

УДК 517.938, 531.36, 534.1

© Т. А. Гурина

БИФУРКАЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНКИ В ЖИДКОСТИ

Рассматривается модель хаотического движения пластинки в вязкой жидкости, описываемая колебательной системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью. В ходе бифуркационного исследования особых точек системы построены карты типов особых точек и найдено уравнение поверхности в пространстве параметров диссипации и циркуляции, на которой происходит бифуркация Андронова–Хопфа рождения предельного цикла. При дальнейшем изменении параметров вблизи поверхности Андронова–Хопфа найдены каскады бифуркаций удвоения периода цикла Фейгенбаума и субгармонические каскады Шарковского, заканчивающиеся рождением цикла периода три. Получены выражения для седловых чисел седлоузла и двух седлофокусов и построены их графики в пространстве параметров. Показано, что в системе реализуются гомоклинические каскады бифуркаций при разрушении гомоклинических траекторий седлофокусов. Существование гомоклинических траекторий седлофокусов доказано численно-аналитическим методом. Графики старшего показателя Ляпунова и бифуркационные диаграммы показывают, что при изменении коэффициентов диссипации система в несколько этапов переходит к хаосу.

Ключевые слова: движение тела в жидкости, особая точка, предельный цикл, гомоклиническая траектория, каскад бифуркаций, аттрактор, хаос, старший показатель Ляпунова.

DOI: [10.20537/vm190101](https://doi.org/10.20537/vm190101)

Задача о движении плоского листа в сопротивляющейся среде является одной из классических задач гидро- и аэродинамики. Возможны следующие режимы движения в зависимости от параметров задачи [5]: 1) простое равномерное движение; 2) движение с колебаниями из стороны в сторону, как регулярными, так и нерегулярными (флаттер); 3) движение с кувырканиями, периодическими или нерегулярными (авторотация).

В предположениях модели Козлова [3, 5], когда в консервативные уравнения Кирхгофа добавлены члены, связанные с вязкими силами, линейными по обобщенным скоростям, и моментом силы сопротивления, а также циркуляцией, имеем колебательную систему, похожую на модель Лоренца [7, 10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1 y - \nu_1 x - yz, \\ \dot{y} = h_2 x - \nu_2 y + xz, \\ \dot{z} = -\nu_3 z + xy. \end{cases} \quad (0.1)$$

Система содержит квадратичную нелинейность в правой части и пять положительных бифуркационных параметров $h_1, h_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, связанных с циркуляцией и диссипацией. Система инвариантна относительно преобразования $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Система является диссипативной, так как дивергенция векторного поля всюду отрицательна: $\operatorname{div} F(x, y, z) = -\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 < 0$.

Некоторые интерпретации решений системы (0.1) содержатся в [5]. Частный случай, когда модель интегрируема, сводится к уравнению маятника с затуханием [4], и потеря устойчивости режима стационарного равномерного падения может приводить к переходу в режим авторотации. Движение, будучи вначале ротационным, становится затем колебательным, и затухание колебаний приводит в итоге к неподвижной точке, отвечающей устойчивому стационарному падению профиля широкой стороной вперед. Траектория уходит по спирали от неустойчивой неподвижной точки и приходит к охватывающему цилиндр предельному циклу второго рода, который соответствует режиму авторотации.

Исследуем нерегулярное движение пластины или переход к хаосу в системе (0.1) общего вида. Предполагается, что сценарий перехода к хаосу будет похож на развитие турбулентности в системе типа Лоренца [7, 14].

§ 1. Бифуркационное исследование особых точек

Найдем особые точки системы (0.1) из условий $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ [1, 11]:

$$\begin{cases} h_1 y - \nu_1 x - yz = 0, \\ h_2 x - \nu_2 y + xz = 0, \\ -\nu_3 z + xy = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

При $h_1, h_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3 > 0$ система (0.1) может иметь пять положений равновесия: $O_0(0, 0, 0)$, $O_1(x_1, y_1, z_1)$, $O_2(x_2, y_2, z_2)$, $O_3(x_3, y_3, z_3)$, $O_4(x_4, y_4, z_4)$, где

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha}, & y_{1,2} &= \pm \sqrt{\alpha}, & z_{1,2} &= \frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha}, \\ x_{3,4} &= \pm \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\beta}}{\nu_1 \nu_3 + \beta}, & y_{3,4} &= \pm \sqrt{\beta}, & z_{3,4} &= \frac{h_1 \beta}{\nu_1 \nu_3 + \beta}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

при условиях, что

$$\begin{aligned} \gamma &= (h_1 + h_2)^2 - 4\nu_1 \nu_2 > 0, \\ \alpha &= \frac{\nu_3}{2\nu_2} (h_1 h_2 - 2\nu_1 \nu_2 + h_1^2 + h_1 \sqrt{\gamma}) > 0, \\ \beta &= \frac{\nu_3}{2\nu_2} (h_1 h_2 - 2\nu_1 \nu_2 + h_1^2 - h_1 \sqrt{\gamma}) > 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пары особых точек $O_1(x_1, y_1, z_1)$ и $O_2(x_2, y_2, z_2)$, $O_3(x_3, y_3, z_3)$ и $O_4(x_4, y_4, z_4)$ симметричны друг другу относительно оси Oz .

В частности, при $h_1 = h_2 = h$ получим

$$\begin{aligned} \gamma &= 4(h^2 - \nu_1 \nu_2) > 0, & h &> \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \\ \alpha &= \frac{\nu_3}{4\nu_2} (\gamma + 2h\sqrt{\gamma}) > 0, \\ \beta &= \frac{\nu_3}{4\nu_2} (\gamma - 2h\sqrt{\gamma}) > 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

и существуют только три точки: $O_0(0, 0, 0)$, $O_1(x_1, y_1, z_1)$, $O_2(x_2, y_2, z_2)$, где точки $O_1(x_1, y_1, z_1)$ и $O_2(x_2, y_2, z_2)$ симметричны относительно оси Oz .

На рис. 1 изображены графики зависимостей $\gamma(h)$, $x_1(h)$, $y_1(h)$, $z_1(h)$ при фиксированных $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 1$. Видно, что точка $O_1(x_1, y_1, z_1)$ возникает из точки $O_0(0, 0, 0)$ при $h = 2$ и с ростом параметра h быстро удаляется от нее, асимптотически приближаясь к плоскости $x = \sqrt{2}$.

