МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 3–18.

УДК 519.632

© *А. С. Ильинский, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов*

О СХОДИМОСТИ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО МЕТОДА В РЕШЕНИИ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В $\mathbb{R}^2$ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрено применение барицентрического метода для численного решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Основное допущение в решении заключается в задании границы Ω в кусочно-линейном представлении. Отличительная особенность барицентрического метода состоит в порядке формирования глобальной системы векторных базисных функций для Ω через барицентрические координаты. Установлены существование и единственность решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца барицентрическим методом и определена оценка скорости сходимости. Уточнены особенности алгоритмической реализации метода.

Ключевые слова: внутренние задачи Дирихле и Неймана, уравнение Гельмгольца, многоугольник произвольной формы, барицентрический метод, метод Галёркина, барицентрические координаты, оценка сходимости.

DOI: 10.35634/vm210101

Введение

В работах [1–3] для численного решения уравнения Гельмгольца в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в вариационной и проекционной постановках предложен барицентрический метод. Его основное преимущество в сравнении с известными состоит в том, что метод предполагает задание глобальной системы базисных функций для Ω без ее разбиения на элементарные подобласти. Базисные функции формируются с использованием классических интерполяционных методов [4] в барицентрической системе координат, которая вводится для Ω при ее представлении в виде многоугольной области. Правила определения обобщенных барицентрических координат для произвольных многоугольников известны из работ E. L. Wachspress, M. Meyer, M. S. Floater, J. Warren, K. Hormann, N. Sukumar, Tao Ju, A. Belyaev, C. Gotsman, Xian-Ying Li, Shi-Min Hu и др. [5–12], однако они либо в лучшем случае задают псевдогармонические БК для Ω, либо требуют значительных вычислительных затрат и не обладают универсальностью для сложных относительно геометрической формы Ω. В работе [13] для исключения указанного недостатка разработан приближенно-аналитический метод, который позволяет с экспоненциальной скоростью сходимости формировать решение по определению гармонических БК для произвольных многоугольников.

Вместе с тем относительно барицентрического метода вопросы существования и единственности решения уравнения Гельмгольца в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и получения априорных оценок скорости сходимости в работах [1–3] остались нераскрыты. Также в [2, 3] при решении векторного уравнения Гельмгольца вычислительно избыточно предлагается формировать векторные базисные функции через дифференциальные формы Уитни (краевые базисные векторные функции Неделека [14]).

Материал настоящей статьи представляет решения, снимающие указанные вопросы.

§ 1. Постановка задачи

На плоскости $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим односвязную область Ω, ограниченную замкнутой несамопересекающейся ломаной линией $\partial\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{N-1} \partial\Omega_n$ при параметризации $\partial\Omega_n = \{e_n t + P_n,\ t \in [0,1]\}$, где $e_n = P_{n+1 \mod N} - P_n$; $\{P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}\}$ — множество неповторяющихся вершин Ω $(P_n = (x_1^n, x_2^n))$, нумерация которых задана в порядке обхода Ω против часовой стрелки. Обозначим: β — волновое число Ω, $\operatorname{Im}\beta \geqslant 0$, $\beta \neq 0$; ν — единичная нормаль, направленная в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$; $f \in C(\Omega)$ — известная в Ω функция, удовлетворяющая условию Липшица $|f(x) - f(y)| < L^0 |x - y|$; L^0 — константа Липшица. Положим $\mathcal{L}u = \Delta u + \beta^2 u$ — симметричный дифференциальный оператор. Введем в рассмотрение следующие задачи, исходно предполагая, что их решение существует и единственно [15, с. 109, 110].

Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{L}u = f \ \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

и граничному условию

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.2}$$

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости и удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{L}u = f \ \text{ в } \Omega \tag{1.3}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Решение задач Дирихле и Неумана предлагается выполнять в проекционной постановке при разложении неизвестной функции u по базису [16, с. 279]

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j=0}^{\mathcal{M}} c_j \psi_j(x)$$

с последующим сведением уравнения Гельмгольца к системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов разложения c_j $\left(j = \overline{0, \mathcal{M}}\right)$ при выдвижении требования ортогональности невязки $\mathcal{N}(x) = \mathcal{L}\left[\sum\limits_{j=0}^{\mathcal{M}} c_j \psi_j(x)\right] - f(x)$ к базисным функциям $\psi_j(x)$:

$$\int_\Omega \mathcal{N}(x)\, \psi_j(x)\, dx = 0,$$

которое с учетом первой теоремы Грина и граничных условий (1.2), (1.4) сводится к виду

$$\sum_{j'=0}^{\mathcal{M}} c_{j'} \left[\int_\Omega \nabla\psi_{j'} \nabla\psi_j dx - \beta^2 \int_\Omega \psi_{j'}\psi_j dx\right] = \int_\Omega f \psi_j dx. \tag{1.5}$$

Эффективность решений задач Дирихле и Неймана существенным образом зависит от рациональности выбора набора базисных функций $\psi_j(x)$ для Ω, которые должны удовлетворять соответствующим краевым условиям (1.2) и (1.4). Основу формирования глобальной [18, с. 98] полной системы базисных функций $\psi_j(x) \in C(\Omega)$ в барицентрическом методе составляет задача аппроксимации непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ и ее частных производных $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ в Ω.

§ 2. Аппроксимация в барицентрическом методе липшицевой функции внутри произвольного многоугольника и оценка порядка ее приближения

Основу формирования $\psi_j(x) \in C(\Omega)$ в барицентрическом методе составляет этап построения для Ω набора $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ функций формы $\zeta_n(x) \in C^1(\Omega) : \zeta(x) > 0$, $x \in \Omega$, в качестве которых выступают барицентрические координаты (БК).

Определение 1. Барицентрическими координатами ζ_n назовем набор $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ функций $\zeta_n(x) \in [0,1]$ $(x \in \Omega)$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \Delta\zeta_n(x) = 0, \ \ x \in \Omega; \\ \zeta_n(x) = t, \ \ x \in \partial\Omega_{n-1}; \ \zeta_n(x) = 1 - t, \ \ x \in \partial\Omega_n; \\ \zeta_n(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega \backslash \{\partial\Omega_{n-1}, \partial\Omega_n\}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Правило определения БК разработано в [13] и при построении Ω на $\mathbb{C}$ состоит в следующем.

