ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 429–443.

УДК 517.977

© *В. И. Ухоботов, В. Н. Ушаков*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМЕХОЙ И ВЕКТОГРАММАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ЛИНЕЙНО ОТ ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВ

Рассматривается задача управления с заданным моментом окончания, в которой вектограммы управления и помехи зависят линейно от заданных выпуклых компактов. Задано многозначное отображение фазового пространства задачи управления в линейное нормированное пространство E. Цель построения управления заключается в том, чтобы в момент окончания процесса управления фиксированный вектор пространства E принадлежал образу многозначного отображения при любой допустимой реализации помехи. Стабильный мост определяется в терминах многозначных функций. Приводимая процедура строит по заданной многозначной функции, являющейся стабильным мостом, управление, которое решает поставленную задачу. Получены явные формулы, которые определяют стабильный мост в рассматриваемой задаче управления. Найдены условия, при выполнении которых построенный стабильный мост будет максимальным. К рассмотренной задаче управления с помехой можно свести некоторые задачи группового преследования. В статье приводится такой пример.

Ключевые слова: задача управления, помеха, стабильный мост.

DOI: 10.35634/vm200306

Введение

Задача управления при наличии воздействия со стороны помехи, о которой известна только область ее возможных значений, может быть рассмотрена в рамках теории управления гарантированным результатом [1, 2]. Синтез управления осуществляется опираясь на конструкцию стабильного моста и конструкцию экстремального прицеливания, развитых для дифференциальных игр.

Для линейных дифференциальных игр наряду с двумя прямыми методами Л.С. Понтрягина [3, 4], существуют и другие методы, которые для конкретных классов игр позволяют получить аналитическое решение. Среди них отметим методы предложенные в работах [5, 6]. В работе [7] построен стабильный мост, когда в игре вектограммы линейно зависят от заданных множеств.

Для нелинейных задач управления и дифференциальных игр разработаны некоторые численные методы построения стабильных мостов и экстремальных стратегий [8, 9].

В данной статье гарантирующее управление строится с помощью многозначной функции, удовлетворяющей заданному начальному условию и условию стабильности [10]. Специфика уравнений движения, в которых вектограммы управления и помехи зависят линейно от заданных выпуклых компактов, позволяет для выпуклого граничного условия построить стабильную многозначную функцию в явном виде.

К задачам управления с помехой, в которой вектограммы линейно зависят от выпуклых компактов, сводятся некоторые задачи группового преследования [11–13].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)u_i + \sum_{j=1}^{M} b_j(t)v_j, \quad t \leqslant p, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in U_i, \quad v_j \in V_j. \tag{1}$$

Здесь p фиксированный момент времени; $U_i \subset \mathbb{R}^n$ и $V_j \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты; $a_i(t) \geqslant 0$ и $b_j(t) \geqslant 0$ — скалярные функции, интегрируемые на каждом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$.

Задано линейное нормированное пространство E. При каждом $z \in \mathbb{R}^n$ определено непустое множество $F(z) \subset E$. Задан вектор $\gamma \in E$. Цель выбора управления $u_i \in U_i$, $i = \overline{1, N}$, заключается в осуществлении включения

$$\gamma \in F(z(p)). \tag{2}$$

Помехой являются $v_j \in V_j$, $j = \overline{1, M}$. Управление и помеха реализуются в виде произвольных функций

$$u_i \colon (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to U_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad v_j \colon (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to V_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{3}$$

Пусть $t_0 < p$ — начальный момент времени, а z_0 — положение вектора z в этот момент времени. Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega \colon t_0 < t_1 < \ldots < t_l < t_{l+1} = p, \quad d(\omega) = \max(t_{q+1} - t_q), \quad q = \overline{0, l}.$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_q) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_q}^{t} a_i(r)\, dr\, u_i(t_q, z_\omega(t_q)) + \sum_{j=1}^{M} \int_{t_q}^{t} b_j(r)\, dr\, v_j(t_q, z_\omega(t_q))$$

при $t_q \leqslant t \leqslant t_{q+1}$. Здесь $z_\omega(t_0) = z_0$. Можно показать, что семейство этих ломаных, определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела [14, с. 104] на отрезке $[t_0, p]$ определена функция $z(t)$, которая является равномерным пределом последовательности ломаных при диаметре разбиения $d(\omega) \to 0$. Такую функцию будем называть движением, порожденным управлением и помехой (3).

Определение 1. Многозначная функция $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ является *замкнутой*, если выполнено следующее условие:

$$z_k \in \mathbb{R}^n, \quad k \geqslant 1, \quad \gamma \in \Phi(z_k), \quad z_k \to z \Rightarrow \gamma \in \Phi(z).$$

Определение 2. Многозначная функция $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ является *выпуклой*, если для любых $0 < \lambda < 1$, $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено включение

$$\Phi(\lambda z + (1-\lambda)y) \supset \lambda\Phi(z) + (1-\lambda)\Phi(y).$$

Считаем, что целевая многозначная функция (2) $F \colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ является замкнутой и выпуклой.