Для исследования особых точек найдем матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} -\nu_1 & h_1 - z & -y \\ h_2 + z & -\nu_2 & x \\ y & x & -\nu_3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

В точке $O_0(0, 0, 0)$ получим матрицу линеаризации системы

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\nu_1 & h_1 & 0 \\ h_2 & -\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

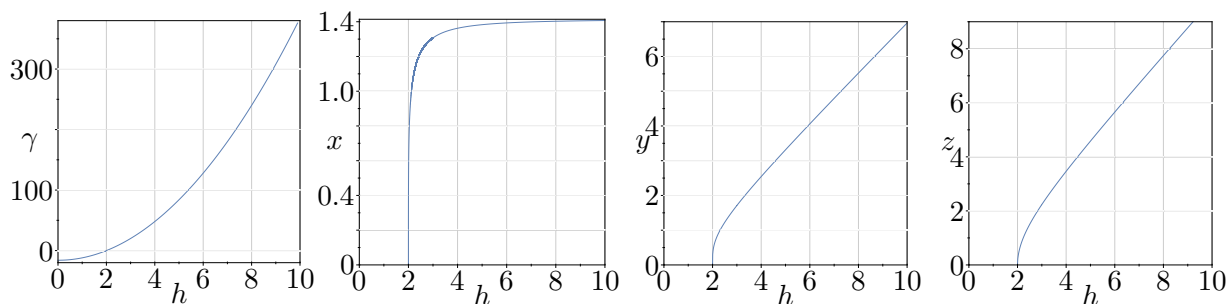


Рис. 1. Графики зависимостей $\gamma(h)$, $x_1(h)$, $y_1(h)$, $z_1(h)$ при $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 1$

Таблица 1. Типы особых точек

Тип особой точки	Цвет области
Устойчивый узел: $\Lambda_3 < \Lambda_2 < \Lambda_1 < 0$	
Седло-узел: $\Lambda_3 < \Lambda_2 < 0 < \Lambda_1$	
Устойчивый узел-фокус: $\Lambda_3 < \text{Re } \Lambda_{1,2} < 0$	
Седлофокус: $\Lambda_3 < 0 < \text{Re } \Lambda_{1,2}$	

и характеристический многочлен

$$\det(A_0 - \lambda E) = (-\nu_3 - \lambda)(\lambda^2 + (\nu_1 + \nu_2)\lambda + (\nu_1\nu_2 - h_1h_2)). \tag{1.7}$$

Отсюда корни характеристического уравнения $\det(A_0 - \lambda E) = 0$:

$$\lambda_1 = -(\nu_1 + \nu_2) + \sqrt{D} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = -(\nu_1 + \nu_2) - \sqrt{D} < 0, \quad \lambda_3 = -\nu_3 < 0, \tag{1.8}$$

где $D = (\nu_1 + \nu_2)^2 - 4(\nu_1\nu_2 - h_1h_2) = (\nu_1 - \nu_2)^2 + 4h_1h_2 > 0$.

Таким образом, особая точка $O_0(0, 0, 0)$ имеет тип «устойчивый узел» при $\nu_1\nu_2 - h_1h_2 > 0$, а при $\nu_1\nu_2 - h_1h_2 < 0$ имеет тип «седлоузел» с одномерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u и двумерным устойчивым инвариантным многообразием W^s [13].

В случае когда $h_1 = h_2 = h$, точка $O_0(0, 0, 0)$ меняет тип «устойчивый узел» на тип «седлоузел» при пересечении поверхности $h = \sqrt{\nu_1\nu_2}$.

На рис. 2 изображены карты типов особой точки $O_0(0, 0, 0)$ на плоскостях параметров (h, ν_1) , (h, ν_2) , (h, ν_3) при $h_1 = h_2 = h \in [0; 10]$, $\nu_1 \in [0; 5]$, $\nu_2 \in [0; 10]$, $\nu_3 \in [0; 5]$. Соответствие между цветом области и типом особой точки приведено в таблице 1, где Λ_i , $i = 1, 2, 3$, обозначены корни λ_j , $j = 1, 2, 3$, характеристического уравнения, упорядоченные согласно условиям $\text{Re } \Lambda_3 \leq \text{Re } \Lambda_2 \leq \text{Re } \Lambda_1$.

Вычислим седловое число седлоузла $O_0(0, 0, 0)$ по формуле [7]

$$\sigma_0 = \lambda_1 + \max(\lambda_2, \lambda_3). \tag{1.9}$$

Графики седлового числа σ_0 в зависимости от параметров h , ν_1 , ν_2 , ν_3 имеют вид поверхностей, пересекающих плоскость $\sigma_0 = 0$ (рис. 3). При ненулевых седловых числах согласно теореме Шильникова [12] возможно существование гомоклинических траекторий седлоузла.

В симметричных точках $O_{1,2}$ имеем матрицы линеаризации

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} -\nu_1 & h_1 - \frac{h_1\alpha}{\nu_1\nu_3+\alpha} & \mp\sqrt{\alpha} \\ h_2 + \frac{h_1\alpha}{\nu_1\nu_3+\alpha} & -\nu_2 & \pm\frac{\nu_3h_1\sqrt{\alpha}}{\nu_1\nu_3+\alpha} \\ \pm\sqrt{\alpha} & \pm\frac{\nu_3h_1\sqrt{\alpha}}{\nu_1\nu_3+\alpha} & -\nu_3 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

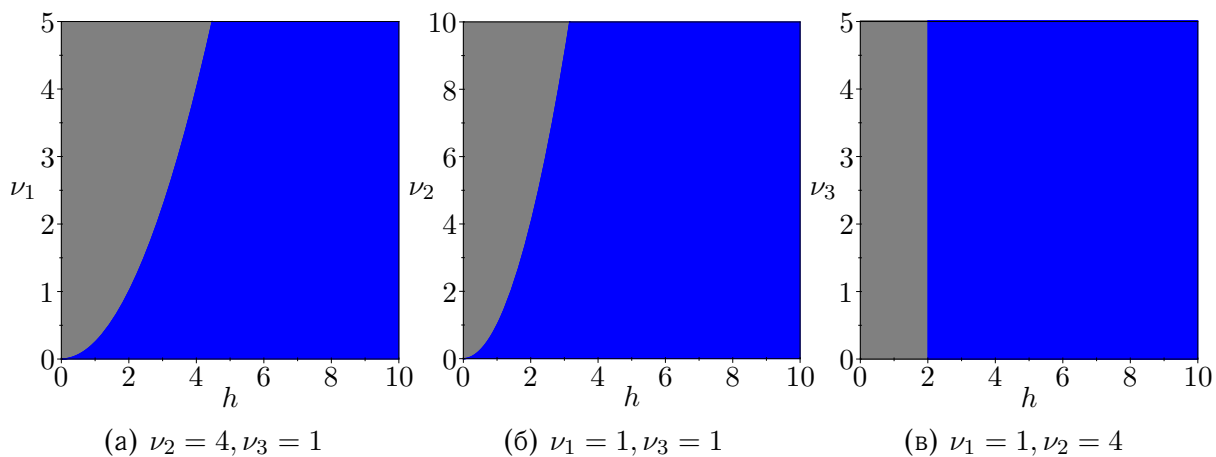


Рис. 2. Карты типов особой точки O_0 на плоскостях (h, ν_1) , (h, ν_2) , (h, ν_3)

