ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 458–470.

УДК 519.1

© *В. А. Скороходов, Д. О. Свиридкин*

ПОТОКИ В СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ

Работа посвящена исследованию процессов распределения ресурсов в динамических ресурсных сетях, т. е. сетях, пропускные способности дуг которых зависят от времени. Распределение ресурса в сети происходит в дискретном времени, при этом ресурс каждой вершины распределяется только между смежными с ней вершинами по некоторым правилам. Проведено исследование процессов перераспределения ресурса в таких сетях. Основной задачей является разработка методов нахождения предельного состояния (распределения) ресурса в динамической ресурсной сети. Показано, что подход, основанный на построении вспомогательной сети, применим для сведения задачи о распределении ресурса в динамической сети к аналогичной задаче для вспомогательной сети. Для сильно регулярных периодических динамических сетей доказаны теоремы о существовании предельного состояния на вспомогательном графе. Для его нахождения можно использовать подходы, разработанные для решения задачи о кратчайшем пути в динамических сетях.

Ключевые слова: ресурсная сеть, динамические сети, пороговое значение, процессы распределения ресурсов, предельное состояние в ресурсной сети.

DOI: 10.35634/vm210308

Введение

Теория динамических потоков в сетях (теория динамических сетей), взяв свое начало еще в работах Д. Р. Форда и Л. Р. Фалкерсона (см., например, [1]), продолжила развитие в работах Д. Б. Орлина, Д. Е. Аронсона, М. В. Фоноберовой, Д. Д. Лозовану, Б. Клинца и др. (см. [2–8]). Динамическая сеть представляет собой ориентированную сеть, некоторые характеристики дуг которой (в частности, пропускные способности дуг) зависят от дискретного времени. Таким образом, поток в сети не является стационарным, а зависит от времени. В работах Я. М. Ерусалимского, В. А. Скороходова и М. В. Кузьминовой (см. [9–11]) описан общий подход к решению потоковых задач в динамических сетях, который состоит в построении вспомогательной «статической» сети, описывающей динамику изменения исходной сети, и сведении потоковой задачи в исходной динамической сети к аналогичной задаче на вспомогательной.

Немного в стороне от классической теории потоков в сетях стоят ресурсные сети, введенные и довольно хорошо изученные О. П. Кузнецовым и Л. Ю. Жиляковой (см. [12–16]). Ресурсная сеть — это сеть без источников, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины — величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по определенным правилам. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток. При этом правила функционирования сети таковы, что обязательно выполняются два условия. Первое — это условие замкнутости сети, т. е. ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает. Второе — условие неразрывности: ресурс, выходящий из вершины, вычитается из ее ресурса, а входящий в вершину, прибавляется к ее ресурсу.

В настоящей работе изучается модель распределения ресурсного потока в динамической периодической ресурсной сети. Основной задачей является разработка методов нахождения предельного состояния (распределения) ресурса в динамической ресурсной сети. Показано, что для регулярных динамических сетей предельное состояние существует и является единственным, а для его нахождения можно использовать подходы, разработанные для динамических сетей в [9–11].

§ 1. Основные понятия

Приведем основные понятия, определения и утверждения [9–16].

Определение 1. *Ресурсной сетью* называют связную ориентированную сеть $G(X, E)$ (где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$) без стоков, для каждой дуги (x_i, x_j) которой указана пропускная способность r_{ij}, и задана вектор-функция $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, где $q_i(t) \geqslant 0$ для всех $i \in [1; n]_Z$.

Величина $q_i(t)$ называется количеством ресурса в вершине x_i в момент времени t.

Для того чтобы определить вектор-функцию $Q(t)$, задается вектор $Q(0)$ начального распределения ресурса в сети G и указываются правила перераспределения ресурсов (правила функционирования сети):

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ji}(t) \quad \forall\, i \in [1; n]_Z, \tag{1.1}$$

где $F_{ij}(t)$ — величина ресурсного потока, выходящего по дуге (x_i, x_j) в момент времени t, определяется следующим образом:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} r_{ij}, & q_i(t) > \sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}, \\ \dfrac{r_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}} \cdot q_i(t), & q_i(t) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Величину суммарного ресурса сети обозначим через W, то есть $W = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(0)$.

Определение 2. *Состояние* $Q(t)$ называется *устойчивым*, если выполняется

$$Q(t) = Q(t+1).$$

Согласно правилам перераспределения ресурса, если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. *Состояние* $Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ называется *асимптотически достижимым из состояния* $Q(0)$, если для каждого $i \in [1; n]_Z$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ имеет место неравенство $|q^* - q_i(t)| < \varepsilon$.