Теорема 1 (см. [13]). *$\exists \tilde{K} \in \mathbb{N}\colon \forall K \geqslant \tilde{K}$ решение*

$$\tilde{\zeta}_n^K(x) = \frac{-1}{\pi} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K} \sqrt{2k+1} \mathrm{Im}\left[Q_k \left(2\frac{x - P_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right] X_{n'k}^n \tag{2.2}$$

задачи (2.1) *существует и единственно, при этом справедливы оценки*

$$\begin{gathered} \left\| \zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^K(x) \right\|_C \leqslant \mathrm{const} \max_{n'=0,N-1} \left\{ \frac{2\varpi_{n'}^{-1} |e_{n'}|^2 (4\pi - \alpha_{n'})}{\left| \overline{P_{n'}} |e_{n'}|^2 - \overline{e_{n'}} Re\left(e_{n'} \overline{P_{n'}} \right) \right|} \right\} \left(\frac{1}{K+0{,}5} + \frac{1}{K+1{,}5} \right), \\ \left\| \zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^K(x) \right\|_{L_2} \leqslant \frac{\mathrm{const} K 2^{-K}}{(2K+1)\sqrt{2K+3}}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где const — *независящая от K постоянная.*

В выражениях (2.2), (2.3) приняты следующие обозначения: $\varpi_{n'} = \min\left\{ \frac{\pi}{\pi + |\pi - \alpha_{n'}|}, \Theta_{n'} \right\}$; $\Theta_{n'} = \begin{cases} |\sin \alpha_{n'}|, & \alpha_{n'} \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \alpha_{n'} \in [\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2]; \end{cases}$ $\alpha_{n'}$ — внутренний угол Ω при вершине $P_{n'}$; $\vec{X}^n = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1} \vec{U}^n$ — блочный вектор размера $\tilde{N} = N(K+1)$, составленный из элементов $X_{n'k}^n$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица размера $\tilde{N} \times \tilde{N}$; $\vec{U}^n$ — блочный вектор размера $\tilde{N}$, составленный из элементов

$$U_{n'k}^n = \begin{cases} 1, \ (n = n' \vee n = n' - 1) \wedge k = 0, \\ -1/3, \ \ n = n' \wedge k = 1, \\ 1/3, \ \ n = n' - 1 \wedge k = 1, \\ 0, \ \text{если иначе}; \end{cases}$$

$\mathbf{T}$ — блочная матрица размера $\tilde{N} \times \tilde{N}$, состоящая из элементов

$$T_{kk'}^{nn'} = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^{1} \mathrm{Im} \left[Q_{k'} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2\left(P_n - P_{n'}\right)}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_k\left(\tau\right) d\tau, \tag{2.4}$$

где $L_k\left(\tau\right)$ и $Q_k\left(z\right)$ — многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно:

$$L_0\left(\tau\right) = 1;\ L_1\left(\tau\right) = \tau;\ L_k\left(\tau\right) = \frac{2k-1}{k} \tau L_{k-1}\left(\tau\right) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}\left(\tau\right);$$
$$Q_0\left(z\right) = \mathrm{arcth}\left(z\right);\ Q_1\left(z\right) = z\,\mathrm{arcth}\left(z\right) - 1;$$
$$Q_k\left(z\right) = \frac{2k-1}{k} z Q_{k-1}\left(z\right) - \frac{k-1}{k} Q_{k-2}\left(z\right),\ \ \tau \in [-1,1],\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Интеграл (2.4) может быть вычислен аналитически по правилам, представленным в [4, 13], или численно квадратурным методом Гаусса–Лежандра с адаптивным выбором числа $\mathcal{J}$ узлов интегрирования в зависимости от порядков многочленов k и k' при определении погрешности $\delta_{\mathcal{J}}$ аппроксимации [21, с. 15]:

$$\delta_{\mathcal{J}} \leqslant \frac{2^{2\mathcal{J}+1}\left(\mathcal{J}!\right)^4}{\left(2\mathcal{J}+1\right)\left[\left(2\mathcal{J}\right)!\right]^3} \left\| \begin{array}{l} \mathrm{Im}\left[Q_{k'}^{(2\mathcal{J})} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2\left(P_n - P_{n'}\right)}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_k\left(\tau\right) + \\ + \mathrm{Im}\left[Q_{k'} \left(\frac{e_n}{e_{n'}} \tau + \frac{e_n + 2\left(P_n - P_{n'}\right)}{e_{n'}} - 1 \right) \right] L_k^{(2\mathcal{J})}\left(\tau\right) \end{array} \right\|_C,$$

где $Q_{k'}^{(l)}\left(z\right) = \frac{\partial^l Q_{k'}(z)}{\partial z^l}$, $L_{k'}^{(l)}\left(z\right) = \frac{\partial^l L_{k'}(z)}{\partial z^l}$.

Постановка (2.1) и теоремы о максимуме и минимуме гармонической функции [19, с. 211] обеспечивают $\forall x \in \Omega$ выполнение следующих условий: $\zeta_n\left(x\right) \in [0,1]$, $\sum\limits_{n=0}^{N-1} \zeta_n\left(x\right) = 1$, $x = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \zeta_n\left(x\right) P_n$. В этом случае формирование $\psi_j\left(x\right)$ через $\vec{\zeta}$ при использовании классических интерполяционных методов в соответствии с теоремой Вейерштрасса [20, с. 100] и ее обобщением (теорема Вейерштрасса–Стоуна) позволяет установить полный набор базисных функций.

Определим множество мультииндексов [3]:

$$\tilde{\mathbb{M}}_p = \left\{ \tilde{j} = \left(\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, \ldots, \tilde{j}_n, \ldots, \tilde{j}_{N-1}\right)\ :\ \tilde{j}_n \in \mathbb{Z}_+,\ \sum_{n \in [0;N-1]} \tilde{j}_n = p \right\}, \tag{2.5}$$

где $p \in \mathbb{N}$, $\left|\tilde{\mathbb{M}}_p\right| = \binom{N+p-1}{N-1} = \binom{N+p-1}{p}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

По аналогии с [22] введем дискретное множество точек $x^{\tilde{j}} \in \tilde{\mathbb{X}}_p$, $x^{\tilde{j}} = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \varsigma_n^{\tilde{j}} P_n$, $\varsigma_n^{\tilde{j}} = \frac{\tilde{j}_n}{p}$ — $\tilde{j}$-ые узловые точки интерполяции. Обозначим через $\overline{\mathbb{X}}_p$ подмножество множества $\tilde{\mathbb{X}}_p$, для любых элементов которого выполняется условие $x^{\bar{j}} \neq x^{\bar{j}'}$ при $\bar{j} \neq \bar{j}'$, где $\bar{j}, \bar{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p$, $\overline{\mathbb{M}}_p \subset \tilde{\mathbb{M}}_p$.