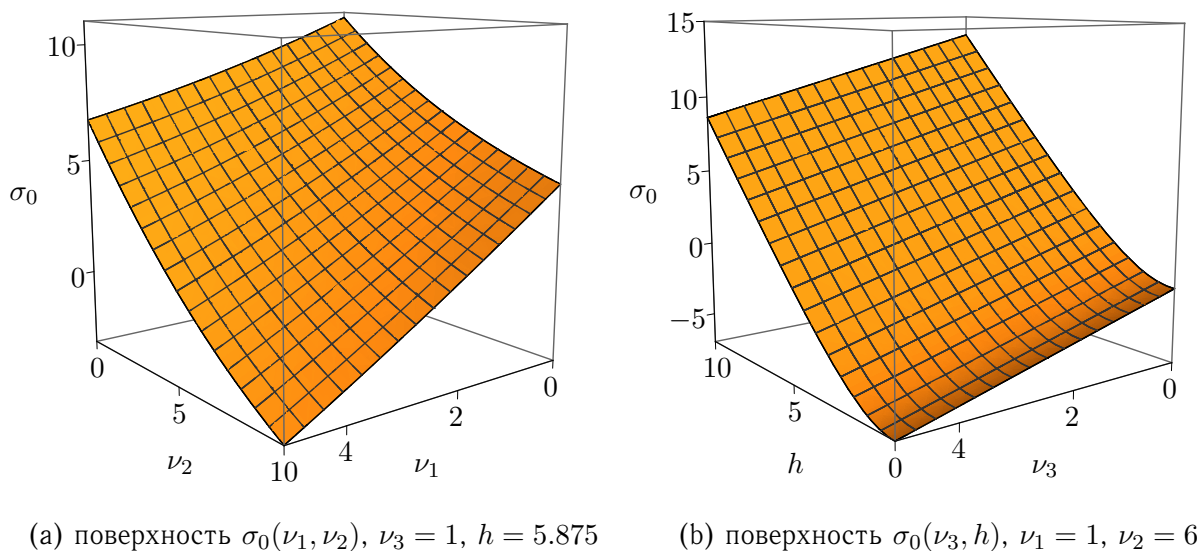


Рис. 3. Графики седлового числа седлоузла $O_0(0, 0, 0)$

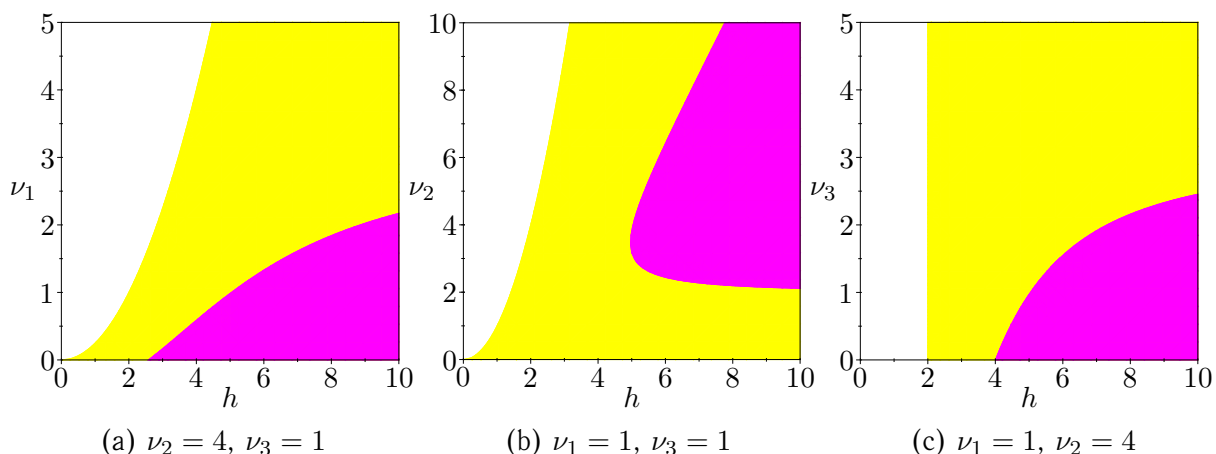


Рис. 4. Карты типов особых точек $O_{1,2}$ на плоскостях $(h, \nu_1), (h, \nu_2), (h, \nu_3)$

и характеристические многочлены

$$\det(A_{1,2} - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\nu_1 - \lambda & h_1 - \frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} & \mp \sqrt{\alpha} \\ h_2 + \frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} & -\nu_2 - \lambda & \pm \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} \\ \pm \sqrt{\alpha} & \pm \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} & -\nu_3 - \lambda \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения $\det(A_{1,2} - \lambda E) = 0$ имеются два комплексно-сопряженных.

На рис. 4 изображены карты типов особых точек $O_{1,2}$ на плоскостях параметров $(h, \nu_1), (h, \nu_2), (h, \nu_3)$ при $h_1 = h_2 = h \in [0; 10], \nu_1 \in [0; 5], \nu_2 \in [0; 10], \nu_3 \in [0; 5]$. Соответствие между цветом области и типом особой точки приведено в таблице 1, где $\Lambda_i, i = 1, 2, 3$, обозначены корни $\lambda_j, j = 1, 2, 3$, характеристического уравнения, упорядоченные согласно условиям $\text{Re } \Lambda_3 \leq \text{Re } \Lambda_2 \leq \text{Re } \Lambda_1$.

Граница между областью устойчивого узла-фокуса и седлофокуса на рис. 4 является кривой бифуркации Андронова–Хопфа [1, 8]. В точках $O_{1,2}$ при пересечении параметрами кривой Андронова–Хопфа происходит бифуркация рождения предельного цикла.

Из существования в системе седлоузла $O_0(0, 0, 0)$ и двух седлофокусов $O_{1,2}$ вытекает возможность образования в ней различных гомоклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций [14–16].