§ 2. Оператор программного поглощения и его свойства

Зафиксируем многозначную функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ и два числа $t \leqslant \tau \leqslant p$. Положим

$$(T_t^\tau \Phi)(z) = \bigcap_{\overline{v}(\cdot)} \bigcup_{\overline{u}(\cdot)} \Phi\left(z + \sum_{i=1}^N \int_t^\tau a_i(r)u_i(r)\,dr + \sum_{j=1}^M \int_t^\tau b_j(r)v_j(r)\,dr\right). \tag{4}$$

Здесь пересечение берется по всем измеримым функциям $v_j\colon [t_0, p] \to V_j$, $j = \overline{1, M}$, а объединение вычисляется по всем измеримым функциям $u_i\colon [t_0, p] \to U_i$, $i = \overline{1, N}$. Смысл многозначной функции $(T_t^\tau \Phi)(z)$ заключается в следующем: включение $\gamma \in (T_t^\tau \Phi)(z)$ выполнено тогда и только тогда, когда для любой измеримой помехи $v_j\colon [t_0, p] \to V_j$, $j = \overline{1, M}$, существует измеримое управление $u_i\colon [t_0, p] \to U_i$, $i = \overline{1, N}$, такое, что $\gamma \in \Phi(z(\tau))$. Здесь

$$z(\tau) = z + \sum_{i=1}^N \int_t^\tau a_i(r)u_i(r)\,dr + \sum_{j=1}^M \int_t^\tau b_j(r)v_j(r)\,dr.$$

Отображение $T_t^\tau\colon 2^E \to 2^E$ назовем оператором программного поглощения. Отметим, что аналогичное определение было предложено в работе [15].

Из выпуклости компактов U_i, $i = \overline{1, N}$ следует, что

$$\left\{\int_t^\tau a_i(r)u_i(r)\,dr\colon \text{ измеримая } u_i(r) \in U_i \text{ при } t \leqslant r \leqslant \tau\right\} = \int_t^\tau a_i(r)\,dr\,U_i.$$

Аналогичные равенства выполнены и для помехи. Поэтому формула (4) примет вид

$$(T_t^\tau \Phi)(z) = \bigcap_{\overline{v} \in V} \bigcup_{\overline{u} \in U} \Phi\left(z + \sum_{i=1}^N \int_t^\tau a_i(r)\,dr\,u_i + \sum_{j=1}^M \int_t^\tau b_j(r)\,dr\,v_j\right). \tag{5}$$

Здесь обозначено $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N$, $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_N$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$.

Множество наборов $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $a_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, N}$ обозначим $\mathbb{R}_+^N$, а через $\mathbb{R}_+^M$ обозначим множество наборов $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_M)$, $b_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, M}$. Зафиксируем наборы $\overline{a} \in \mathbb{R}_+^N$ и $\overline{b} \in \mathbb{R}_+^M$ и рассмотрим отображение $L_{\overline{a},\overline{b}}$, которое каждую многозначную функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ переводит в многозначную функцию

$$(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi)(z) = \bigcap_{\overline{v} \in V} \bigcup_{\overline{u} \in U} \Phi\left(z + \sum_{i=1}^N a_i u_i + \sum_{j=1}^M b_j v_j\right). \tag{6}$$

Отметим следующие свойства отображения $L_{\overline{a},\overline{b}}$.

Свойство 1. $(L_{\overline{0},\overline{0}}\Phi)(z) = \Phi(z)$.

Свойство 2. *Если* $\Phi_1(z) \supset \Phi_2(z)$ *при любом* $z \in \mathbb{R}^n$, *то* $(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi_1)(z) \supset (L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi_2)(z)$ *при любом* $z \in \mathbb{R}^n$.

Свойство 3. *Для любой многозначной функции* $\Phi\colon \mathbb{R} \to 2^E$ *и для любых наборов* $\overline{a} \in \mathbb{R}_+^N$, $\overline{a}^* \in \mathbb{R}_+^N$, $\overline{b} \in \mathbb{R}_+^M$, $\overline{b}^* \in \mathbb{R}_+^M$ *выполнено включение*

$$\Big(L_{\overline{a},\overline{b}}\big(L_{\overline{a}^*,\overline{b}^*}\Phi\big)\Big)(z) \subset \Big(L_{\overline{a}+\overline{a}^*,\overline{b}+\overline{b}^*}\Phi\Big)(z)$$

при любом $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство свойства 3. Пусть вектор $f \in E$ принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого включения. Зафиксируем $\overline{v} \in V$. Согласно формуле (6) найдется $\overline{u}^0 \in U$ такое, что

$$f \in (L_{\overline{a}^*,\overline{b}^*}\Phi)\left(z + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^0 + \sum_{j=1}^{M} b_j v_j\right).$$

Отсюда и из (6) следует, что существует $\overline{u}^* \in U$, при котором

$$f \in \Phi\left(z + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^0 + \sum_{i=1}^{N} a_i^* u_i^* + \sum_{j=1}^{M} b_j v_j + \sum_{j=1}^{M} b_j^* v_j\right).$$

Из выпуклости множеств $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,N}$, следует, что $a_i u_i^0 + a_i^* u_i^* = (a_i + a_i^*) u_i$ при некотором $u_i \in U_i$, $i = \overline{1,N}$. Отсюда получим включение

$$f \in \Phi\left(z + \sum_{i=1}^{N} (a_i + a_i^*) u_i + \sum_{j=1}^{M} (b_j + b_j^*) v_j\right).$$

Это включение выполнено при любом $\overline{v} \in V$. Следовательно, $f \in \left(L_{\overline{a}+\overline{a}^*,\overline{b}+\overline{b}^*}\Phi\right)(z)$. □

Свойство 4. *Пусть $\overline{a} \in \mathbb{R}_+^N$, $\overline{a}^* \in \mathbb{R}_+^N$, $\overline{b} \in \mathbb{R}_+^M$ и $\overline{b}^* \in \mathbb{R}_+^M$. Тогда для любой многозначной функции $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ выполнены равенства*

$$\left(L_{\overline{0},\overline{b}^*}\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi\right)\right)(z) = \left(L_{\overline{a},\overline{b}^*+\overline{b}}\Phi\right)(z), \tag{7}$$

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\left(L_{\overline{a}^*,\overline{0}}\Phi\right)\right)(z) = \left(L_{\overline{a}+\overline{a}^*,\overline{b}}\Phi\right)(z). \tag{8}$$