Пусть $x^{\bar{j}} \in \overline{\mathbb{X}}_p$ формируют на $\overline{\Omega}$ сетку узлов интерполяции $\Psi_p\left(x\right) = \sum\limits_{\bar{j} \in \overline{\mathbb{M}}_p} f\left(x^{\bar{j}}\right) \psi_{\bar{j}}\left(x\right)$. Тогда, опираясь на известные результаты доказательства теоремы Вейерштрасса и теоремы о порядке приближения многочленами Бернштейна некоторой функции $v\left(t\right)$, удовлетворяющей на отрезке $[0,1]$ условию Липшица [23, с. 349–353], докажем равномерную сходимость многочлена $\Psi_p(x)$ к функции $f(x)$ и оценим порядок ее приближения при $\psi_{\bar{j}}(x) = p! \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\bar{j}_n}}{\bar{j}_n!}$.

Лемма 1. *Если $f(x)$ удовлетворяет на Ω условию Липшица с константой L^0, то*

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\Psi_p(x) - f(x)| < \infty$$

и справедлива оценка

$$\sup_{x\in\Omega} |\Psi_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{L^0 C_1}{\sqrt{p}} h, \tag{2.6}$$

где C_1 — некоторая постоянная, не зависящая от p; $h = \frac{1}{2} \max_{n_1,n_2\in[0;N-1]} |P_{n_1} - P_{n_2}|$.

Доказательство. Пусть Ω — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^2$ и $\overline{\mathbb{X}}_p = \tilde{\mathbb{X}}_p$, $\overline{\mathbb{M}}_p = \tilde{\mathbb{M}}_p$. Тогда, принимая во внимание свойства БК [3, с. 28], бином Ньютона [23, с. 349], правило (2.5) определения $\tilde{\mathbb{M}}_p$, свойства многочленов Бернштейна и составных кривых Безье [24], последовательным выводом для $\forall x \in \Omega$ установим следующие тождества:

$$p! \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = 1; \tag{2.7}$$

$$p! \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \sum_{n=0}^{N-1} [\zeta_n(x)]^2 \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = \sum_{n=0}^{N-1} [\zeta_n(x)]^2; \tag{2.8}$$

$$\frac{p!}{p} \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{j}_n \zeta_n(x) \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = \sum_{n=0}^{N-1} [\zeta_n(x)]^2; \tag{2.9}$$

$$\frac{p!}{p^2} \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\tilde{j}_n\right)^2 \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \left([\zeta_n(x)]^2 - \frac{[\zeta_n(x)]^2}{p} + \frac{\zeta_n(x)}{p} \right); \tag{2.10}$$

$$\frac{p!}{p} \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \sum_{n_1=0}^{N-2} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-1} \tilde{j}_{n_1} \zeta_{n_2}(x) \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = \sum_{n_1=0}^{N-2} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-1} \zeta_{n_1}(x) \zeta_{n_2}(x); \tag{2.11}$$

$$\frac{p!}{p^2} \sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p} \sum_{n_1=0}^{N-2} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-1} \tilde{j}_{n_1} \tilde{j}_{n_2} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!} = \frac{p-1}{p} \sum_{n_1=0}^{N-2} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-1} \zeta_{n_1}(x) \zeta_{n_2}(x). \tag{2.12}$$

Используя равенства (2.7)–(2.12) и свойства БК [3, с. 28], получим

$$p!\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\tilde{j}_n}{p}-\zeta_n(x)\right]x_1^n\right)^2\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}=\frac{p!}{p^2}\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left(\tilde{j}_n x_1^n\right)^2-\right.$$
$$-2p\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{j}_n\zeta_n(x)\left(x_1^n\right)^2+p^2\sum_{n=0}^{N-1}\left(\zeta_n(x)x_1^n\right)^2+2\sum_{n_1=0}^{N-2}\sum_{n_2=n_1+1}^{N-1}\left[\tilde{j}_{n_1}-p\zeta_{n_1}(x)\right]x_1^{n_1}\times$$
$$\left.\times\left[\tilde{j}_{n_2}-p\zeta_{n_2}(x)\right]x_1^{n_2}\right]\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}=\frac{1}{p}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\zeta_n(x)\left(1-\zeta_n(x)\right)\left(x_1^n\right)^2-\right.\tag{2.13}$$
$$\left.-2\sum_{n_1=0}^{N-2}\sum_{n_2=n_1+1}^{N-1}\zeta_{n_1}(x)\zeta_{n_2}(x)x_1^{n_1}x_1^{n_2}\right]=\frac{1}{p}\sum_{n_1=0}^{N-2}\sum_{n_2=n_1+1}^{N-1}\zeta_{n_1}(x)\zeta_{n_2}(x)\left[x_1^{n_1}-x_1^{n_2}\right]^2.$$

Учитывая тождества (2.7) и (2.13), неравенство Коши–Буняковского, свойства БК [3, с. 28] и справедливое для липшицевой функции неравенство $|f(x)-f(y)|\leqslant L^0|x-y|$ $(\forall x,y\in\Omega)$, определим оценку

$$|\Psi_p(x)-f(x)|\leqslant p!\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left|f\left(x^{\tilde{j}}\right)-f(x)\right|\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}\leqslant$$
$$\leqslant L^0p!\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left|x^{\tilde{j}}-x\right|\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}=L^0p!\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\tilde{j}_n}{p}-\zeta_n(x)\right)P_n\right|\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}\leqslant$$
$$\leqslant L^0\sqrt{\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\tilde{j}_n}{p}-\zeta_n(x)\right]x_1^n\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\tilde{j}_n}{p}-\zeta_n(x)\right]x_2^n\right)^2\right\}\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}}\times$$
$$\times p!\sqrt{\sum_{\tilde{j}\in\tilde{\mathbb{M}}_p}\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\tilde{j}_n}}{\tilde{j}_n!}}=\frac{L^0}{\sqrt{p}}\left(\sum_{n_1=0}^{N-2}\sum_{n_2=n_1+1}^{N-1}\zeta_{n_1}(x)\zeta_{n_2}(x)\left|P_{n_1}-P_{n_2}\right|^2\right)^{1/2}.\tag{2.14}$$

Из (2.14) и свойств БК [3, с. 28] получим неравенство

$$\sup_{x\in\Omega}|\Psi_p(x)-f(x)|\leqslant\frac{L^0}{\sqrt{p}}\frac{1}{2}\max_{n_1,n_2\in[0;N-1]}|P_{n_1}-P_{n_2}|,\tag{2.15}$$

которое справедливо в случае невырожденного Ω.