§ 2. Бифуркация Андронова–Хопфа

Теорема 1 (Андронова–Хопфа [12]). Пусть $F(x, y, \mu)$ — семейство C^r -гладких векторных полей по переменным $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^m$ и параметрам $\mu \in \mathbb{R}^p$ ($r \geq 3, m \geq 0, p \geq 1$) имеет при $\mu = 0$ положение равновесия $O(0, 0)$ с двумя чисто мнимыми характеристическими показателями: $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu), \alpha(\mu), \beta(\mu) \in C^{r-1}, \alpha(0) = 0, \beta(0) > 0$, а остальные лежат слева от мнимой оси. Граница области устойчивости в пространстве параметров задана уравнением $\alpha(\mu) = 0$: состояние равновесия устойчиво, если $\alpha(\mu) < 0$, и неустойчиво, если $\alpha(\mu) > 0$. Если по крайней мере одна из компонент вектора $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial \mu_p} \right\}_{\mu=0}$ ненулевая, то при всех малых μ граница является C^{r-1} -гладкой поверхностью коразмерности один. Выберем $\alpha(\mu)$ в качестве управляющего параметра и рассмотрим однопараметрическое семейство, трансверсальное к границе устойчивости. Если первая ляпуновская величина $\mathcal{L}_1 < 0$ (см. определение на с. 120 [12]), то положение равновесия O устойчиво при $\alpha(\mu) \leq 0$, все траектории из некоторой окрестности U стремятся к O . При $\alpha(\mu) > 0$ положение равновесия становится неустойчивым, и возникает устойчивый предельный цикл диаметром порядка $\sqrt{\alpha(\mu)}$, к которому стремятся все траектории из некоторой проколотой окрестности \dot{U} .

Найдем границу устойчивости точек $O_{1,2}$, то есть значения параметров, при которых появляется пара чисто мнимых корней характеристического уравнения $\det(A_{1,2} - \lambda E) = 0$ [7].

Чисто мнимые корни у кубического уравнения $k_0 \cdot \lambda^3 + k_1 \cdot \lambda^2 + k_2 \cdot \lambda + k_3 = 0$ будут тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при λ^2 и λ равно произведению коэффициента при λ^3 и свободного члена: $k_1 \cdot k_2 = k_0 \cdot k_3$ [8].

В нашем случае

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad k_2 = \frac{h\nu_3}{\nu_2} \left(2h + \frac{\nu_2(\nu_2 - \nu_1)}{h + \sqrt{h^2 - \nu_1\nu_2}} \right), \quad k_3 = 4\nu_3(h^2 - \nu_1\nu_2), \quad (2.1)$$

и условие двух чисто мнимых корней примет вид

$$(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \frac{h\nu_3}{\nu_2} \left(2h + \frac{\nu_2(\nu_2 - \nu_1)}{h + \sqrt{h^2 - \nu_1\nu_2}} \right) = 4\nu_3(h^2 - \nu_1\nu_2). \quad (2.2)$$

Отсюда мы получим значение параметра ν_3^* , при котором точки $O_{1,2}$ типа «устойчивый узел-фокус» одновременно теряют устойчивость и порождают предельные циклы, то есть согласно теореме 1 происходит бифуркация Андронова–Хопфа:

$$\nu_3^* = \frac{4\nu_2}{h} \left(2h + \frac{\nu_2(\nu_2 - \nu_1)}{h + \sqrt{h^2 - \nu_1\nu_2}} \right) - (\nu_1 + \nu_2). \quad (2.3)$$

Характеристическое уравнение при $k_0 = 1$ и $k_3 = k_1 k_2$ запишется как $\lambda^3 + k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 k_2 = 0$ и будет иметь корни

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i \sqrt{k_2} = \pm i \sqrt{\frac{h\nu_3^*}{\nu_2} \left(2h + \frac{\nu_2(\nu_2 - \nu_1)}{h + \sqrt{h^2 - \nu_1\nu_2}} \right)}, \\ \lambda_3 &= -k_1 = -(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3^*) = -\frac{4\nu_2}{h} \frac{h^2 - \nu_1\nu_2}{2h + \frac{\nu_2(\nu_2 - \nu_1)}{h + \sqrt{h^2 - \nu_1\nu_2}}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, при всех $\nu_3 < \nu_3^*$ точки $O_{1,2}$ будут иметь тип «седлофокус» с одномерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u и двумерным устойчивым инвариантным многообразием W^s [13].

При фиксированном h получим из (2.3) уравнение двумерной поверхности Андронова–Хопфа в пространстве параметров ν_1, ν_2, ν_3 (рис. 5). На этой поверхности происходит бифуркация Андронова–Хопфа, а под ней предельный цикл претерпевает каскад изменений, приводящий к хаосу [7].

§ 3. Каскад бифуркаций периода цикла

При увеличении бифуркационного параметра $\nu_3 \in [0, 1]$ и фиксированных параметрах $\nu_1 = 1, \nu_2 = 4, h_1 = h_2 = h = 5.875$ в системе возникает каскад бифуркаций удвоения периода цикла, завершающийся образованием хаотического аттрактора [17]. Визуализацию циклов получим с помощью системы WInSet [9].

При $\nu_3 = 0.05$ в окрестности каждой из точек O_1 и O_2 существует однообходный предельный цикл. На рис. 6, а показан один однообходный цикл в окрестности точки O_1 . При $\nu_3 = 0.1$ появляется однообходный цикл удвоенного периода, охватывающий сразу обе точки, O_1 и O_2 (см. рис. 6, б). На рис. 6, в при $\nu_3 = 0.215$ показан двухобходный цикл, охватывающий обе точки, O_1 и O_2 . На рис. 6, г при $\nu_3 = 0.22$ показан четырехобходный цикл, и далее реализуются все циклы 2^n обходов. Затем, согласно последовательности Шарковского [7]

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3,$$

реализуются все целые циклы, последним из которых является трехобходный цикл (см. рис. 6, д) при $\nu_3 = 0.225$. В результате при $\nu_3 = 0.23$ образуется так называемый аттрактор Фейгенбаума–Шарковского, рис. 6, е [7, 16–18].

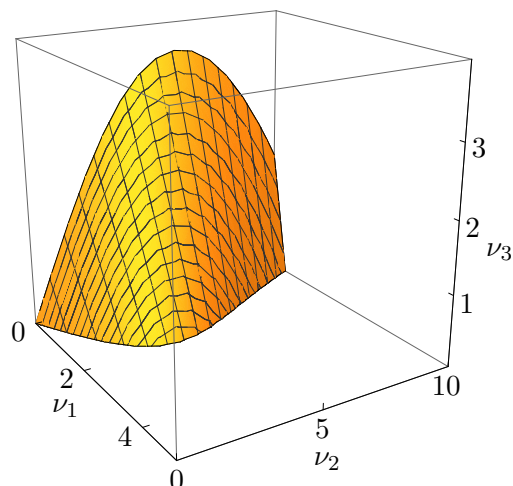


Рис. 5. Поверхность Андронова–Хопфа особых точек $O_{1,2}$ при $h = 6$

Кроме каскадов бифуркаций периода цикла в системе реализуются гомоклинические каскады бифуркаций. В результате образуется странный аттрактор типа аттрактора Лоренца.