Доказательство свойства 4. Обозначим

$$\Phi_0(y) = \bigcup_{\overline{u} \in U} \Phi\left(y + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i\right), \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Тогда из формулы (6) получим, что

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}^*+\overline{b}}\Phi\right)(z) = \bigcap_{\overline{v} \in V} \Phi_0\left(z + \sum_{j=1}^{M} (b_j^* + b_j) v_j\right).$$

Из выпуклости множеств $V_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,M}$, следует, что $b_j^* v_j^* + b_j v_j \in (b_j^* + b_j) V_j$, $j = \overline{1,M}$, для любых $v_j^* \in V_j$ и $v_j \in V_j$. Поэтому

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}^*+\overline{b}}\Phi\right)(z) = \bigcap_{\overline{v}^* \in V} \bigcap_{\overline{v} \in V} \Phi_0\left(z + \sum_{j=1}^{M} b_j v_j + \sum_{j=1}^{M} b_j^* v_j^*\right).$$

Отсюда и из (9) получим, что

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}^*+\overline{b}}\Phi\right)(z) = \bigcap_{\overline{v}^* \in V} \left(\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi\right)\left(z + \sum_{j=1}^{M} b_j^* v_j^*\right)\right) = \left(L_{\overline{0},\overline{b}^*}\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi\right)\right)(z).$$

Таким образом, правая часть доказываемого равенства (7) содержится в левой. Обратное включение следует из свойства 3.

Равенство (8) доказывается аналогичным образом. □

Свойство 5. *Пусть многозначная функция* $\Phi\colon \mathbb{R} \to 2^E$ *является замкнутой. Тогда, если* $z_k \in \mathbb{R}^n$, $\overline{a}^{(k)} \in \mathbb{R}^N_+$, $\overline{b}^{(k)} \in \mathbb{R}^M_+$, $\gamma \in \left(L_{\overline{a}^{(k)},\overline{b}^{(k)}}\Phi\right)(z_k)$ *при* $k \geqslant 1$ *и* $\overline{a}^{(k)} \to \overline{a}$, $\overline{b}^{(k)} \to \overline{b}$, $z_k \to z$, *то* $\gamma \in \left(L_{\overline{a},\overline{b}}\Phi\right)(z)$.

Доказательство следует из того, что множества U_i, $i = \overline{1,N}$, являются компактами.

Свойство 6. *Если многозначная функция* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ *является выпуклой, то выпуклой является многозначная функция* $\left(L_{\overline{a},\overline{0}}\Phi\right)\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$.

Доказательство свойства 6. Пусть $w = \lambda w_* + (1-\lambda)w^*$, где $0 < \lambda < 1$, $w_* \in \left(L_{\overline{a},\overline{0}}\Phi\right)(z)$, $w^* \in \left(L_{\overline{a},\overline{0}}\Phi\right)(y)$, $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Отсюда и из формулы (6) следует, что

$$w_* \in \Phi\left(z + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^0\right), \quad w_* \in \Phi\left(y + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^*\right)$$

при некоторых $u_i^0 \in U_i$, $u_i^* \in U_i$, $i = \overline{1,N}$. Отсюда и из определения 2 получим, что

$$\lambda w_* + (1-\lambda)w^* \in \Phi\left(\lambda z + (1-\lambda)y + \sum_{i=1}^{N} a_i u_i\right),$$

где $u_i = \lambda u_i^0 + (1-\lambda)u_i^* \in U_i$, $i = \overline{1,N}$. Следовательно, функция $\left(L_{\overline{a},\overline{0}}\Phi\right)\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ является выпуклой. □

Теорема 1. *Пусть многозначная функция* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ *является выпуклой. Тогда для любых* $\overline{a} \in \mathbb{R}^N_+$, $\overline{b} \in \mathbb{R}^M_+$ *и числа* $\theta > 0$ *выполнено равенство*

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\left(L_{\theta\overline{a},\theta\overline{b}}\Phi\right)\right)(z) = \left(L_{(1+\theta)\overline{a},(1+\theta)\overline{b}}\Phi\right)(z). \tag{10}$$

Доказательство. При $\tau \geqslant 0$ положим

$$\left(T_\tau\Phi\right)(z) = \bigcap_{\overline{v}\in V}\bigcup_{\overline{u}\in U}\Phi\left(z + \tau\left(\sum_{i=1}^{N} a_i u_i + \sum_{j=1}^{M} b_j v_j\right)\right). \tag{11}$$

В работе [16, теорема 1] доказано, что для любой выпуклой многозначной функции $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ выполнено включение

$$(T_t(T_\tau\Phi))(z) \supset (T_{t+\tau}\Phi)(z), \quad \forall t,\tau \geqslant 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Из этого включения и из формулы (11) получим, что множество, стоящее в правой части (10), содержится в левой части (10). Обратное включение следует из свойства 3. □

Теорема 2. *Пусть числа* $a_i \geqslant 0$, $a_i^* > 0$, $i = \overline{1,N}$, *и* $b_j \geqslant 0$, $b_j^* > 0$, $j = \overline{1,M}$, *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\frac{a_i}{a_i^*} \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant M}\frac{b_j}{b_j^*}. \tag{12}$$

Тогда для любой выпуклой многозначной функции $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ *выполнено равенство*