Определение 4. *Состояние* Q^* называется *предельным,* если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t, что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Определение 5. *Ресурсную сеть* будем называть *эргодической,* если она является сильно связной.

Определение 6. *Эргодическую ресурсную сеть* будем называть *регулярной,* если существует по крайней мере два цикла, длины которых являются взаимно простыми числами.

Определим множества вершин $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$ следующим образом. Будем говорить, что для всех $i \in [1;n]_Z$ в момент времени t вершина $x_i \in Z^-(t)$, если $q_i(t) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$; в противном случае будем говорить, что $x_i \in Z^+(t)$.

Другими словами, множество $Z^-(t)$ состоит из тех вершин x_i ресурсной сети, которые в момент времени t передают по выходящим дугам весь свой текущий ресурс, т. е. каждая дуга, выходящая из вершины $x_i \in Z^-(t)$ насыщается ресурсным потоком по второму правилу (вторая строка) в (1.2). Множество $Z^+(t)$ образуется теми вершинами, для которых при полном насыщении своих выходящих дуг ресурсным потоком — работая по правилу 1 (первая строка) в (1.2) — передает не весь свой текущий ресурс.

Определение 7. Будем говорить, что *вершина x переходит в зону Z^-,* если найдется такой момент времени t', что $x \in Z^-(t)\ \forall\, t \geqslant t'$.

Определение 8. *Пороговым значением* для ресурсной сети G будем называть такую величину T, для которой если $W \leqslant T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^-. В противном случае для каждого момента времени t множество $Z^+(t) \neq \varnothing$.

§ 2. Периодические динамические сети

Пусть $G(X, E, r, D)$ — регулярная периодическая динамическая ресурсная сеть, то есть такая сеть, для каждой дуги (x_i, x_j) которой в каждый момент времени t указана величина $r_{ij}(t)$ — пропускная способность дуги (x_i, x_j) в момент t и имеет место соотношение $r_{ij}(t) = r_{ij}(t+D)$. При этом полагаем, что время является дискретным и пропускные способности дуг сети G не обращаются в ноль. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности предельного состояния для таких сетей.

В работе [17] изучена задача нахождения порогового значения в таких сетях. Для этих целей процесс перераспределения ресурсов в динамической ресурсной сети моделировался при помощи вспомогательной ресурсной сети (временной развертки) большего размера, но на которой пропускные способности дуг не зависят от времени (см. также [10, 11]). Показано, что, несмотря на регулярность исходной сети, вспомогательная сеть обязательно является D-циклической, что существенно влияет на существование единственного предельного состояния в случае малого ресурса.

Отметим, что поскольку для каждой дуги динамической ресурсной сети указывается периодическая зависимоть пропускной способности от времени, значит, фактически для такой сети задана периодическая последовательность матриц пропускных способностей $R(t)$.

Для дальнейшего изложения введем в рассмотрение следующие обозначения:

- $\mathbf{c}(t)$ — вектор суммарных пропускных способностей вершин в момент времени t, то есть $c_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}(t)$;
- $P(t)$ — стохастическая матрица, определяющая долевое распределение ресурса по дугам сети (см. [13]) в момент времени t.

Для введенных величин основное правило функционирования ресурсной сети (1.1) для динамических ресурсных сетей можно записать в виде

$$Q(t+1) = \max\{Q(t) - \mathbf{c}(t), \mathbf{0}\} + \min\{Q(t), \mathbf{c}(t)\} \cdot P(t). \tag{2.1}$$

В соотношении (2.1) минимум и максимум берутся поэлементно, то есть если для некоторых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектор $\mathbf{z} = \max\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, то это означает, что $z_i = \max\{x_i, y_i\}$ для всех $i \in [1; n]_Z$. Таким образом, каждая вершина x_i, $i \in [1; n]_Z$, в момент t отдает не более $c_i(t)$ ресурса, который распределяется пропорционально долям, определяемых матрицей $P(t)$.

Далее для удобства правило функционирования (2.1) будем иногда записывать в сокращенной форме:

$$Q(t+1) = \mathcal{A}_t(Q(t)). \tag{2.2}$$

Отметим, что каждой паре $(\mathbf{c}, P)$ можно однозначно поставить в соответствие ориентированную сеть $G(X, E_P)$, на которой пропускная способность каждой дуги (x_i, x_j) определяется следующим правилом: $r_{ij} = P_{ij} \cdot c_i$.