§ 4. Нахождение гомоклинических траекторий седлофокуса

Теорема 2 (Шильникова [12]). Пусть $F(x, \mu)$ — семейство C^r -гладких векторных полей ($x \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $r \geq 2$, $m \geq 3$, $p \geq 1$) имеет положение равновесия O типа седлофокус с $m - 1$ -мерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями ($\operatorname{Re} \lambda_j(\mu) < 0$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $\lambda_m(\mu) > 0$) и отрицательной седловой величиной $\sigma(\mu) = \max(\operatorname{Re} \lambda_j(\mu)) + \lambda_m(\mu)$ и имеет гомоклиническую петлю Γ , которая удовлетворяет условиям невырожденности: (1) гомоклиническая петля Γ не принадлежит сильно неустойчивому многообразию; (2) расширенное устойчивое многообразие трансверсально неустойчивому многообразию в точках Γ . Тогда в произвольно малой окрестности Γ существует бесконечное множество седловых периодических орбит.

Вычислим седловое число седлофокусов $O_{1,2}$ по формуле [12]

$$\sigma_1 = \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) + \lambda_3. \quad (4.1)$$

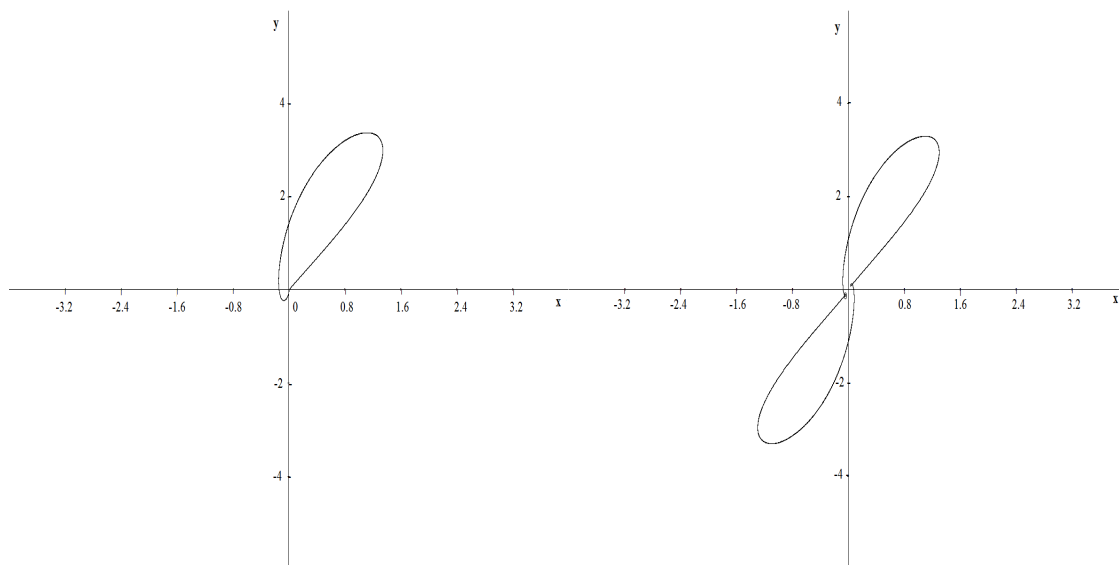
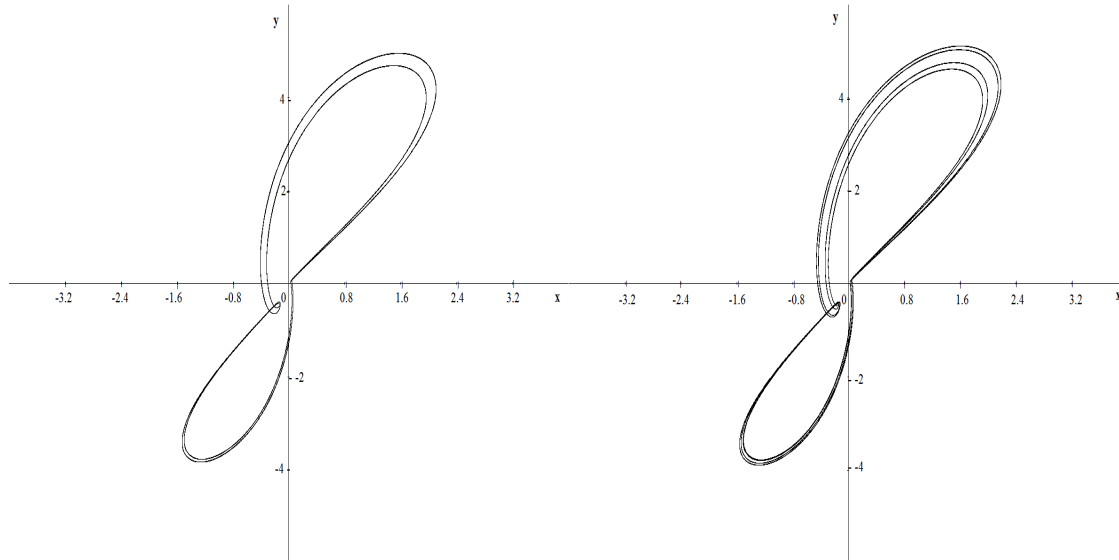
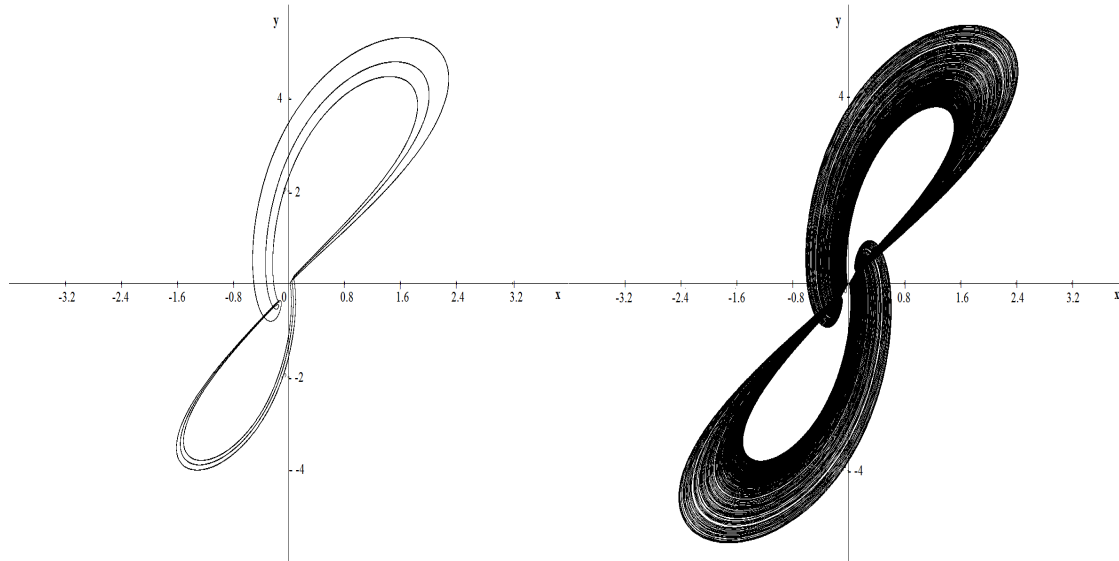
Графики седлового числа σ_1 там, где $O_{1,2}$ существуют, в зависимости от параметров h, ν_1, ν_2, ν_3 имеют вид поверхностей, лежащих ниже плоскости $\sigma_1 = 0$ (рис. 7).