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\left(L_{\overline{a}^*,\overline{b}^*}\Phi\right)\right)(z) = \left(L_{\overline{a}+\overline{a}^*,\overline{b}+\overline{b}^*}\Phi\right)(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (12) следует, что существует число $\lambda \in (0,1)$ такое, что
$$\frac{a_i}{a_i^*} \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda} \leqslant \frac{b_j}{b_j^*} \ \text{ для всех } i = \overline{1,N} \text{ и } j = \overline{1,M}.$$
Отсюда получим, что $(1-\lambda)a_i = \lambda a_i^0$, $a_i^0 \leqslant a_i^*$, $i = \overline{1,N}$; $\lambda b_j^* = (1-\lambda)b_j^0$, $b_j^0 \leqslant b_j$, $j = \overline{1,M}$. Следовательно, $a_i^0 = \theta a_i$, $i = \overline{1,N}$, $b_j^* = \theta b_j^0$, $j = \overline{1,M}$. Здесь обозначено $\theta = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} > 0$. Отсюда, используя равенство (8), получим, что

$$\left(L_{\overline{a}^*,\overline{b}^*}\Phi\right)(z) = \left(L_{\theta\overline{a},\theta\overline{b}^0}\Phi_0\right)(z), \quad \Phi_0(z) = \left(L_{\overline{a}^*-\overline{a}^0,\overline{0}}\Phi\right)(z).$$

Из свойства 6 следует, что многозначная функция $\Phi_0\colon \mathbb{R} \to 2^E$ является выпуклой.

Из свойства 4 следует, что

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}}\big(L_{\overline{a}^*,\overline{b}^*}\Phi\big)\right)(z) = \left(L_{\overline{0},\overline{b}-\overline{b}^0}\left(L_{\overline{a},\overline{b}^0}\big(L_{\theta\overline{a},\theta\overline{b}^0}\Phi_0\big)\right)\right)(z). \tag{14}$$

Поскольку многозначная функция $\Phi_0\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ является выпуклой, то, применяя теорему 1, получим, что

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}^0}\big(L_{\theta\overline{a},\theta\overline{b}^0}\Phi_0\big)\right)(z) = \left(L_{(1+\theta)\overline{a},(1+\theta)\overline{b}^0}\Phi_0\right)(z).$$

Отсюда и из равенств $(1+\theta)a_i + a_i^* - a_i^0 = a_i + a_i^*$ и $(1+\theta)b_j^0 = b_j^0 + b_j^*$ следует, что

$$\left(L_{\overline{a},\overline{b}^0}\big(L_{\theta\overline{a},\theta\overline{b}^0}\Phi_0\big)\right)(z) = \left(L_{\overline{a}+\overline{a}^*,\overline{b}^0+\overline{b}^*}\Phi\right)(z).$$

Здесь использован вид многозначной функции $\Phi_0\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ и равенство (8). Подставим предыдущее равенство в формулу (14) и учтем формулу (7). Получим требуемое равенство (13). □

§ 3. Построение управления с помощью стабильного моста

Зафиксируем момент времени $t_0 < p$.

Определение 3. Назовем многозначную функцию $W\colon [t_0,p]\times\mathbb{R}^n \to 2^E$ *стабильным мостом для задачи* (1), (2), если выполнены следующие условия:

$$\text{если } \gamma \in W(p,z), \text{ то } \gamma \in F(z) \text{ при } z \in \mathbb{R}^n; \tag{15}$$

$$\text{если } z_k \to z, \quad t_k \leqslant t, \quad t_k \to t, \quad \gamma \in W(t_k,z_k) \text{ при } k \geqslant 1, \text{ то } \gamma \in W(t,z); \tag{16}$$

при каждых $t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant p$, $z \in \mathbb{R}^n$ выполнено включение

$$W(t,z) \subset \left(T_t^\tau W_\tau\right)(z), \text{ где } W_\tau(z) = W(\tau,z). \tag{17}$$

Синтез управлений проведем по схеме, предложенной в работе [10]. Однако специфический вид вектограмм в задаче (1) требует некоторой модификации этого метода.

Для любого множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$W(t,Z) = \bigcup_z W(t,z), \quad z \in Z.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\to\min,\quad \varepsilon_i\geqslant 0,\quad \gamma\in W\left(t,z+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(-U_i+u_i)\right),\quad u_i\in U_i,\quad i=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Если включение в (18) выполнено при некоторых $\varepsilon_i\geqslant 0$, $u_i\in U_i$, $i=\overline{1,N}$, то обозначим через $\varepsilon(t,z)$ нижнюю грань значений целевой функции в задаче (18). Если же включение (18) не выполняется при любых $\varepsilon_i\geqslant 0$, $u_i\in U_i$, $i=\overline{1,N}$, то полагаем $\varepsilon(t,z)=+\infty$. Если $\varepsilon(t,z)<+\infty$, то, учитывая, что множества $U_i\subset\mathbb{R}^n$ являются компактами, из условия (16) получим, что существуют числа $\varepsilon_i(t,z)\geqslant 0$ и векторы $u_i^0(t,z)\in U_i$, $i=\overline{1,N}$, такие, что

$$\varepsilon(t,z)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(t,z),\quad \gamma\in W\left(t,z+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(t,z)(-U_i+u_i^0(t,z))\right). \tag{19}$$

В качестве управления возьмем $u_i^0(t,z)$. Пусть реализовалась произвольная помеха $v_j(t,z)\in V_j$, $j=\overline{1,M}$. Для разбиения ω построим ломаную $z_\omega(t)$. Обозначим $z_\omega(t_q)=z_q$, $\varepsilon_i(t_q,z_\omega(t_q))=\varepsilon_{iq}$, $u_i^0(t_q,z_q)=u_{iq}^0$, $v_j(t_q,z_q)=v_{jq}$, $q=\overline{0,l}$. Тогда

$$z_{q+1}=z_q+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_q}^{t_{q+1}}a_i(r)\,dr\,u_{iq}^0+\sum_{j=1}^{M}\int_{t_q}^{t_{q+1}}b_j(r)\,dr\,v_{jq}. \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть начальное состояние таково, что* $\varepsilon(t_0,z(t_0))<+\infty$. *Тогда управление* $u_i^0(t,z)$, $i=\overline{1,N}$, *обеспечивает для ломаной* (20) *выполнение включения*

$$\gamma\in W\left(t_q,z_q+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{iq}(-U_i+u_{iq}^0)\right),\quad q=\overline{0,l}. \tag{21}$$