Заметим, что если Ω — вырожденный симплекс и $\overline{\mathbb{X}}_p\subset\tilde{\mathbb{X}}_p$, $\overline{\mathbb{M}}_p\subset\tilde{\mathbb{M}}_p$, то в силу свойств БК [3, с. 28] в выражениях (2.7)–(2.12) знак «=» справедливо заменить на «$\leqslant$» при домножении правой части получившихся неравенств на некоторую константу, не зависящую от p. Затем, реализуя аналогичную процедуру вывода оценок вида (2.13)–(2.15), определим справедливость (2.6). Лемма 1 доказана. $\square$

Используя результаты леммы 1 и [23, с. 354, 355], рассмотрим вопрос равномерной сходимости многочленов $\Psi_p^{1,2}(x)=\sum\limits_{\bar{j}\in\overline{\mathbb{M}}_p}f\left(x^{\bar{j}}\right)\frac{\partial\psi_{\bar{j}}(x)}{\partial x_{1,2}}$ к частным производным $\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}$ функции $f(x)$ и оценим порядок их приближения при

$$\frac{\partial\psi_{\bar{j}}(x)}{\partial x_{1,2}}=p!\sum_{\substack{n'=0\\ \bar{j}_{n'}>0}}^{N-1}\frac{\partial\zeta_{n'}(x)}{\partial x_{1,2}}\frac{[\zeta_{n'}(x)]^{\bar{j}_{n'}-1}}{(\bar{j}_{n'}-1)!}\prod_{\substack{n=0\\ n\neq n'}}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\bar{j}_n}}{\bar{j}_n!}.$$

Лемма 2. *Если частные производные* $\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}$ *непрерывной функции* $f(x)$ *удовлетворяют на* Ω *условию Липшица с константой* L^0, *то* $\lim\limits_{p\to\infty}\sup\limits_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}-\Psi_p^{1,2}(x)\right|<\infty$ *и справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\Psi_p^{1,2}(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}\right|\leqslant L^0\left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}}+\frac{1}{p}\right), \tag{2.16}$$

где C_1 *— некоторая постоянная, не зависящая от* p; $h=\dfrac{1}{2}\max\limits_{n_1,n_2\in[0;N-1]}|P_{n_1}-P_{n_2}|$.

Доказательство. Принимая правило дифференцирования сложных функций, определим разность многочленов $\Psi_p^{1,2}(x)$ и соответствующих частных производных $\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}$ функции $f(x)$ в виде

$$\begin{gathered}\Psi_p^{1,2}(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}=p!\sum_{\overline{j}\in\overline{\mathbb{M}}_p}\sum_{\substack{n'=0\\ \overline{j}_{n'}>0}}^{N-1}\frac{\partial\zeta_{n'}(x)}{\partial x_{1,2}}f\left(x^{\overline{j}}\right)\frac{[\zeta_{n'}(x)]^{\overline{j}_{n'}-1}}{\left(\overline{j}_{n'}-1\right)!}\prod_{\substack{n=0\\ n\neq n'}}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\overline{j}_n}}{\overline{j}_n!}-\\ -\sum_{n'=0}^{N-1}\frac{\partial\zeta_{n'}(x)}{\partial x_{1,2}}f'_{n'}(x),\end{gathered} \tag{2.17}$$

где $f'_{n'}(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial\zeta_{n'}}$ обозначает частную производную функции $f(x)$ по $\zeta_{n'}$.

Используя формулу конечных приращений Лагранжа, определим значения $f'_{n'}$ в точках $x'^{\overline{j}}_{n'}=\zeta'^{\overline{j}}_{n'}P_{n'}+\sum\limits_{\substack{n=0\\ n\neq n'\\ n\neq n'_1}}^{N-1}\frac{\overline{j}_n}{p}P_n+\left(1-\zeta'^{\overline{j}}_{n'}-\sum\limits_{\substack{n=0\\ n\neq n'\\ n\neq n'_1}}^{N-1}\frac{\overline{j}_n}{p}\right)P_{n'_1}$ соотношением

$$f'_{n'}\left(x'^{\overline{j}}_{n'}\right)=p\left[f\left(x^{\overline{j}}\right)-f\left(\frac{\overline{j}_{n'}-1}{p}P_{n'}+\frac{\overline{j}_{n'_1}+1}{p}P_{n'_1}+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq n'\\ n\neq n'_1}}^{N-1}\frac{\overline{j}_n}{p}P_n\right)\right], \tag{2.18}$$

где $\zeta'^{\overline{j}}_{n'}\in\left(\frac{\overline{j}_{n'}-1}{p},\frac{\overline{j}_{n'}}{p}\right)$, $\overline{j}_{n'}\in[1;p]$, $\overline{j}_{n'}+\sum\limits_{\substack{n=0\\ n\neq n'}}^{N-1}\overline{j}_n=p$, $n'_1=n'+1\mod N$.

Введем в рассмотрение множество мультииндексов $\overline{\mathbb{M}}_{p-1}$ и зададим функцию $J\left(\overline{j}',n'\right)=\overline{j}$, определяющую соответствие между элементами $\overline{j}'$ и $\overline{j}$ множеств $\overline{\mathbb{M}}_{p-1}$ и $\overline{\mathbb{M}}_p$, для которых справедливы условия $\overline{j}_{n'}-1=\overline{j}'_{n'}$ и $\overline{j}_n=\overline{j}'_n$ при $n\neq n'$. Тогда из (2.17) заметим, что для $n'\in[0;N-1]$ определение многочленов $\Psi_p^{1,2}(x)$ выполняется суммированием по $N\left\|\overline{\mathbb{M}}_{p-1}\right\|$ элементам и с учетом (2.18) справедливо представление

$$\Psi_p^{1,2}(x)=(p-1)!\sum_{n'=0}^{N-1}\frac{\partial\zeta_{n'}(x)}{\partial x_{1,2}}\sum_{\overline{j}'\in\overline{\mathbb{M}}_{p-1}}f'_{n'}\left(x'^{J\left(\overline{j}',n'\right)}_{n'}\right)\prod_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\overline{j}'_n}}{\overline{j}'_n!}. \tag{2.19}$$

Принимая во внимание условие леммы 2, выражения (2.17), (2.19), неравенство Коши–