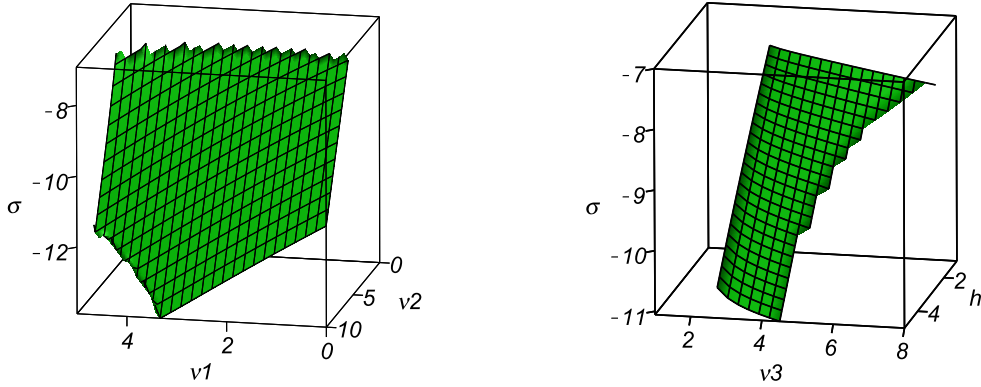
Найдем гомоклинические траектории седлофокусов $O_{1,2}$, разрушение которых является главной бифуркацией гомоклинического каскада [12]. Применим к исходной системе (0.1) преобразование $w = h_1 y - \nu_1 x - yz$ [7, 13, 14]:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (h_1 h_2 - \nu_1 \nu_2)x - (\nu_1 + \nu_2)w + (h_1 - h_2)xz - xz^2 + \nu_3 z \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} - x \left(\frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} \right)^2, \\ \dot{z} = -\nu_3 z + x \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Особые точки в координатах x, w, z имеют вид

$$O_0(0, 0, 0), \quad O_{1,2} \left(\pm \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha}, 0, \frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} \right). \quad (4.3)$$

(a) 1-цикл, $\nu_3 = 0.05$ (b) 1-цикл, $\nu_3 = 0.1$ (c) 2-цикл, $\nu_3 = 0.215$ (d) 4-цикл, $\nu_3 = 0.22$ (e) 3-цикл, $\nu_3 = 0.225$ (f) аттрактор, $\nu_3 = 0.23$ **Рис. 6.** Каскад бифуркаций периода цикла, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $h = 5.875$



(a) поверхность $\sigma_1(\nu_1, \nu_2)$, $\nu_3 = 1, h = 5.875$ (b) поверхность $\sigma_1(\nu_3, h)$, $\nu_1 = 1, \nu_2 = 4$

Рис. 7. Графики седлового числа седлофокусов $O_{1,2}$

Для исследования особых точек найдем матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, & A_{12} &= 1, & A_{13} &= 0, \\ A_{21} &= (h_1 h_2 - \nu_1 \nu_2) + (h_1 - h_2)z - z^2 + \frac{\nu_1 \nu_3 z}{h_1 - z} - \frac{(w + \nu_1 x)(w + 3\nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}, \\ A_{22} &= -(\nu_1 + \nu_2) + \frac{\nu_3 z}{h_1 - z} - \frac{2x(w + \nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}, \\ A_{23} &= (h_1 - h_2)x - 2xz + \nu_3 \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} + \nu_3 z \frac{w + \nu_1 x}{(h_1 - z)^2} - 2x \frac{(w + \nu_1 x)^2}{(h_1 - z)^3}, \\ A_{31} &= \frac{w + 2\nu_1 x}{h_1 - z}, & A_{32} &= \frac{x}{h_1 - z}, & A_{33} &= -\nu_3 + \frac{x(w + \nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В точках $O_{1,2}$ получим матрицу линеаризации системы:

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= (h_1 h_2 - \nu_1 \nu_2 - 2\alpha) + (h_1 - h_2)z - z^2 + \frac{\nu_1 \nu_3 z}{h_1 - z} - \frac{(w + \nu_1 x)(w + 3\nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}, \\ a_{22} &= -(\nu_1 + \nu_2) + \frac{\nu_3 z}{h_1 - z} - \frac{2x(w + \nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}, \\ a_{23} &= (h_1 - h_2)x - 2xz + \nu_3 \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} + \nu_3 z \frac{w + \nu_1 x}{(h_1 - z)^2} - 2x \frac{(w + \nu_1 x)^2}{(h_1 - z)^3}, \\ a_{31} &= \frac{w + 2\nu_1 x}{h_1 - z}, & a_{32} &= \frac{x}{h_1 - z}, & a_{33} &= -\nu_3 + \frac{x(w + \nu_1 x)}{(h_1 - z)^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