Причем

$$\varepsilon(t_{q+1},z_{q+1})\leqslant\max\left(\varepsilon(t_q,z_q);\sum_{i=1}^{N}\int_{t_q}^{t_{q+1}}a_i(r)\,dr\right),\quad q=\overline{0,l}. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (19), включение (21) выполнено при $q=0$. Пусть оно выполнено при $0<q<l$. Тогда

$$\gamma\in W\left(t_q,z_q+\int_{i=1}^{N}\varepsilon_{iq}(-u_i^*+u_{iq}^0)\right)\ \text{при некоторых } u_i^*\in U_i.$$

Из этого включения, используя условие стабильности (17) и формулу (5), получим, что существуют $\widehat{u}_i\in U_i$, $i=\overline{1,N}$ такие, что

$$\gamma\in W\left(t_{q+1},z_q+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{iq}(-u_i^*+u_{iq}^0)+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_q}^{t_{q+1}}a_i(r)\,dr\,\widehat{u}_i+\sum_{j=1}^{M}\int_{t_q}^{t_{q+1}}b_j(r)\,dr\,v_{jq}\right).$$

Учитывая формулу (20), перепишем это включение в следующем виде:

$$\gamma\in W\left(t_{q+1},z_{q+1}+\sum_{i=1}^{N}\Bigl(\varepsilon_{iq}-\int_{t_q}^{t_{q+1}}a_i(r)\,dr\Bigr)u_{iq}^0-\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{iq}u_i^*+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_q}^{t_{q+1}}a_i(r)\,dr\,\widehat{u}_i\right). \tag{23}$$

Обозначим

$$m_{iq} = \max\left(\varepsilon_{iq}; \int_{t_q}^{t_{q+1}} a_i(r)\,dr\right). \tag{24}$$

Покажем, что

$$\left(\varepsilon_{iq} - \int_{t_q}^{t_{q+1}} a_i(r)\,dr\right) u_{iq}^0 - \varepsilon_{iq} u_i^* + \int_{t_q}^{t_{q+1}} a_i(r)\,dr\,\widehat{u}_i = m_{iq}(-u_i^+ + u_i) \tag{25}$$

при некоторых $u_i^+ \in U_i$ и $u_i \in U_i$. Тогда из формул (18) и (23) получим, что

$$\varepsilon(t_{q+1}, z_{q+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{N} m_{iq}.$$

Отсюда и из формул (24) следует требуемое неравенство (22).

Пусть $m_{iq} = \varepsilon_{iq}$. Тогда равенство (25) выполнено при

$$u_i^+ = u_i^*, \quad u_i = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{iq}} \int_{t_q}^{t_{q+1}} a_i(r)\,dr\right) u_{iq}^0 + \frac{1}{\varepsilon_{iq}} \int_{t_q}^{t_{q+1}} a_i(r)\,dr\widehat{u}_i.$$

Пусть $m_{iq} > \varepsilon_{iq}$. Тогда (25) выполнено при

$$u_i^* = (1 - \frac{\varepsilon_{iq}}{m_{iq}})u_{iq}^0 + \frac{\varepsilon_{iq}}{m_{iq}} u_i^*, \quad u_i = \widehat{u}_i.$$

□

Следствие 1. *Пусть начальное состояние $z(t_0)$ таково, что выполняется включение $\gamma \in W(t_0, z(t_0))$. Тогда для любого движения $z(t)$, реализовавшегося при управлении $u_i^0(t,z)$, $i = \overline{1,N}$, и при любой помехе $v_j(t,z) \in V_j$, $j = \overline{1,M}$, выполнено включение $\gamma \in W(t_*, z(t_*))$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant p$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметры разбиения $d(\omega_k) \to 0$, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$ к движению $z(t)$. Зафиксируем момент времени $t_0 < t_* \leqslant p$. Тогда для каждого разбиения ω_k выполнено $t_{q_k} < t_* \leqslant t_{q_k+1}$ при некотором $q_k = \overline{0, l_k}$. Поскольку $d(\omega_k) \to 0$, то $t_{q_k} \to t_*$. Поэтому из равномерной сходимости ломаных $z_{\omega_k}(t)$ к $z(t)$ следует, что $z_{\omega_k}(t_{q_k}) \to z(t_*)$.

Рассмотрим неравенство (22). Поскольку $\varepsilon(t_0, z(t_0)) = 0$, то из него получим, что

$$\varepsilon(t_{q_k}, z_{\omega_k}(t_{q_k})) \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant l_k} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{s-1}}^{t_s} a_i(r)\,dr\right).$$

Из этого неравенства, применяя теорему об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [14, с. 282], получим, что $\varepsilon(t_{q_k}, z_{\omega_k}(t_{q_k})) \to 0$ при $d(\omega_k) \to 0$. Отсюда, используя включение (21) и свойство (16) стабильного моста, получим требуемое включение. □

Отметим, что из доказанного следствия 1 и из условия (15) следует включение $\gamma \in F(z(p))$.

