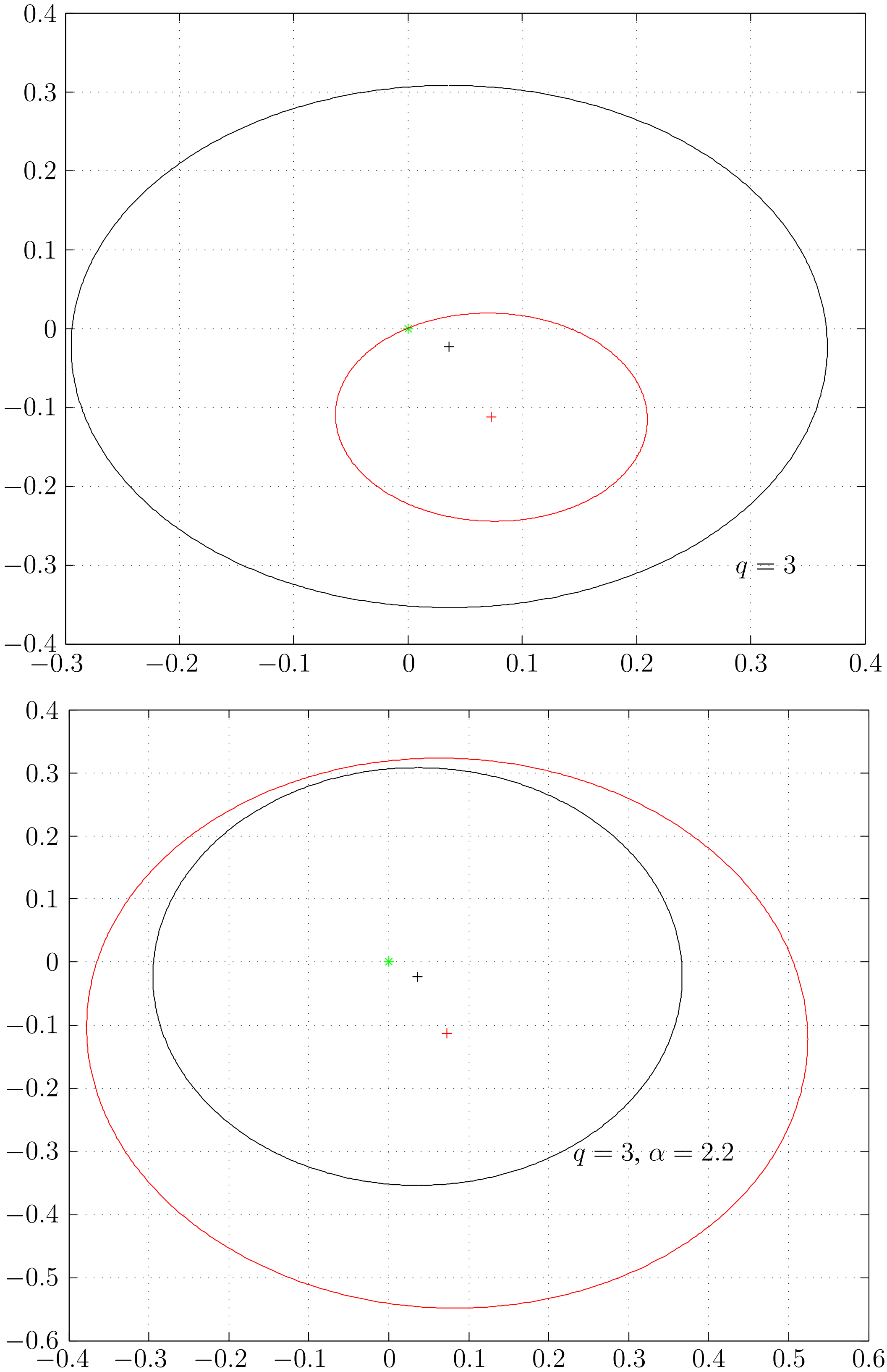

Рис. 3. Взаимная оценка эллипсов по включению

Пусть $y(t) = e^{-t/2}/\sqrt{1-e^{-T}}$, реализуется в системе при $w(t) = y(t)$, $x_0 = v = 0$. Тогда в конце процесса имеем следующее соотношение эллипсов, показанное на верхней картинке рис. 3.