Лемма 1. *Пусть P_1 и P_2 — регулярные стохастические матрицы одинакового порядка и вектор $\mathbf{c} = (1, \ldots, 1)$, и пусть $G(X, E_1)$ и $G(X, E_2)$ — графы, соответствующие парам $(\mathbf{c}, P_1)$ и $(\mathbf{c}, P_2)$ соответственно. Тогда для того, чтобы матрица $P_1 \cdot P_2$ была регулярной стохастической матрицей, достаточно, чтобы $E_1 \subseteq E_2$ или $E_2 \subseteq E_1$.*

Доказательство. Не нарушая общности, полагаем $E_1 \subseteq E_2$ и $E_0 = E_2 \setminus E_1$. Также можно считать, что множества дуг E_1 и E_2 являются бинарными отношениями, определенными на множестве вершин X.

Рассмотрим граф $G(X, E_3)$, соответствующий произведению матриц $P_1 \cdot P_2$. Множество дуг этого графа можно получить как композицию отношений $E_1 \circ E_2$ (см. [18]). Тогда

$$E_1 \circ E_2 = E_1 \circ (E_1 \cup E_0) = E_1^2 \cup (E_1 \circ E_2).$$

Поскольку матрица P_1^2 является регулярной как степень регулярной матрицы (см. [19]), следовательно, соответствующий ей граф $G(X, E_1^2)$ содержит по крайней мере два цикла, длины которых взаимно простые (см. [20]). Отметим также, что граф $G(X, E_1^2)$ является частичным графом графа $G(X, E_3)$, а значит, и $G(X, E_3)$ содержит по крайней мере два цикла, длины которых взаимно простые. А поскольку $G(X, E_3)$ соответствует матрице $P_1 \cdot P_2$, следовательно, последняя является регулярной. Лемма доказана. □

Следует отметить, что произведение регулярных матриц может и не быть регулярной матрицей. Покажем эту ситуацию на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим следующие регулярные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 представлены графы G_A и G_B, соответствующие матрицам A и B.

Произведения рассматриваемых матриц имеют вид

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 представлены графы $G_{A \cdot B}$ и $G_{B \cdot A}$, соответствующие матрицам $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

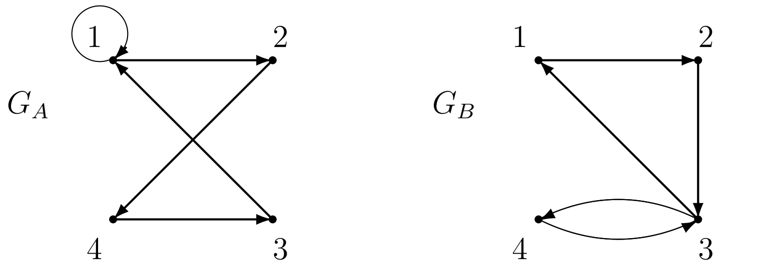

Рис. 1. Графы G_A и G_B

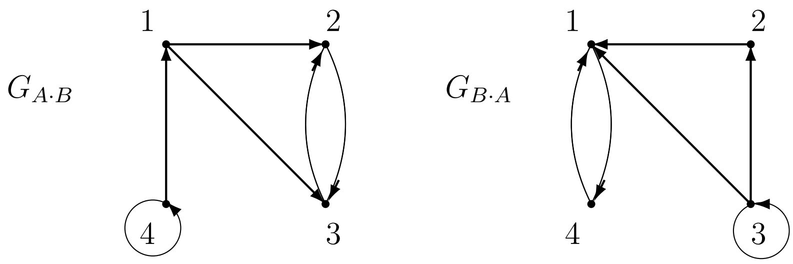

Рис. 2. Графы $G_{A\cdot B}$ и $G_{B\cdot A}$

Обе матрицы (и $A \cdot B$, и $B \cdot A$) не являются регулярными, поскольку

1) соответствующие им графы не являются сильно связными;

2) в отдельных компонентах сильной связности только по одному простому циклу длины 2.

Для динамической сети рассмотрим ее временну́ю развертку (см. [10, 17]) — ориентированный граф $G'(X', E')$ такой, что для каждой вершины $x \in X$ графа G ставится в соответствие D вершин $A_x = \{x^0, \ldots, x^{D-1}\}$ на развертке G', для каждой дуги $e \in E$ (положим для определенности $e = (x, y)$) исходного графа G ставится в соответствие D дуг $\{e_0, \ldots, e_{D-1}\}$ на развертке G' так, что $e_i = (x^i, y^{(i+1) \bmod D})$ для всех $i \in [0; D-1]_Z$. Вес дуги $e_i \in E'$ полагается равным весу дуги $e \in E$ в момент времени i.

Замечание 1. На развертке G' множество вершин разбивается на непересекающиеся множества $V_i = \{x_1^i, \ldots, x_n^i\}$, которые мы будем называть i-м временны́м слоем.