§ 4. Построение стабильного моста

Лемма 1. *Для любой многозначной функции* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to 2^E$ *и для любых чисел* $\beta_j \geqslant \alpha_j \geqslant \geqslant \varepsilon_j \geqslant 0$, $\beta_j - \varepsilon_j \geqslant \delta_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, M}$, *выполнено включение*

$$\bigcap_{\overline{v}\in V} \Phi\left(z - \sum_{j=1}^{M}(\alpha_j - \varepsilon_j)V_j + \sum_{j=1}^{M}\delta_j v_j\right) \supset \supset \bigcup_{\overline{v}\in V}\bigcap_{\overline{v}^*\in V} \Phi\left(z + \sum_{j=1}^{M}(\beta_j - \alpha_j)v_j^* - \sum_{j=1}^{M}(\beta_j - \varepsilon_j - \delta_j)v_j\right). \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $f \in E$ принадлежит множеству, стоящему в правой части (25). Тогда существуют $v_j^1 \in V_j$, $j = \overline{1, M}$, такие, что

$$f \in \Phi\left(z + \sum_{j=1}^{M}(\beta_j - \alpha_j)v_j^* - \sum_{j=1}^{M}(\beta_j - \varepsilon_j - \delta_j)v_j^1\right) \tag{27}$$

для любых $v_j^* \in V_j$, $j = \overline{1, M}$. Возьмем любой набор $v_j^2 \in V_j$, $j = \overline{1, M}$. Существуют наборы $v_j^3 \in V_j$ и $v_j^4 \in V_j$, $j = \overline{1, M}$, такие, что

$$-(\alpha_j - \varepsilon_j)v_j^3 + \delta_j v_j^2 = (b_j - \alpha_j)v_j^4 - (\beta_j - \varepsilon_j - \delta_j)v_j^1. \tag{28}$$

В самом деле, если $\beta_j = \varepsilon_j$, то из условия леммы следует равенство $\delta_j = 0$. Возьмем $v_j^3 = v_j^4 = v_j$, где v_j — любой из V_j.

Если $\beta_j > \varepsilon_j$, то возьмем

$$v_j^3 = v_j^4 = \frac{1}{\beta_j - \varepsilon_j}(\delta_j v_j^2 + (\beta_j - \varepsilon_j - \delta_j)v_j^2) \in V_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Возьмем в (27) $v_j^* = v_j^4$, $j = \overline{1, M}$. Тогда, учитывая равенство (28), получим включение

$$f \in \Phi\left(z - \sum_{j=1}^{M}(\alpha_j - \varepsilon_j)V_j + \delta_j v_j^2\right), \quad \forall v_j^2 \in V_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Следовательно, точка f принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого равенства (26). □

Теорема 4. *Пусть каждая из функций* $y_j\colon [t_0, p] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, M}$, *является решением задачи Коши*

$$\dot{y}_j(t) = -\max(b_j(t); y_j(t)A(t)), \quad y_j(p) = 0. \tag{29}$$

Здесь обозначено

$$A(t) = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \frac{a_i(t)}{\displaystyle\int_t^p a_i(r)\,dr}. \tag{30}$$

Тогда многозначная функция

$$W(t, z) = \bigcup_{\overline{v}\in V}\bigcap_{\overline{v}^*\in V}\left(z + \sum_{i=1}^{N}\int_t^p a_i(r)\,dr\,U_i + \sum_{j=1}^{M} y_j(t)v_j^* - \sum_{j=1}^{M}\left(y_j(t) - \int_t^p b_j(r)\,dr\right)v_j\right) \tag{31}$$

является стабильным мостом в задаче (1), (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многозначная функция (31) удовлетворяет равенству

$$W(p, z) = F(z).$$

Из свойства 5 отображения $L_{\overline{a},\overline{a}}$ следует условие замкнутости (16). Докажем включение (17).

Из (29) и (30) следует, что

$$\dot{y}_j(t) \leqslant -y_j(t) \frac{a_i(t)}{\displaystyle\int_t^p a_i(r)\,dr} \text{ при } t < p, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Отсюда следует, что производная функции

$$x(t) = \frac{y_j(t)}{\displaystyle\int_t^p a_i(r)\,dr}$$

меньше или равна нулю. Тогда из неравенства $x(t) \geqslant x(\tau)$ при $t \leqslant \tau < p$ получим, что

$$y_j(t) \int_\tau^p a_i(r)\,dr \geqslant y_j(\tau) \int_t^p a_i(r)\,dr.$$

Отсюда следует, что при $t \leqslant \tau < p$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, выполнено неравенство

$$(y_j(t) - y_j(\tau)) \int_\tau^p a_i(r)\,dr \geqslant y_j(\tau) \int_t^\tau a_i(r)\,dr.$$

Стало быть,

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant M} \frac{y_j(t) - y_j(\tau)}{y_j(\tau)} \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \frac{\displaystyle\int_t^\tau a_i(r)\,dr}{\displaystyle\int_\tau^p a_i(r)\,dr}. \tag{32}$$

Из (29) получим, что

$$y_j(t) - y_j(\tau) \geqslant \int_t^\tau b_j(r)\,dr \text{ при } t \leqslant \tau < p, \quad j = \overline{1, M}. \tag{33}$$

Обозначим $\beta_j = y_j(t)$, $\alpha_j = y_j(\tau)$,

$$\varepsilon_j = \int_\tau^p b_j(r)\,dr, \quad \delta_j = \int_t^\tau b_j(r)\,dr, \quad j = \overline{1, M}.$$

Тогда из неравенств (33) следует, что эти числа удовлетворяют неравенствам, содержащимся в формулировке леммы 1.

Из формул (5) и (31) следует, что множество $(T_t^\tau(W_\tau))(z)$ равно множеству, стоящему в левой части включения (26) при

$$\Phi(z) = \bigcup_{\overline{u} \in U} \bigcap_{\overline{v}^0 \in V} F\left(z + \sum_{i=1}^N \int_t^\tau a_i(r)\,dr\, u_i + \sum_{i=1}^N \int_\tau^p a_i(r)\,dr\, U_i + \sum_{j=1}^M y_j(\tau) v_j^0\right). \tag{34}$$

Согласно лемме 1

$$(T_t^\tau W_\tau)(z) \supset \bigcap_{\overline{v}^*\in V} \Phi\left(z+\sum_{j=1}^{M}(y_j(t)-y_j(\tau))v_j^* - \sum_{j=1}^{M}\left(y_j(t)-\int_t^p b_j(r)\,dr\right)v_j\right) \tag{35}$$

при любых $v_j \in V_j$, $j=\overline{1,M}$. Зафиксируем $v_j \in V_j$, $j=\overline{1,M}$.