Буняковского, правило определения точек ${x'}_{n'}^{J(\vec{j}',n')}$ и доказательство леммы 1, получим

$$
\begin{aligned}
&\left|\Psi_p^{1,2}(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}\right| \leqslant L^0 (p-1)! \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{\vec{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_{p-1}} \left|{x'}_{n'}^{J(\vec{j}',n')} - x\right| \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\vec{j}'_n}}{\vec{j}'_n!} \leqslant \\
&\leqslant L^0 (p-1)! \sum_{\vec{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_{p-1}} \left[\left|x^{\vec{j}'} - x\right| + \sum_{n'=0}^{N-1} \left|{x'}_{n'}^{J(\vec{j}',n')} - \frac{x^{\vec{j}'}}{N}\right|\right] \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\vec{j}'_n}}{\vec{j}'_n!} \leqslant \\
&\leqslant L^0 (p-1)! \sum_{\vec{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_{p-1}} \left|x^{\vec{j}'} - x\right| \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\vec{j}'_n}}{\vec{j}'_n!} + \frac{L^0}{p}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Из (2.20), свойств БК [3, с. 28] и результатов доказательства леммы 1, установим справедливость оценки (2.16). Лемма 2 доказана. □

Полученные результаты исследования вопроса аппроксимации липшицевой функции и ее производной на Ω позволяют перейти к непосредственному формированию базисных функций и оценки сходимости барицентрического метода в решении задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4).

§ 3. Формирование базисных функций и оценка сходимости барицентрического метода

Определим пространство Соболева $H^s(\mathbb{R}^2)$ для любого $s \in \mathbb{R}$ со скалярным произведением и нормой [26]

$$
(u,v)_s = \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi, \quad \|u\|_s^2 = (u,u)_s,
$$

где $\langle\xi\rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $\xi \in \mathbb{R}^2$; через $\hat{u}$ обозначается преобразование Фурье распределения u [26].

Следуя [17], положим

$$
\begin{aligned}
H^s(\Omega) &:= \left\{u\big|_\Omega : u \in H^s(\mathbb{R}^2)\right\}, \\
\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right) &:= \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^2) : \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\right\},
\end{aligned}
$$

где $\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right)$ — замкнутое подпространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ с индуцированными скалярным произведением и нормой ($\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right)$ получается замыканием $C^\infty(\Omega)$ в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2)$); $H^s(\Omega) = H^s(\mathbb{R}^2)/\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right)$, в $H^s(\Omega)$ вводятся скалярное произведение и норма фактор-пространства. Пространства $H^{-s}(\Omega)$ и $\tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right)$ антидвойственны друг к другу при всех $s \in \mathbb{R}$.

Также по аналогии с [17] определим гильбертово пространство $W = W\left(\overline{\Omega}\right) :=$ $:= \left\{u \in \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right) : \nabla u \in \tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right)\right\}$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$
\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\nabla u\|_{-1/2}^2
$$

со скалярным произведением

$$
(u,v)_W = (u,v)_{-1/2} + (\nabla u, \nabla v)_{-1/2},
$$

где при определении вектор-функций $\nabla u = (u_1', u_2')^T$, $\nabla v = (v_1', v_2')^T$ скалярное произведение $(\nabla u, \nabla v)_s = (u_1', v_1')_s + (u_2', v_2')_s$.

Введем в рассмотрение подмножество $\mathbb{X}_p \subset \overline{\mathbb{X}}_p$, элементы $x^j \in \mathbb{X}_p$ которого $x^j \notin \partial\Omega$, где $j \in \mathbb{M}_p$, $\mathbb{M}_p \subset \overline{\mathbb{M}}_p$.

Теорема 2. *Пусть*

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j\in\mathbb{M}_p} c_j \psi_j(x), \tag{3.1}$$

тогда метод Галёркина (1.5) *для задачи* (1.1)*,* (1.2) *сходится и справедлива оценка*

$$\left\|u^{\mathcal{M}} - u\right\|_W \leqslant C_2 \left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p}\right), \tag{3.2}$$

где C_1, C_2 *— не зависящие от* p *положительные постоянные.*

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения (3.1) задачи (1.1), (1.2) достаточно показать, что для $\forall\delta > 0$, $\exists\mathcal{M}_\delta \in \mathbb{N}$: $\forall\mathcal{M} \geqslant \mathcal{M}_\delta$, $\mathcal{M} = |\mathbb{M}_p|$, $\forall x \in \Omega$ выполняется условие

$$\left|u(x) - u^{\mathcal{M}}\right| < \delta \tag{3.3}$$

при соблюдении граничного условия $\psi_j\Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Справедливость $\psi_j\Big|_{\partial\Omega} = 0$ при $\psi_j(x) = p!\prod\limits_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{j_n}}{j_n!}$ следует из определения 1, свойств БК [3, с. 28] и правил формирования множества мультииндексов $\mathbb{M}_p$.

Следуя [25], определим оценку $\left\|u - u^{\mathcal{M}}\right\|_C = \sup_{x\in\Omega}\left|u(x) - u^{\mathcal{M}}(x)\right|$ в виде

$$\begin{aligned}\left\|u - u^{\mathcal{M}}\right\|_C = \left\|\mathcal{L}^{-1}\left(f - \mathcal{L}u^{\mathcal{M}}\right)\right\|_C \leqslant \left\|\mathcal{L}^{-1}\right\|_C \left\|f - \mathcal{L}u^{\mathcal{M}}\right\|_C \leqslant \delta\left\|f - \mathcal{P}_{\mathcal{M}}f\right\|_C \leqslant \\ \leqslant \delta_0\left(1 + \|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\|_C\right)\inf_{f^{\mathcal{M}}\in W_{\mathcal{M}}}\left|f - f^{\mathcal{M}}\right|,\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ — проекционный оператор, $W_{\mathcal{M}} \subset W$, δ_0 — не зависящая от $\mathcal{M}$ константа, $f^{\mathcal{M}}(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{M}_s} f_j\psi_j(x)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ коэффициентами f_j.

На основании результатов и доказательства леммы 1 для $\mathbb{M}_p \subset \overline{\mathbb{M}}_p \subset \tilde{\mathbb{M}}_p$ установим справедливость неравенства

$$\lim_{p\to\infty}\left|f(x) - f^{\mathcal{M}}(x)\right| < \infty, \tag{3.5}$$

из которого следует, что система базисных функций $\psi_j(x)$ полна, оценка (3.4) ограничена при $p \to \infty$ и неравенство (3.3) выполняется.