Тогда при введении сплошной нумерации вершин матрица долевого распределения ресурса для развертки G' будет иметь следующий вид:

$$P_{G'} = \begin{pmatrix} \Theta & P(0) & \Theta & \ldots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P(1) & \ldots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \ldots & P(D-2) \\ P(D-1) & \Theta & \Theta & \ldots & \Theta \end{pmatrix},$$

где Θ — квадратная матрица, состоящая из нулей. Отметим, что матрицу $P_{G'}$ можно также записать в виде $P_{G'} = P \cdot S^n$, где $P = \mathrm{diag}\{P(0), P(1), \ldots, P(D-1)\}$ — блочно-диагональная матрица, а S — матрица оператора циклического сдвига вправо.

Таким образом, как и в работе [17] процесс перераспределения ресурса между вершинами динамической сети будем моделировать аналогичным процессом на развертке, при этом функционирование вспомогательной ресурсной сети описывается схожим с (2.1) и (2.2) соотношением

$$Q'(t+1) = \max\{Q'(t) - C, \mathbf{0}\} \cdot S^n + \min\{Q'(t), C\} \cdot P_{G'}, \tag{2.3}$$

здесь $C = (\mathbf{c}(0), \mathbf{c}(1), \dots, \mathbf{c}(D-1))$. Начальное состояние для развертки задается следующим образом: $Q'(0) = (Q(0), Q(1), \dots, Q(D-1))$.

Единственным отличием от функционирования ресурсных сетей с постоянными пропускными способностями является наличие оператора S^N, отвечающего за перенос «избыточного» ресурса в вершинах на следующий временной слой в те же самые вершины.

§ 3. Малые ресурсы и предельное состояние

Рассмотрим вопрос о существовании единственного предельного состояния в случае малого ресурса, то есть когда $W \leqslant T$.

Построим D сетей с постоянными пропускными способностями следующим образом: сеть G_i ($i = 0, \dots, D-1$) определяется парой $(c(i), B(i))$, где $B(i) = P(i) \cdot P(i+1) \cdot \ldots \cdot P(D-1) \cdot P(0) \cdot \ldots \cdot P(i-1)$.

Каждая из этих сетей является регулярной, поскольку по лемме 1 каждая матрица $B(i)$, определяющая долевое распределение потока в сети G_i, является регулярной. В регулярных сетях при малых ресурсах существует единственное предельное распределение (см. [15]).

Лемма 2. *Пусть Q_i^* — вектор предельного состояния при $W = 1$ в сети G_i, тогда:*

$$Q^*_{(i+1) \bmod D} = Q_i^* \cdot P(i). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для сети $G_{(i+1) \bmod D}$ в качестве начального состояния вектор $Q_{*i}(0) = Q_i^* \cdot P(i)$. Тогда поскольку рассматривается случай малого ресурса, значит,

$$Q_{*i}(1) = \mathcal{A}\left(Q_{*i}(0)\right) = \left(Q_i^* \cdot P(i)\right) \cdot B((i+1) \bmod D). \tag{3.2}$$

Пользуясь определением $B(i)$, преобразуем (3.2) к следующему виду

$$Q_{*i}(1) = \left(Q_i^* \cdot P(i)\right) \cdot P((i+1) \bmod D) \cdot \ldots \cdot P(D-1) \cdot P(0) \cdot \ldots \cdot P(i-1) \cdot P(i),$$

и после перегруппировки множителей получим, что

$$Q_{*i}(1) = Q_i^* \cdot B(i) \cdot P(i).$$

Поскольку вектор Q_i^* является предельным состоянием для сети G_i, тогда $Q_i^* \cdot B(i) = Q_i^*$. Таким образом, получили равенство

$$Q_{*i}(1) = Q_i^* \cdot P(i) = Q_{*i}(0).$$

Последнее означает, что состояние $Q_{*i}(0) = Q_i^* \cdot P(i)$ является устойчивым, а значит, предельным для сети $G_{(i+1) \bmod D}$. Таким образом, в силу единственности предельного состояния имеет место равенство (3.1). Лемма доказана. □

Теорема 1. *Вектор $Q'_{*1} = \left(Q_0^*, \dots, Q_{D-1}^*\right)$ является предельным состоянием для ресурсной сети G' при $W = 1$.*

Доказательство. Действительно, если рассмотреть вектор $Q'(0) = Q'_{*1}$ в качестве начального вектора для вспомогательной ресурсной сети G', то следующее состояние $Q'(1) = \mathcal{A}'(Q'(0)) = Q'_{*1} \cdot P_{G'}$, поскольку $W = 1$. Однако, по лемме 2

$$Q'_{*1} \cdot P_{G'} = \big(Q^*_{D-1} \cdot P(D-1), Q^*_0 \cdot P(0), \ldots, Q^*_{D-2} \cdot P(D-2)\big) = \\ = \big(Q^*_0, \ldots, Q^*_{D-1}\big) = Q'_{*1} = Q'(0),$$