Обозначим

$$F_0(z) = F\left(z-\sum_{j=1}^{M}\left(y_j(t)-\int_t^p b_j(r)\,dr\right)v_j\right). \tag{36}$$

Тогда из (34) и (35) получим, что

$$(T_t^\tau W_\tau)(z) \supset \bigcap_{\overline{v}^*\in V}\bigcup_{\overline{u}\in U} F_0\Bigg(z+\sum_{i=1}^{N}\int_\tau^p a_i(r)\,dr\,U_i+\sum_{j=1}^{M}y_j(\tau)v_j^0 + \\ +\sum_{i=1}^{N}\int_t^\tau a_i(r)\,dr\,u_i+\sum_{j=1}^{M}(y_j(t)-y_j(\tau))v_j^*\Bigg).$$

Многозначная функция $F_0(z)$ является выпуклой. Поэтому, используя неравенства (32) и теорему 2, получим включение

$$(T_t^\tau W_\tau)(z) \supset \bigcap_{\overline{v}^*\in V}\bigcup_{\overline{u}\in U} F_0\left(z+\sum_{i=1}^{N}\int_t^p a_i(r)\,dr\,u_i+\sum_{j=1}^{M}y_j(t)v_j^*\right).$$

Подставим сюда функцию (36) и учтем, что в ней $v_j \in V_j$, $j=\overline{1,M}$, любые. Тогда, учитывая (31), получим требуемое включение (17). □

Следствие 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\frac{a_i(t)}{\displaystyle\int_t^p a_i(r)\,dr} \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant M}\frac{b_j(t)}{\displaystyle\int_t^p b_j(r)\,dr}, \qquad t<p. \tag{37}$$

Тогда стабильным мостом является

$$W(t,z) = (T_t^p F)(z), \quad t\leqslant p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (37) следует, что функция $y_j(t)=\displaystyle\int_t^p b_j(r)\,dr$, $j=\overline{1,M}$, является решением задачи Коши (29). Подставим эти функции в формулу (31). Получим требуемое равенство. □

§ 5. Пример

Точка $x\in\mathbb{R}^s$ преследует группу точек $x_j\in\mathbb{R}^s$, $j=\overline{1,M}$. Их уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}=a(t)\xi, \quad \dot{x}_j=b_j(t)\eta_j, \quad \|\xi\|\leqslant 1, \quad \|\eta_j\|\leqslant 1, \quad j=\overline{1,M}.$$

Здесь функции $a(t)\geqslant b_j(t)\geqslant 0$, $j=\overline{1,M}$ являются интегрируемыми на каждом отрезке оси $\mathbb{R}$; ξ и η_j — управления, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^s$.

Цель преследователя заключается в том, чтобы в заданный момент времени $p>0$ осуществить неравенство
$$\max_{1\leqslant j\leqslant M}\|x_j(p)-x(p)\|\leqslant\gamma.$$
Здесь $\gamma>0$ — заданное число.

Обозначим $z_j=x_j-x$, $j=\overline{1,M}$ и $z=(z_1,\ldots,z_M)\in\mathbb{R}^{sM}$,
$$U=\{u=(-\xi,\ldots,-\xi)\colon\|\xi\|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^{sM},$$
$$V_j=\{v_j=(0,\ldots,0,\eta_j,0,\ldots,0)\colon\|\eta_j\|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^{sM}.$$
Тогда уравнения движения и условие окончания примут вид:
$$\begin{gathered}\dot z=a(t)u+\sum_{j=1}^{M}b_j(t)v_j,\quad u\in U, v_j\in V_j,\quad j=\overline{1,M};\\ \gamma\in F(z(p)),\quad F(z)=[f(z),+\infty),\quad f(z)=\max_{1\leqslant j\leqslant M}\|z_j\|.\end{gathered}\tag{38}$$

Из непрерывности и выпуклости скалярной функции $f\colon\mathbb{R}^{sM}\to\mathbb{R}$ следует, что многозначная функция $F\colon\mathbb{R}^{sM}\to 2^{\mathbb{R}}$ является замкнутой и выпуклой.

Из неравенства $a(t)\geqslant b_j(t)$, $j=\overline{1,M}$, следует, что решением задачи Коши (29) является функция
$$y_j(t)=\int_t^p a(r)\,dr,\quad t\leqslant p.$$

Из (31) и (38) получим, что стабильным мостом является $W(t,z)=[g(t,z),+\infty)$, где
$$g(t,z)=$$
$$=\min_{\overline{v}}\max_{\overline{v}^*}\min_{\xi}\max_{1\leqslant j\leqslant M}\left\|z_j-\int_t^p a(r)\,dr\,\xi+\sum_{j=1}^{M}\int_t^p a(r)\,dr\,v_j^*-\sum_{j=1}^{M}\int_t^p(a(r)-b_j(r))\,dr\,v_j\right\|.$$
Здесь $\overline{v}=(v_1,\ldots,v_M)$, $\overline{v}^*=(v_1^*,\ldots,v_M^*)$, $v_j\in\mathbb{R}^s$, $v_j^*\in\mathbb{R}^s$, $\|v_j\|\leqslant 1$, $\|v_j^*\|\leqslant 1$, $\xi\in\mathbb{R}^s$, $\|\xi\|\leqslant 1$.