Пусть теперь имеем ограничение

$$\|x_0\|^2_{P_0} + \int_0^T \left\{\|w(t)\|^2_{R(t)} + \|v(t)\|^2_{Q(t)} + \|\widetilde{v}\|^2_{Q(t)}\right\} dt \leqslant \alpha,$$

где $\alpha \geqslant 1$. Тогда вместо $\mathcal{P}(t)$ в силу линейности будем иметь $\mathcal{P}(t)/\alpha$, вместо $g(t) \to g(t)/\alpha$, а уравнение для x_0 не изменится. Отсюда Им преобразуется в

$$\left\{x \colon \|x - x_0(t)\|^2_{\mathcal{P}(t)} + g(t) \leqslant \alpha\right\}.$$

При $\alpha = 2.2$ имеем нижнюю картинку на рис. 3. Звездочка — это истинное положение траектории при $T = 10$, а крестики — это центры соответствующих эллипсов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. Vol. 13. Issue 1. P. 22–28. https://doi.org/10.1109/TAC.1968.1098790
2. Bertsecas D. P., Rhodes I. B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16. Issue 2. P. 117–128. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099674
3. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
4. Kurzhanski A., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation. Boston: Birkhäuser Basel, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
5. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
6. Keesman K. J., Stappers R. Nonlinear set-membership estimation: A support vector machine approach // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2004. Vol. 12. Issue 1. P. 27–41. https://doi.org/10.1515/156939404773972752
7. Farina F., Garulli A., Giannitrapani A. Distributed interpolatory algorithms for set membership estimation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 64. Issue 9. P. 3817–3822. https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2884150
8. Liu Y., Zhao Y., Wu F. Extended ellipsoidal outer-bounding set-membership estimation for nonlinear discrete-time systems with unknown-but-bounded disturbances // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2016. Vol. 2016. P. 1–11. https://doi.org/10.1155/2016/3918797
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1958.
10. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
11. Tveito A., Winther R. Introduction to partial differential equations: A computational approach. New York: Springer, 1998.
12. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
13. Красовский А. А. Неклассические целевые функционалы и проблемы теории оптимального управления (обзор) // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 3–41.

Поступила в редакцию 30.08.2021

Ананьев Борис Иванович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел оптимального управления, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1378-0240
E-mail: abi@imm.uran.ru

Цитирование: Б. И. Ананьев. О некоторых задачах оценивания нелинейных динамических систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 562–577.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 4. Pp. 562–577.

B. I. Ananyev

On some estimation problems for nonlinear dynamic systems

Keywords: nonlinear guarantied estimation, information sets, functional of generalized work.

MSC2020: 97N20, 49L20

DOI: 10.35634/vm210403

Two problems of nonlinear guaranteed estimation for states of dynamical systems are considered. It is supposed that unknown measurable in t disturbances are linearly included in the equation of motion and are additive in the measurement equations. These disturbances are constrained by nonlinear integral functionals, one of which is analog of functional of the generalized work. The studied problem consists in creation of the information sets according to measurement data containing the true position of the trajectory. The dynamic programming approach is used. If the first functional requires solving a nonlinear equation in partial derivatives of the first order which is not always possible, then for functional of the generalized work it is enough to find a solution of the linear Lyapunov equation of the first order that significantly simplifies the problem. Nevertheless, even in this case it is necessary to impose additional conditions on the system parameters in order for the system trajectory of the observed signal to exist. If the motion equation is linear in state variable, then many assumptions are carried out automatically. For this case the issue of mutual approximation of information sets via inclusion for different functionals is discussed. In conclusion, the most transparent linear quadratic case is considered. The statement is illustrated by examples.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (no. 075-02-2021-1383).

REFERENCES

1. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, issue 1, pp. 22–28. https://doi.org/10.1109/TAC.1968.1098790
2. Bertsecas D. P., Rhodes I. B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, issue 2, pp. 117–128. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099674
3. Kurzhanski A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and estimation under uncertainty), Moscow: Nauka, 1977.
4. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*, Boston: Birkhäuser Basel, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
5. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* (Estimation of states for dynamical systems. Method of ellipsoids), Moscow: Nauka, 1988.
6. Keesman K. J., Stappers R. Nonlinear set-membership estimation: A support vector machine approach, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2004, vol. 12, issue 1, pp. 27–41. https://doi.org/10.1515/156939404773972752
7. Farina F., Garulli A., Giannitrapani A. Distributed interpolatory algorithms for set membership estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 64, issue 9, pp. 3817–3822. https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2884150
8. Liu Y., Zhao Y., Wu F. Extended ellipsoidal outer-bounding set-membership estimation for nonlinear discrete-time systems with unknown-but-bounded disturbances, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016, vol. 2016, pp. 1–11. https://doi.org/10.1155/2016/3918797
9. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, New York: McGraw-Hill, 1955.

10. Subbotin A. I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Gamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991.
11. Tveito A., Winther R. *Introduction to partial differential equations: A computational approach*, New York: Springer, 1998.
12. Hartman P. *Ordinary differential equations*, New York: Wiley, 1964.
13. Krasovskii A. A. Nonclassical target functionals and optimal control problems, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1992, no. 1, pp. 3–41.

Received 30.08.2021

Boris Ivanovich Ananyev, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Department of Optimal Control, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1378-0240
E-mail: abi@imm.uran.ru

Citation: B. I. Ananyev. On some estimation problems for nonlinear dynamic systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 562–577.