Поскольку вложение $L_s\left(\overline{\Omega}\right) \subset \tilde{H}^{-1/2}$ непрерывно при $4/3 < s < 2$ [26, 27], то $\|v\|_{-1/2} \leqslant C\|v\|_s$, где $v \in L_s(\Omega)$. Если $v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, то $\|v\|_s \leqslant \mathrm{mes}^{1/s}\Omega\,\|v\|_C$. Отсюда в соответствии с [28] для u справедливо

$$\|u\|_W \leqslant C_0 \max\left(\|u\|_C, \|\nabla u\|_C\right),$$

где $C_0 := C\sqrt{3}\mathrm{mes}^{1/s}\Omega$.

При определении $m = \{m_1, m_2\}$ — мультииндекс, $D^l_m = \frac{\partial^l}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}$, $l \in [1;2]$, $C_2 := \tilde{C}_0 C_0 \max\limits_{|m|=l,\, l\in[1;2]}\left|D^l_m f\right|$, учитывая (3.4), оценку (2.16) леммы 2 и следуя [29, с. 192], получим

$$\left\|u^{\mathcal{M}} - u\right\|_W \leqslant \tilde{C}_0 \inf_{\gamma\in W_{\mathcal{M}}}\|\gamma - u\|_W \leqslant C_2\left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p}\right). \tag{3.6}$$

Полученные соотношения (3.5), (3.6) подтверждают справедливость (3.1), (3.2). Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть*

$$u^{\overline{\mathcal{M}}}(x) = \sum_{\bar{j}\in\overline{\mathbb{M}}_p} c_{\bar{j}}\psi_{\bar{j}}(x), \tag{3.7}$$

тогда метод Галёркина (1.5) *для задачи* (1.3), (1.4) *сходится и справедлива оценка*

$$\left\| u^{\overline{\mathcal{M}}} - u \right\|_W \leqslant C_3\left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p}\right), \tag{3.8}$$

где C_1, C_3 — не зависящие от p положительные постоянные.

Доказательство. Производится по аналогии с доказательством теоремы 2 при установлении справедливости $\frac{\partial\psi_{\bar{j}}}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ для $\psi_{\bar{j}}(x) = p!\prod\limits_{n=0}^{N-1}\frac{[\zeta_n(x)]^{\bar{j}_n}}{\bar{j}_n!}$, следующей из определения 1 $\left(\frac{\partial\zeta_n}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0\right)$ и правил формирования $\overline{\mathbb{M}}_p$. □

§ 4. Особенности алгоритмической реализации барицентрического метода

Алгоритмическая реализация барицентрического метода в решении задач Дирихле (1.1), (1.2) и Неймана (1.3), (1.4) для уравнения Гельмгольца в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ различается применяемым набором базисных функций, которые формируются относительно соответствующих множеств мультииндексов $\mathbb{M}_p$ и $\overline{\mathbb{M}}_p$.

Правило (2.5) сводит алгоритм порождения исходного множества мультииндексов $\tilde{\mathbb{M}}_p$ (генерация сочетаний с повторениями) к алгоритму порождения композиций неотрицательных целых чисел $\tilde{j} = \left(\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, \ldots, \tilde{j}_n, \ldots, \tilde{j}_{N-1}\right)$ числа $p \in \mathbb{N}$ при определении $j_n = 1_n + 1_n + \ldots + 1_n$ суммой единиц, количество которых равно p (т. е. вводится N типов различных элементов $1_0, 1_1, \ldots, 1_{N-1}$, значение которых равно единице). При интерпретации сочетаний $\binom{N+p-1}{p}$ расстановкой 1 и 0 длины $N+p-1$, в которой p единиц и $N-1$ нулей, каждому сочетанию ставится в соответствие $(N+p-1)$-разрядное число из единиц и нулей. Затем, суммируя в таком числе слева направо единицы между нулями, получаем соответствующие значения элементов $\tilde{j}_n$ композиции. Алгоритмы генерации расстановок широко известны, например, из [30].

Формирование множества мультииндексов $\overline{\mathbb{M}}_p$ выполняется при исходном определении дискретного множества точек $x^{\tilde{j}} \in \tilde{\mathbb{X}}_p$ и их ассоциации $x^{\tilde{j}} = \sum\limits_{n=0}^{N-1}\frac{\tilde{j}_n}{p}P_n$ с соответствующими элементами $\tilde{j}$ множества $\tilde{\mathbb{M}}_p$. Затем производится формирование множества $\overline{\mathbb{X}}_p$ при последовательном добавлении элементов $x^{\tilde{j}}$ из $\tilde{\mathbb{X}}_p$ в том случае, если $x^{\tilde{j}} \notin \overline{\mathbb{X}}_p$. С учетом исходно определенного соответствия элементов множеств $\tilde{\mathbb{X}}_p$ и $\tilde{\mathbb{M}}_p$ относительно заданного множества $\overline{\mathbb{X}}_p$ составляется $\overline{\mathbb{M}}_p$ с элементами $\bar{j}$.

Множество мультииндексов $\mathbb{M}_p$ формируется при исходном добавлении в множество $\mathbb{X}_p$ элементов $x^{\bar{j}}$ из $\overline{\mathbb{X}}_p$, для которых выполняются следующие условия:

$$x^{\bar{j}} \neq P_n,$$

$$\left| e_n \wedge \left(x^{\bar{j}} - P_n\right)\right| > 0$$

$$\text{при } 0 \leqslant 1 - \left|x^{\bar{j}} - P_n\right| |e_n|^{-1} \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant 1 - \left|x^{\bar{j}} - P_{n+1 \mod N}\right| |e_n|^{-1} \leqslant 1,$$

где $n = \overline{0, N-1}$, $\wedge$ — внешнее произведение векторов в $\mathbb{R}^2$. С учетом соответствия элементов множеств $\overline{\mathbb{X}}_p$ и $\overline{\mathbb{M}}_p$ относительно заданного множества $\mathbb{X}_p$ составляется $\mathbb{M}_p$ с элементами j.