то есть состояние Q'_{*1} является устойчивым для сети G', а значит, предельным. □

Замечание 2. В данной работе мы рассматриваем сильно регулярные динамические периодические ресурсные сети, то есть такие сети, для которых все матрицы $B(i)$ являются регулярными. Однако, для существования единственного предельного состояния на вспомогательной сети G' при $W = 1$ достаточно и более слабого условия: «*хотя бы одна из матриц $B(i)$ должна быть регулярной*».

Теорема 2. *В сети G' при $W \leqslant T$ существует единственное предельное состояние вида*

$$Q'^* = \big(W \cdot Q^*_0, W \cdot Q^*_1, \ldots, W \cdot Q^*_{D-1}\big).$$

Доказательство. Рассмотрим состояние сети G' в момент t: $Q'(t) = Q'^* + \Delta(t)$. Отметим, что сумма всех компонент каждого вектора $\Delta(t)$ равна нулю, поскольку суммарная величина ресурса в сети не меняется с течением времени.

Рассмотрим процесс функционирования сети G'. Подставляя $Q'(t)$ в (2.3), имеем

$$Q'^* + \Delta(t+1) = \max\{Q'^* + \Delta(t) - C, \mathbf{0}\} \cdot S^n + \min\{Q'^* + \Delta(t), C\} \cdot P_{G'}.$$

Группируя и вынося Q'^* из минимума по правилу $\min(a+b, a+c) = a + \min(b, c)$, получим

$$Q'^* + \Delta(t+1) = \max\{\Delta(t) - (C - Q^*), \mathbf{0}\} \cdot S^n + Q'^* + \min\{\Delta(t), C - Q^*\} \cdot P_{G'}.$$

Учитывая, что $C \geqslant Q^*$, обозначим разность $C - Q^*$ через C' и получим, что изменение значений $\Delta(t)$ описывается соотношением (3.3), аналогичным (2.3), но с другими пропускными способностями вершин:

$$\Delta(t+1) = \max\{\Delta(t) - C', \mathbf{0}\} \cdot S^n + \min\{\Delta(t), C'\} \cdot P_{G'}. \tag{3.3}$$

Докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \Delta(t) = 0$.

Представим вектор $\Delta(t)$ в виде суммы $\Delta(t) = \Delta^+(t) + \Delta^-(t)$ — по положительной и отрицательной частям $\Delta(t)$. Таким образом, $\Delta^+(t) \geqslant 0$ и $\Delta^-(t) \leqslant 0$. Тогда соотношение (3.3) примет следующий вид:

$$\Delta(t+1) = \max\{\Delta^+(t) - C', \mathbf{0}\} \cdot S^n + \min\{\Delta^+(t), C'\} \cdot P_{G'} + \Delta^-(t) \cdot P_{G'}.$$

Отметим, что сумма компонент вектора $\Delta^-(t) \cdot P_{G'}$ совпадает с суммой компонент $\Delta^-(t)$ и отрицательна. Сумму оставшихся положительных векторов обозначим через $\hat{\Delta}^+(n)$.

Нам осталось показать, что через некоторое конечное время τ найдется такая вершина $x \in G'$, что $(\Delta^-(t+\tau) \cdot P_{G'})_x \neq 0$ и $(\hat{\Delta}^+(t+\tau))_x \neq 0$.

Предположим, что это не так, что для любого промежутка времени для каждой вершины x либо $(\Delta^-(t+\tau) \cdot P_{G'})_x = 0$, либо $(\hat{\Delta}^+(t+\tau))_x = 0$. Отсюда следует, что имеет место следующее соотношение

$$\Delta^-(t+1) = \Delta^-(t) \cdot P_{G'}.$$

Таким образом, изменение значений вектор-функции $\Delta^-(t)$ описывается марковской цепью, которая определяется стохастической матрицей ресурсной сети G'. Такая ситуация соответствует условиям теоремы 1 для единичного ресурса в сети G'. Это означает, что существует предельное «состояние» $\Delta^-_* = \delta \cdot (Q^*_0, \ldots, Q^*_{D-1})$, где $\delta = \sum\limits_{x \in G'} \Delta^-(0)$, при этом вектор Δ^-_* не имеет нулевых компонент. Следовательно, существует конечное число θ (более того, можно показать, что для регулярных сетей $\theta \leqslant n$) такое, что вектор $\Delta^-(t+\theta) = \Delta^-(t) \cdot (P_{G'})^\theta$ не содержит нулевых компонент. Получили противоречие.