и характеристическое уравнение $\det(A_{1,2} - \lambda E) = k_0\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0$,

$$\begin{aligned} k_0 &= -1, \quad k_1 = -(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3), \\ k_2 &= h_1h_2 - \nu_1\nu_2 - 2\alpha - \nu_3(\nu_1 + \nu_2) + \frac{\alpha}{\nu_1}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) + \\ &+ \frac{\alpha(\nu_1 + \nu_3)h_1(h_1 - h_2)}{\nu_1(\nu_1\nu_3 + \alpha)} - \frac{\alpha^2}{(\nu_1\nu_3 + \alpha)^2} \left(\frac{2\nu_3h_1^2}{\nu_1} + h_2^2 \right), \\ k_3 &= \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} \right) (h_1h_2 - \nu_1\nu_2) + \left(3\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} \right) \frac{\alpha h_1(h_1 - h_2)}{\nu_1\nu_3 + \alpha} - \\ &- \frac{\alpha^2}{(\nu_1\nu_3 + \alpha)^2} \left(4\nu_3h_1^2 + h_2^2 \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ с положительной действительной частью $a > 0$ и действительный отрицательный корень $\lambda_3 = \lambda < 0$. Приведем матрицу линейной части системы к каноническому виду:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Вычислим матрицу перехода C из условия $B = C^{-1} \cdot A_1 \cdot C$ или $C \cdot B = A_1 \cdot C$. Сделаем это в два этапа. Сначала приведем матрицу A_1 к диагональной форме G матрицей перехода H из собственных векторов матрицы A_1 :

$$G = H^{-1} \cdot A_1 \cdot H, \quad G = \begin{pmatrix} a + ib & 0 & 0 \\ 0 & a - ib & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$H = (H_1 \ H_2 \ H_3), \quad (A_1 - \lambda_j E) \cdot H_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

Матрица перехода C будет вещественной тогда и только тогда, когда H_3 — вещественный собственный вектор, а H_1, H_2 — комплексные собственные векторы, причем $H_2 = -i \cdot \bar{H}_1$, где черта обозначает комплексное сопряжение.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a + ib \right) & -\frac{i}{2} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a - ib \right) & \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + \lambda \right) \\ \frac{a+ib}{2} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a + ib \right) & -i \frac{a-ib}{2} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a - ib \right) & \lambda \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + \lambda \right) \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(2 + \frac{a+ib}{\nu_1} \right) & -i \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(2 + \frac{a-ib}{\nu_1} \right) & \sqrt{\alpha} \left(2 + \frac{\lambda}{\nu_1} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Далее, найдем матрицу перехода D , приводящую диагональную матрицу G к блочно-диагональной форме B из условия $B = D^{-1} \cdot G \cdot D$ или $D \cdot B = G \cdot D$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Теперь $B = D^{-1} \cdot H^{-1} \cdot A_1 \cdot H \cdot D = (H \cdot D)^{-1} \cdot A_1 \cdot (H \cdot D)$. Следовательно, $C = H \cdot D$. Получаем

$$C = \begin{pmatrix} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a \right) & -b & \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + \lambda \right) \\ \left(a\nu_3 - \frac{a\alpha}{\nu_1} + a^2 - b^2 \right) & -b \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + 2a \right) & \lambda \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + \lambda \right) \\ \sqrt{\alpha} \left(2 + \frac{a}{\nu_1} \right) & -\frac{b\sqrt{\alpha}}{\nu_1} & \sqrt{\alpha} \left(2 + \frac{\lambda}{\nu_1} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

При переходе к координатам (u, v, s) ,

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

система примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot A_1 \cdot C \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} + \dots \quad (4.16)$$

Линеаризованная в окрестности особой точки O_1 система примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

или

$$\begin{cases} \dot{u} = au - bv, \\ \dot{v} = bu + av, \\ \dot{s} = \lambda s. \end{cases} \quad (4.18)$$

Здесь одна особая точка: $O_1(0, 0, 0)$. Таким образом, неустойчивое инвариантное многообразие нелинейной системы касается плоскости (u, v) .

Выберем начальные условия в виде $u_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $v_0 = \varepsilon \sin \varphi$, $s_0 = 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ w(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ w_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

где

$$x_1 = \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha}, \quad w_1 = 0, \quad z_1 = \frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha}. \quad (4.20)$$

Вычислим

$$C \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a \right) \varepsilon \cos \varphi - b \varepsilon \sin \varphi \\ \left(a \nu_3 - \frac{a \alpha}{\nu_1} + a^2 - b^2 \right) \varepsilon \cos \varphi - b \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + 2a \right) \varepsilon \sin \varphi \\ \sqrt{\alpha} \left(2 + \frac{a}{\nu_1} \right) \varepsilon \cos \varphi - \frac{b \sqrt{\alpha}}{\nu_1} \varepsilon \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ w(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} + \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + a \right) \varepsilon \cos \varphi - b \varepsilon \sin \varphi \\ \left(a \nu_3 - \frac{a \alpha}{\nu_1} + a^2 - b^2 \right) \varepsilon \cos \varphi - b \left(\nu_3 - \frac{\alpha}{\nu_1} + 2a \right) \varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \varphi + \sqrt{\alpha} \left(2 + \frac{a}{\nu_1} \right) \varepsilon \cos \varphi - \frac{b \sqrt{\alpha}}{\nu_1} \varepsilon \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Решая систему (4.2) в прямом времени с начальными условиями (4.22), получим траекторию, сколь угодно близкую к сепаратрисе, выходящей из седлофокуса O_1 . Далее, переходим от системы (4.2) к системе двух уравнений, исключая время:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dx} = \frac{(h_1 h_2 - \nu_1 \nu_2)x - (\nu_1 + \nu_2)w + (h_1 - h_2)xz - xz^2 + \nu_3 z \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} - x \left(\frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z} \right)^2}{w}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{-\nu_3 z + x \frac{w + \nu_1 x}{h_1 - z}}{w}. \end{cases} \quad (4.23)$$

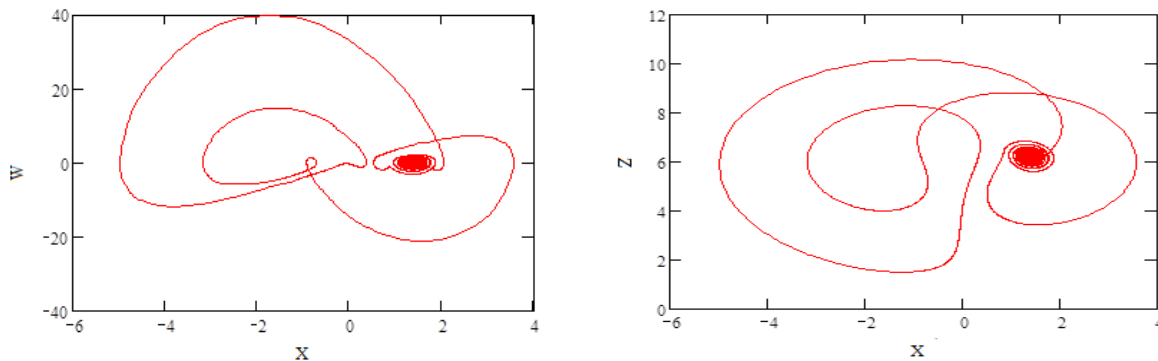


Рис. 8. Гомоклиническая петля седлофокуса, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 1$, $h = 6.5$