Последующая алгоритмическая реализация для задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) одинакова, поэтому дальнейшие особенности решения рассмотрим для задачи Дирихле. С учетом постановки (1.5) ее решение сводится к формированию системы линейных алгебраических уравнений $(j', j \in \mathbb{M}_p)$:

$$\sum_{j' \in \mathbb{M}_p} c_{j'} \left(G^1_{jj'} + G^2_{jj'} \right) = F_j,$$

где

$$F_j = \int_\Omega f(x)\, \psi_j(x)\, dx, \;\; G^1_{jj'} = \int_\Omega \psi_j(x)\, \psi_{j'}(x) dx, \;\; G^2_{jj'} = -\beta^2 \int_\Omega \nabla\psi_j(x)\, \nabla\psi_{j'}(x) dx.$$

Элементы $F_{j'}$, $G^1_{j'j}$, $G^2_{j'j}$ определяются при применении известных процедур численного интегрирования [31], предполагающих разбиение Ω на M треугольных элементов $\mathcal{T}^{\langle m \rangle}$ $\left(m = \overline{0, M-1}\right)$ при построении триангуляции Делоне [32] и задания в $\mathcal{T}^{\langle m \rangle}$ узловых точек интегрирования $x^{mk} = \left(x_1^{mk}, x_2^{mk}, x_3^{mk}\right) \in \mathcal{T}^{\langle m \rangle}$ $\left(k = \overline{0, K-1}\right)$ [33].

Заключение

Таким образом, сформированные постановки решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и полученные апостериорные оценки сходимости барицентрического метода доказательно определяют условия существования и единственности численного решения и устанавливают его предпочтительность. Как было показано в (3.2), (3.8), аппроксимации (3.1), (3.7) барицентрического метода обладают полиномиальной скоростью сходимости, в то время как сходимость сеточных методов является линейной. Следует отдельно отметить, что с учетом известного разделения электромагнитного поля в линиях передачи по классам TH-, TE-, TEM-волн, гибридных волн и зависимостей поперечных составляющих элементов векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей от продольных компонент [3, с. 22, 23] соответствующие векторные базисные функции могут быть сформированы при определении частных производных $\psi_j(x)$ без использования дифференциальных форм Уитни, как это предложено в [14]. Надеемся, что полученные результаты и приведенные особенности алгоритмической реализации барицентрического метода вызовут интерес исследователей и приведут к развитию барицентрического метода как эффективного дополнения сеточных методов в решении краевых задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Н. С., Полянский И. С., Степанов Д. Е. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1 (212). С. 32–40. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23340113
2. Полянский И. С. Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 2 (51). С. 206–222. https://doi.org/10.15622/sp.51.9
3. Полянский И. С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл: Академия ФСО России, 2017.
4. Полянский И. С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 36–42. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35787655
5. Wachspress E. L. A rational finite element basis. New York: Academic Press, 1975.
6. Den Ch., Chang Q., Hormann K. Iterative coordinates // Computer Aided Geometric Design. 2020. Vol. 79. 101861. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101861

7. Floater M. S. Mean value coordinates // Computer Aided Geometric Design. 2003. Vol. 20. Issue 1. P. 19–27. https://doi.org/10.1016/S0167-8396(03)00002-5
8. Li X.-Y., Hu Sh. M. Poisson coordinates // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2013. Vol. 19. Issue 2. P. 344–352. https://doi.org/10.1109/TVCG.2012.109
9. Belyaev A. G., Fayolle P.-A. Transfinite barycentric coordinates // Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics. Boca Raton: CRC Press, 2017. P. 43–62. https://doi.org/10.1201/9781315153452-3
10. Полянский И. С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 1 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78. № 1. С. 30–36. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23640471
11. Полянский И. С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 2 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78. № 1. С. 36–42. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23640472
12. Полянский И. С. Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Труды СПИИРАН. 2016. Вып. 6 (49). С. 32–48. https://doi.org/10.15622/sp.49.2
13. Ильинский А. С., Полянский И. С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 3. С. 391–408. https://doi.org/10.1134/S0044466919030098
14. Nedelec J. C. Mixed finite elements in R^3 // Numerische Mathematik. 1980. Vol. 35. P. 315–341. https://doi.org/10.1007/BF01396415
15. Карчевский М. М., Павлова М. Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. СПб: Лань, 2016.
16. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1950.
17. Ilinsky A. S., Smirnov Yu. G. Electromagnetic wave diffraction by conducting screens. De Gruyter, 1998. https://doi.org/10.1515/9783112314128
18. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988.
19. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1980.
20. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
21. Михлин С. Г. Погрешности вычислительных процессов. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
22. Nicolaides R. A. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1972. Vol. 9. Issue 3. P. 435–445. https://doi.org/10.1137/0709039
23. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962.
24. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. Полиномы Бернштейна и составные кривых Безье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962–1971. http://mi.mathnet.ru/zvmmf378
25. Даугавет И. К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
26. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
27. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред и сходимость метода Рао–Уилтона–Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 105–113. https://doi.org/10.7868/S0044466914010104
28. Смирнов Ю. Г. О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и о решении уравнения электрического поля // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 1. С. 129–139. http://mi.mathnet.ru/zvmmf352

29. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
30. Кормен Т. Х., Лейзер Ч. И., Ривест Р. Л., Штайно К. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.
31. Архипов Н. С., Полянский И. С., Степанов Д. Е. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики // Телекоммуникации. 2014. № 7. С. 15–21.
https://elibrary.ru/item.asp?id=21717197
32. Василевский Ю. В., Данилов А. А., Липников К. Н., Чугунов В. Н. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. М.: Физматлит, 2016.
33. Taylor M. A., Wingate B. A., Bos L. P. Several new quadrature formulas for polynomial integration in the triangle, Report-no: SAND2005-0034J.

Поступила в редакцию 24.06.2020

Ильинский Анатолий Серафимович, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет ВМК.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7883-7324
E-mail: celd@cs.msu.su

Полянский Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302034, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522
E-mail: van341@mail.ru

Степанов Дмитрий Евгеньевич, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302034, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7724-982X
E-mail: stepbystep000@ya.ru

Цитирование: А. С. Ильинский, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в $\mathbb{R}^2$ для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 3–18.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 1. Pp. 3–18.

A. S. Il'inskii, I. S. Polyanskii, D. E. Stepanov

On the convergence of the barycentric method in solving internal Dirichlet and Neumann problems in $\mathbb{R}^2$ for the Helmholtz equation

Keywords: internal Dirichlet and Neumann problems, Helmholtz equation, arbitrary polygon, barycentric method, Galerkin method, barycentric coordinates, convergence estimation.

MSC2020: 35J05, 65N12

DOI: 10.35634/vm210101

The application of the barycentric method for the numerical solution of Dirichlet and Neumann problems for the Helmholtz equation in the bounded simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is considered. The main assumption in the solution is to set the Ω boundary in a piecewise linear representation. A distinctive feature of the barycentric method is the order of formation of a global system of vector basis functions for Ω via barycentric coordinates. The existence and uniqueness of the solution of Dirichlet and Neumann problems for the Helmholtz equation by the barycentric method are established and the convergence rate estimate is determined. The features of the algorithmic implementation of the method are clarified.