Таким образом, через каждые n итераций найдется хотя бы одна такая вершина $x \in G'$, что $(\Delta^-(t+n) \cdot P_{G'})_x \neq 0$ и $(\hat{\Delta}^+_x(t+n))_x \neq 0$. Следовательно, сумма отрицательных компонент вектор-функции $\Delta(t)$ уменьшается через каждые n итераций. Сумма положительных компонент по абсолютному значению совпадает с суммой отрицательных. Таким образом, общая сумма модулей компонент вектор-функции Δ стремится к нулю. Последнее означает, что $\lim\limits_{t \to \infty} \Delta(t) = 0$. Теорема доказана. □

Таким образом, поскольку процесс перераспределения ресурсов в сети G' моделирует аналогичный процесс в исходной динамической сети G (см. [17]), значит, последовательность $Q'^* = \big(W \cdot Q^*_0, W \cdot Q^*_1, \ldots, W \cdot Q^*_{D-1}\big)$ образует набор предельных состояний (см. [15]) в исходной сети G.

§ 4. Большие ресурсы и единственность предельного состояния

Теперь рассмотрим вопрос о существовании единственного предельного состояния в случае большого ресурса, то есть когда $W > T$.

Теорема 3. *Для любой регулярной периодической динамической ресурсной сети G, для любого начального состояния при $W > T$ существует предельное состояние.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим предельное состояние Q'^* для вспомогательной сети при $W = T$. Построим вспомогательную сеть G'', соответствующую паре (C'', P''), где $C'' = C - Q'^*$, а матрица P'' получена из марицы $P_{G'}$ следующим образом: если $C''_i = 0$, то $P''_i = (P_{G'})_i$. В противном случае элементы i-той строки P'' определяется соотношением

$$P''_{ij} = \begin{cases} 1, & j = (i+n) \bmod D, \\ 0, & j \neq (i+n) \bmod D, \end{cases}$$

при этом величина C''_i полагается равной $W - T$.

Сеть G'' получена из G' удалением насыщенных ресурсным потоком дуг, а в случае, если после такого удаления из какой-то вершины не осталось выходящих дуг, то достраивается дуга, ведущая в вершину следующего слоя. Последняя дуга означает перенос «оставшегося» ресурса в вершине исходной динамической ресурсной сети. Таким образом, сеть G'' моделирует распределение «оставшегося» ресурса величины $W - T$, то есть величины превышения порогового значения.

Отметим, что сеть G'' разбивается на полуэргодические компоненты связности, состоящие из невозвратных вершин и изолированных (см. [20]) эргодических компонент, при этом если изолированная компонента содержит хотя бы одну вершину множества A_x, то она содержит все вершины этого множества. Величина ресурса невозвратных вершин со временем станет раной нулю и весь оставшийся «нераспределенным» ресурс соберется в изолированных эргодических компонентах. Таким образом, будем рассматривать ресурсный поток только на изолированных эргодических компонентах.

Для каждой такой изолированной компоненты если

1) она является простым циклом, то есть содержит вершины только одного множества A_x и только достроенные дуги, обеспечивающие перенос ресурса на следующий временной слой, то предельное состояние в такой компоненте является единственным;

2) ее суммарный ресурс равен нулю, то ее предельное состояние является единственным (нулевым);

3) она не является простым циклом и ее суммарный ресурс не равен нулю, то найдем для нее пороговое значение (см. [17, 21]) и повторим действие, описанное для вспомогательной сети G' (структура вспомогательной сети G' такова, что повторяя такой процесс для оставшегося ресурса в итоге будут оставаться только простые циклы, проходящие по всем временным слоям).

Количество таких построений не превышает числа вершин исходной сети. Таким образом, предельное состояние ресурсной сети G' может быть получено суммированием соответствующих компонент предельных состояний всех полученных в итоге вспомогательных сетей. Теорема доказана. □

Подход, примененный в доказательстве, позволяет говорить о существовании предельного состояния в случае $W > T$, но не позволяет определять его. Предельное состояние в случае бóльших ресурсов, так же как и для не динамических ресурсных сетей, зависит от начального состояния. Для его определения необходимо знать, в каких пропорциях распределится «остаток» ресурса по изолированным эргодическим компонентам.

§ 5. Заключение

В классической теории ресурсных сетей для динамического процесса перераспределения ресурса предполагается, что сами сети, на которых рассматриваются данные процессы, являются статическими. В настоящей работе исследованы процессы перераспределения ресурса в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях, то есть в сетях с изменяющимися пропускными способностями. Рассмотрена задача нахождения предельного состояния ресурса в таких сетях для случаев малых и больших ресурсов.