Если начальное состояние удовлетворяет неравенству $g(t_0,z(t_0))\leqslant\gamma$, то преследователь может осуществить условие поимки
$$\max_{1\leqslant j\leqslant M}\|z_j(p)\|\leqslant\gamma$$
при любом допустимом поведении группы точек x_j, $j=\overline{1,M}$.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта 19–11–00105.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280. http://mi.mathnet.ru/dan33165
4. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766. http://mi.mathnet.ru/dan33242

5. Сатимов Н. Ю. Об одном методе преследования в линейных дифференциальных играх // Докл. АН УзССР. 1981. № 6. С. 5–7.
6. Чикрий А. А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Труды МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92. http://mi.mathnet.ru/tm3235
7. Ухоботов В. И. Стабильный мост в игре с вектограммами, зависящими линейно от заданных множеств // Изв. вузов. Матем. 1988. № 2. С. 63–65. http://mi.mathnet.ru/ivm7899
8. Матвийчук А. Р., Ухоботов В. И., Ушаков А. В., Ушаков В. Н. Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 165–187.
9. Ушаков В. Н., Ухоботов В. И., Липин А. Е. Об одном дополнении к определению стабильного моста и аппроксимирующей системы множеств в дифференциальных играх // Труды МИАН. 2019. Т. 304. С. 285–297. https://doi.org/10.4213/tm3976
10. Ухоботов В. И. Синтез гарантированного управления на основе аппроксимационной схемы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 239–246. http://mi.mathnet.ru/timm505
11. Kumkov S. S., Le Menec S., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
12. Izmest'ev I. V., Ukhobotov V. I. Game problem of convergence of a group of objects with different types of dynamics, and target // 2018 International Conference «Global Smart Industry Conference» (GloSIC). IEEE, 2018. https://doi.org/10.1109/GloSIC.2018.8570102
13. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
15. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
16. Ухоботов В. И. Стабильное свойство оператора программного поглощения в играх с простым движением и с выпуклой целью в пространствах с неполной линейной структурой // Вестник Челябинского университета. Серия «Математика, механика, информатика». 2003. Вып. 8. С. 181–189. http://mi.mathnet.ru/vchgu133

Поступила в редакцию 24.07.2020

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.;
заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: ukh@csu.ru

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, профессор, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Цитирование: В. И. Ухоботов, В. Н. Ушаков. Об одной задаче управления с помехой и вектограммами, зависящими линейно от заданных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 429–443.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 3. Pp. 429–443.

V. I. Ukhobotov, V. N. Ushakov

On one control problem with disturbance and vectograms depending linearly on given sets

Keywords: control problem, disturbance, stable bridge.

MSC2010: 49N70, 49N75, 91A23, 91A24

DOI: 10.35634/vm200306

A control problem with a given end time is considered, in which the control vectograms and disturbance depend linearly on the given convex compact sets. A multivalued mapping of the phase space of the control problem to the linear normed space E is given. The goal of constructing a control is that at the end of the control process the fixed vector of the space E belongs to the image of the multivalued mapping for any admissible realization of the disturbance. A stable bridge is defined in terms of multivalued functions. The presented procedure constructs, according to a given multivalued function which is a stable bridge, a control that solves the problem. Explicit formulas are obtained that determine a stable bridge in the considered control problem. Conditions are found under which the constructed stable bridge is maximal. Some problems of group pursuit can be reduced to the considered control problem with disturbance. The article provides such an example.

Funding. The study was funded by Russian Science Foundation, project number 19–11–00105.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
2. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamical system), Moscow: Nauka, 1985.
3. Pontryagin L. S. Linear differential games. I, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 769–771. https://zbmath.org/?q=an:0157.16304
4. Pontryagin L. S. Linear differential games. II, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 910–912. https://zbmath.org/?q=an:0157.16401
5. Satimov N. Yu. One pursuit method in linear differential games, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1981, no. 6, pp. 5–7 (in Russian).
6. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, pp. 69–85. https://doi.org/10.1134/S0081543810040073
7. Ukhobotov V. I. A stable bridge in game with vectograms that depend linearly on given sets, *Soviet Mathematics*, 1988, vol. 32, no. 2, pp. 89–92. https://zbmath.org/?q=an:0677.90099
8. Matviychuk A. R., Ukhobotov V. I., Ushakov A. V., Ushakov V. N. The approach problem of a nonlinear controlled system in a finite time interval, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 81, issue 2, pp. 114–128. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.005
9. Ushakov V. N., Ukhobotov V. I., Lipin A. E. An addition to the definition of a stable bridge and an approximating system of sets in differential games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 304, pp. 268–280. https://doi.org/10.1134/S0081543819010206
10. Ukhobotov V. I. Synthesis of guaranteed control based on approximating scheme, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, suppl. 1, pp. 254–260. https://zbmath.org/?q=an:1116.93330
11. Kumkov S. S., Le Menec S., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, pp. 609–633, https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
12. Izmest'ev I. V., Ukhobotov V. I. Game problem of convergence of a group of objects with different types of dynamics, and target, *2018 International Conference "Global Smart Industry Conference" (GloSIC)*, IEEE, 2018. https://doi.org/10.1109/GloSIC.2018.8570102

13. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
14. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972.
15. Pshenichnyi B. N., Sagaidak M. I. About differential games with fixed time, *Kibernetika*, 1970, no. 2, pp. 54–63 (in Russian).
16. Ukhobotov V. I. Stable property of the programmed absorption operator in games with simple motion and with a convex target in spaces with incomplete linear structure, *Vestnik Chelyabinskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2003, issue 8, pp. 181–189 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vchgu133

Received 24.07.2020

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: ukh@csu.ru

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Chief Researcher, Department of Dynamical Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Citation: V. I. Ukhobotov, V. N. Ushakov. On one control problem with disturbance and vectograms depending linearly on given sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 429–443.