REFERENCES

1. Arkhipov N. S., Polyanskij I. S., Stepanov D. E. The barycentric method for the field analysis in a regular waveguide with arbitrary cross-section, *Antenny*, 2015, no. 1 (212), pp. 32–40 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23340113
2. Polyanskii I. S. Vector barycentric method in computational electrodynamics, *SPIIRAS Proceedings*, 2017, issue 2 (51), pp. 206–222 (in Russian). https://doi.org/10.15622/sp.51.9
3. Polyanskii I. S. *Baritsentricheskii metod v vychislitel'noi elektrodinamike* (Barycentric method in computational electrodynamics), Orel: Russian Federation Security Guard Service Federal Academy, 2017.
4. Polyanskii I. S. About application the barycentric method in the numerical solution of internal problem of electrodynamics, *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 36–42 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35787655
5. Wachspress E. L. *A rational finite element basis*, New York: Academic Press, 1975.
6. Den Ch., Chang Q., Hormann K. Iterative coordinates, *Computer Aided Geometric Design*, 2020, vol. 79, 101861. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101861
7. Floater M. S. Mean value coordinates, *Computer Aided Geometric Design*, 2003, vol. 20, issue 1, pp. 19–27. https://doi.org/10.1016/S0167-8396(03)00002-5
8. Li X.-Y., Hu Sh.-M. Poisson coordinates, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2013, vol. 19, issue 2, pp. 344–352. https://doi.org/10.1109/TVCG.2012.109
9. Belyaev A. G., Fayolle P.-A. Transfinite barycentric coordinates, *Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics*, Boca Raton: CRC Press, 2017, pp. 43–62. https://doi.org/10.1201/9781315153452-3
10. Polyanskii I. S. Barycentric coordinates for the multidimensional Poisson approximation of the scalar potential inside an arbitrary region, part 1, *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2015, vol. 78, no. 1, pp. 30–36 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23640471
11. Polyanskii I. S. Barycentric coordinates for the multidimensional Poisson approximation of the scalar potential inside an arbitrary region, part 2, *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2015, vol. 78, no. 1, pp. 36–42 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23640472
12. Polyanskii I. S. Barycentric coordinates of Poisson–Riemann, *SPIIRAS Proceedings*, 2016, issue 6 (49), pp. 32–48 (in Russian). https://doi.org/10.15622/sp.49.2

13. Il'inskii A. S., Polyanskii I. S. An approximate method for determining the harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 366–383. https://doi.org/10.1134/S0965542519030096
14. Nedelec J. C. Mixed finite elements in R^3, *Numerische Mathematik*, 1980, vol. 35, pp. 315–341. https://doi.org/10.1007/BF01396415
15. Karchevskii M. M., Pavlova M. F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Dopolnitel'nye glavy* (Equations of mathematical physics. Additional chapters), Saint–Petersburg: Lan', 2016.
16. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* (Approximate methods of higher analysis), Moscow: Gostekhizdat, 1950.
17. Ilinsky A. S., Smirnov Yu. G. *Electromagnetic wave diffraction by conducting screens*, De Gruyter, 1998. https://doi.org/10.1515/9783112314128
18. Fletcher C. A. J. *Computational Galerkin methods*, Springer, 1984.
19. Romanovskii P. I. *Ryady Fur'e. Teoriya polya. Analiticheskie i spetsial'nye funktsii. Preobrazovanie Laplasa* (Fourier Series. Field theory. Analytical and special functions. Laplace transform), Moscow: Nauka, 1980.
20. Kostrikin A. I., Manin Yu. I. *Lineinaya algebra i geometriya* (Linear algebra and geometry), Moscow: Nauka, 1986.
21. Mikhlin S. G. *Pogreshnosti vychislitel'nykh protsessov* (Errors of computational processes), Tbilisi: Tbilisi University, 1983.
22. Nicolaides R. A. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1972, vol. 9, issue 3, pp. 435–445. https://doi.org/10.1137/0709039
23. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii. Tom 1* (Methods of computation. Vol. 1), Moscow: GIFML, 1962.
24. Grigor'ev M. I., Malozemov V. N., Sergeev A. N. Bernstein polynomials and composite Bézier curves, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 11, pp. 1872–1881. https://doi.org/10.1134/S0965542506110042
25. Daugavet I. K. *Teoriya priblizhennykh metodov. Lineinye uravneniya* (The theory of approximate methods. Linear equations), Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2006.
26. Triebel H. *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators*, Berlin: Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften, 1978.
27. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. Ellipticity of the electric field integral equation for absorbing media and the convergence of the Rao–Wilton–Glisson method, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 114–122. https://doi.org/10.1134/S0965542514010096
28. Smirnov Yu. G. Convergence of the Galerkin methods for equations with elliptic operators on subspaces and solving the electric field equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 126–135. https://doi.org/10.1134/S0965542507010137
29. Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* (Approximate solution of operator equations), Moscow: Nauka, 1969.
30. Cormen T. H., Leiserson Ch. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, 2005.
31. Arkhipov N. S., Polyanskii I. S., Stepanov D. E. Representation of reflecting surfaces of the antenna system in the tasks of analysis and synthesis of reflector antennas by the methods of physical optics, *Telekommunikatsii*, 2014, no. 7, pp. 15–21 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=21717197
32. Vasilevskii Yu. V., Danilov A. A., Lipnikov K. N., Chugunov V. N. *Avtomatizirovannye tekhnologii postroeniya nestrukturirovannykh raschetnykh setok* (Automated technologies for constructing unstructured computational grids), Moscow: Fizmatlit, 2016.
33. Taylor M. A., Wingate B. A., Bos L. P. Several new quadrature formulas for polynomial integration in the triangle, *Report-no: SAND2005-0034J.*

Received 24.06.2020

Il'inskii Anatolii Serafimovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Mathematical Physics, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7883-7324
E-mail: celd@cs.msu.ru

Polyanskii Ivan Sergeevich, Doctor of Physics and Mathematics, Employee, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522
E-mail: van341@mail.ru

Stepanov Dmitrii Evgen'evich, Employee, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7724-982X
E-mail: stepbystep000@ya.ru

Citation: A. S. Il'inskii, I. S. Polyanskii, D. E. Stepanov. On the convergence of the barycentric method in solving internal Dirichlet and Neumann problems in $\mathbb{R}^2$ for the Helmholtz equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 3–18.