В случае перераспределения малого ресурса доказана теорема о существовании единственного предельного состояния для вспомогательной сети в случае перераспределения малого ресурса. Показано, что процесс перераспределения ресурса во вспомогательной сети моделирует аналогичный процесс в периодической динамической ресурсной сети. Разработан метод нахождения предельного состояния периодической динамической ресурсной сети.

В случае перераспределения большого ресурса показано, что для каждого начального состояния периодической динамической ресурсной сети существует предельное состояние, однако, такое предельное состояние не является единственным, а зависит от начального состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ford L. R., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows // Operations Research. 1958. Vol. 6. Issue 3. P. 419–433. https://doi.org/10.1287/opre.6.3.419
2. Aronson J. E. A survey of dynamic network flows // Annals of Operations Research. 1989. Vol. 20. Issue 1. P. 1–66. https://doi.org/10.1007/BF02216922
3. Ерзин А. И., Тахонов И. И. Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 3 (23). С. 58–68. http://mi.mathnet.ru/sjim290

4. Fonoberova M., Lozovanu D. The maximum flow in dynamic networks // Computer Science Journal of Moldova. 2004. Vol. 12. No. 3 (36). P. 387–396. http://www.math.md/publications/csjm/issues/v12-n3/7570/
5. Fonoberova M., Lozovanu D. The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving // Computer Science Journal of Moldova. 2005. Vol. 13. No. 1 (37). P. 29–36. http://www.math.md/publications/csjm/issues/v13-n1/8518/
6. Klinz B., Woeginger G. J. One, two, three, many, or: complexity aspects of dynamic network flows with dedicated arcs // Operations Research Letters. 1998. Vol. 22. Issues 4–5. P. 119–127. https://doi.org/10.1016/S0167-6377(98)00009-1
7. Orlin J. B. Maximum-throughput dynamic network flows // Mathematical Programming. 1983. Vol. 27. Issue 2. P. 214–231. https://doi.org/10.1007/BF02591946
8. Скороходов В. А., Чеботарёва А. С. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22. № 3. С. 55–74. https://doi.org/10.17377/daio.2015.22.455
9. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.
10. Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2011. № 1 (161). С. 21–26. https://elibrary.ru/item.asp?id=15622169
11. Кузьминова М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2008. № 1 (143). С. 14–19. https://elibrary.ru/item.asp?id=9989543
12. Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states // Management and Production Engineering Review. 2011. Vol. 2. No. 3. P. 33–39.
13. Кузнецов О. П., Жилякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети: новая потоковая модель // Доклады Академии наук. 2010. Т. 433. № 5. С. 609–612. https://elibrary.ru/item.asp?id=15142541
14. Жилякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 4. С. 133–143. http://mi.mathnet.ru/at1694
15. Жилякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах // Управление большими системами. 2013. Вып. 43. С. 34–54. http://mi.mathnet.ru/ubs673
16. Жилякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы // Управление большими системами. 2013. Вып. 45. С. 6–29. http://mi.mathnet.ru/ubs715
17. Скороходов В. А., Абдулрахман Х. Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2018. № 4. С. 186–194. https://elibrary.ru/item.asp?id=36516098
18. Новиков Ф. А. Дискретная математика. СПб.: Питер, 2013.
19. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
20. Скороходов В. А. Устойчивость и стационарное распределение на графах с нестандартной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2007. № 4 (140). С. 17–21. https://elibrary.ru/item.asp?id=13052922
21. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети // Управление большими системами. 2016. Вып. 63. С. 6–23. http://mi.mathnet.ru/ubs886

Поступила в редакцию 09.09.2020

Скороходов Владимир Александрович, д. ф.-м. н., доцент, профессор, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, 344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а.
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Свиридкин Дмитрий Олегович, студент, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, 344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а.
E-mail: sv.l1@mail.ru

Цитирование: В. А. Скороходов, Д. О. Свиридкин. Потоки в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 458–470.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 3. Pp. 458–470.

V. A. Skorokhodov, D. O. Sviridkin

Flows in strongly regular periodic dynamic resource networks

Keywords: resource network, dynamic networks, threshold value, process of resources allocation, limit state in resource network.

MSC2020: 05C21, 05C90

DOI: 10.35634/vm210308

This paper is devoted to studying the processes of resource allocation in dynamic resource networks. In such networks, the capacities of the arcs depend on time. Resource allocation in the network occurs in discrete time. The resource of each vertex is distributed only between adjacent vertices according to some rules. The study of the processes of resource redistribution in such networks is carried out. The main goal is to develop methods for finding the limit state (distribution) of a resource in a dynamic resource network. It is shown that the approach based on the construction of an auxiliary network is also applicable to reduce the problem of resource allocation in a dynamic network to a similar problem in an auxiliary network. Theorems on the existence of a limit state on an auxiliary graph are proved for strongly regular periodic dynamical networks. To find the limit states, one can use the approaches which are developed for the shortest path problem in dynamic networks.

REFERENCES

1. Ford L. R., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows, *Operations Research*, 1958, vol. 6, issue 3, pp. 419–433. https://doi.org/10.1287/opre.6.3.419
2. Aronson J. E. A survey of dynamic network flows, *Annals of Operations Research*, 1989, vol. 20, issue 1, pp. 1–66. https://doi.org/10.1007/BF02216922
3. Erzin A. I., Takhonov I. I. Equilibrium resource distribution in a network model, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, vol. 1, issue 3, pp. 293–302. https://doi.org/10.1134/S1990478907030052
4. Fonoberova M., Lozovanu D. The maximum flow in dynamic networks, *Computer Science Journal of Moldova*, 2004, vol. 12, no. 3 (36), pp. 387–396. http://www.math.md/publications/csjm/issues/v12-n3/7570/
5. Fonoberova M., Lozovanu D. The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving, *Computer Science Journal of Moldova*, 2005, vol. 13, no. 1 (37), pp. 29–36. http://www.math.md/publications/csjm/issues/v13-n1/8518/
6. Klinz B., Woeginger G. J. One, two, three, many, or: complexity aspects of dynamic network flows with dedicated arcs, *Operations Research Letters*, 1998, vol. 22, issues 4–5, pp. 119–127. https://doi.org/10.1016/S0167-6377(98)00009-1
7. Orlin J. B. Maximum-throughput dynamic network flows, *Mathematical Programming*, 1983, vol. 27, issue 2, pp. 214–231. https://doi.org/10.1007/BF02591946
8. Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S. The maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 435–446. https://doi.org/10.1134/S199047891503014X
9. Erusalimskii Ya. M., Skorokhodov V. A., Kuz'minova M. V., Petrosyan A. G. *Grafy s nestandartnoi dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya* (Graphs with non-standard reachability: problems, application), Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2009.
10. Skorokhodov V. A. Flows on graphs with varying transit times through the arcs, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Ser. Estestvennye nauki*, 2011, no. 1 (161), pp. 21–26 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=15622169
11. Kuz'minova M. V. Periodic dynamic graphs. Maximum flow problem, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Ser. Estestvennye nauki*, 2008, no. 1 (143), pp. 14–19 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=9989543

12. Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states, *Management and Production Engineering Review*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 33–39.
13. Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu. Bidirectional resource networks: A new flow model, *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no. 1, pp. 643–646. https://doi.org/10.1134/S1064562410040368
14. Zhilyakova L. Yu. Asymmetrical resource networks. I. Stabilization processes for low resources, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 4, pp. 798–807. https://doi.org/10.1134/S0005117911040102
15. Zhilyakova L. Yu. Ergodic cyclic resource networks. I. Oscillations and equilibrium at low resources, *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*, 2013, issue 43, pp. 34–54 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ubs673
16. Zhilyakova L. Yu. Ergodic cyclic resource networks. II. High levels of resource, *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*, 2013, issue 45, pp. 6–29 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ubs715
17. Skorokhodov V. A., Abdulrahman H. Dynamic resource networks. The case of small resource, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Fizika. Matematika*, 2018, no. 4, pp. 186–194 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=36516098
18. Novikov F. A. *Diskretnaya matematika* (Discrete mathematics), Saint Petersburg: Piter, 2013.
19. Gantmacher F. R. *The theory of matrices. Vol. 1, 2.*, Providence, RI: AMS, 2000.
20. Skorokhodov V. A. Stability and stationary distribution on graphs with non-standard reachability, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Ser. Estestvennye nauki*, 2007, no. 4 (140), pp. 17–21 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=13052922
21. Skorokhodov V. A. The problem of finding the threshold value in ergodic resource network, *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*, 2016, issue 63, pp. 6–23 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ubs886

Received 09.09.2020

Vladimir Aleksandrovich Skorokhodov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, ul. Mil'chakova, 8 a, Rostov-on-Don, 344090, Russia.
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Dmitrii Olegovich Sviridkin, Student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, ul. Mil'chakova, 8 a, Rostov-on-Don, 344090, Russia.
E-mail: sv.l1@mail.ru

Citation: V. A. Skorokhodov, D. O. Sviridkin. Flows in strongly regular periodic dynamic resource networks, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 458–470.