В окрестности точки $O_1(x_1, 0, z_1)$ числители и знаменатели правых частей последней системы стремятся к нулю. Поэтому, раскладывая в ряды Тейлора в окрестности особенности и вычисляя пределы числителя и знаменателя при $x \rightarrow x_1$ и $w(x_1) = 0$, найдем

$$\begin{aligned}
 w'(x_1) &= \frac{1}{w'(x_1)} \left((h_1 h_2 - \nu_1 \nu_2) - (\nu_1 + \nu_2) w'(x_1) + (h_1 - h_2)(z_1 + x_1 z'(x_1)) - (z_1^2 + 2x_1 z_1 z'(x_1)) \right) + \\
 &+ \frac{\nu_1 \nu_3 x_1 z'(x_1)}{h_1 - z_1} - \left(\frac{\nu_1 x_1}{h_1 - z_1} \right)^2 + \left(\nu_3 z_1 - \frac{2\nu_1 x_1^2}{h_1 - z_1} \right) + \frac{(w'(x_1) + \nu_1)(h_1 - z_1) + \nu_1 x_1 z'(x_1)}{(h_1 - z_1)^2}, \\
 z'(x_1) &= \frac{1}{w'(x_1)} \left(-\nu_3 z'(x_1) + \frac{\nu_1 x_1}{h_1 - z_1} + x_1 \frac{(w'(x_1) + \nu_1)(h_1 - z_1) + \nu_1 x_1 z'(x_1)}{(h_1 - z_1)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Отсюда при $w'(x_1) = \lambda$

$$z'(x_1) = \frac{h_1 \sqrt{\alpha} (\lambda + 2\nu_1)}{\nu_1 (\lambda + \nu_3) - h_1 \alpha}. \tag{4.25}$$

Решая систему (4.2) в обратном времени с начальными условиями

$$\begin{aligned}
 x(0) &= -\frac{\nu_3 h_1 \sqrt{\alpha}}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} + \varepsilon, \\
 w(0) &= \lambda \varepsilon, \\
 z(0) &= -\frac{h_1 \alpha}{\nu_1 \nu_3 + \alpha} - \frac{h_1 \sqrt{\alpha} (\lambda + 2\nu_1)}{\nu_1 (\lambda + \nu_3) - h_1 \alpha} \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

получим траекторию, сколь угодно близкую к гомоклинической, входящей в седлофокус $O_1(x_1, 0, z_1)$. Сшивку осуществляем при $w = 0$.

Если для любого достаточно малого ε и соответствующей константы φ при $w = 0$ значения x^+ , z^+ на выходящей траектории отличаются на величины порядка $O(\varepsilon)$ от значений x^- , z^- на входящей траектории, то существование гомоклинической траектории седлофокуса $O_1(x_1, 0, z_1)$ системы (4.2) и системы (0.1) доказано [7, 13].

Расчеты проводились в системе Maple методом Рунге–Кутты 7–8 порядка. Показано, что для $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varphi = 1.19$ условия существования гомоклинической траектории седлофокуса удовлетворяются при $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 1$, $h = 6.5$ (рис. 8). Особая точка $O_2(x_2, 0, z_2)$ имеет симметричную гомоклиническую траекторию.

Далее, согласно теореме 2 при разрушении каждой из двух гомоклинических спиралей образуется счетное множество предельных циклов [12].

§ 5. Старший показатель Ляпунова

Старший показатель Ляпунова является количественной характеристикой систем, обладающих экспоненциальным разбеганием первоначально близких траекторий. При переходе динамической системы в область хаоса старший показатель Ляпунова переходит в область положительных значений [6, 7].

Вычислим значения старшего показателя Ляпунова системы (0.1), используя систему в вариациях. Заменяем $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = y(t)$, $x_3(t) = z(t)$ и обозначим вариации решений системы по начальным условиям

$$p_1(t) = \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_j(0)}, \quad p_2(t) = \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_j(0)}, \quad p_3(t) = \frac{\partial x_3(t)}{\partial x_j(0)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

Система уравнений в вариациях вместе с исходной системой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h_1 x_2 - \nu_1 x_1 - x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = h_2 x_1 - \nu_2 x_2 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\nu_3 x_3 + x_1 x_2, \\ \dot{p}_1 = h_1 p_2 - \nu_1 p_1 - p_2 x_3 - x_2 p_3, \\ \dot{p}_2 = h_2 p_1 - \nu_2 p_2 + p_1 x_3 + x_1 p_3, \\ \dot{p}_3 = -\nu_3 p_3 + p_1 x_2 + x_1 p_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}, \quad p_1(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad p_2(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad p_3(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.3)$$

Показатель Ляпунова вычисляется по формуле

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{\|p(t)\|}{t}. \quad (5.4)$$

Результатом численного решения системы (5.2) являются графики зависимости старшего показателя Ляпунова от одного из бифуркационных параметров.

График старшего показателя Ляпунова соответствует бифуркационной диаграмме системы, которая вычисляется как множество точек притяжения траекторий системы на больших временах [13].

Рассмотрим в качестве бифуркационного параметра коэффициент диссипации ν_3 при фиксированных параметрах $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $h = 5.875$.

На рис. 9, а, б видно, как при $\nu_3 \approx 0.23$ в окрестности положений равновесия O_1 , O_2 старший показатель Ляпунова после серии удвоений переходит в область положительных значений, что означает переход в область хаоса. Бифуркационная диаграмма при $\nu_3 \approx 0.23$ также входит в область хаоса после последовательности бифуркаций устойчивых циклов. Затем при $\nu_3 \approx 0.26$ образуется регулярное окно и новый вход в область хаоса при $\nu_3 \approx 0.3$. Далее происходит гомоклинический каскад, и образуется странный аттрактор при $\nu_3 \approx 0.4$.

§ 6. Заключение

Таким образом, в колебательной модели движения пластинки в вязкой жидкости (0.1) при изменении параметров диссипации ν_1 , ν_2 , ν_3 и параметров циркуляции h_1 , h_2 найдены бифуркации Андронова–Хопфа рождения предельного цикла в окрестности двух особых точек $O_{1,2}$ типа «устойчивый узел-фокус». Для циклов удвоенного периода, охватывающих обе особые точки $O_{1,2}$ типа «седлофокус» при изменении параметра диссипации ν_3 определены сценарии перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода цикла Фейгенбаума и субгармонический

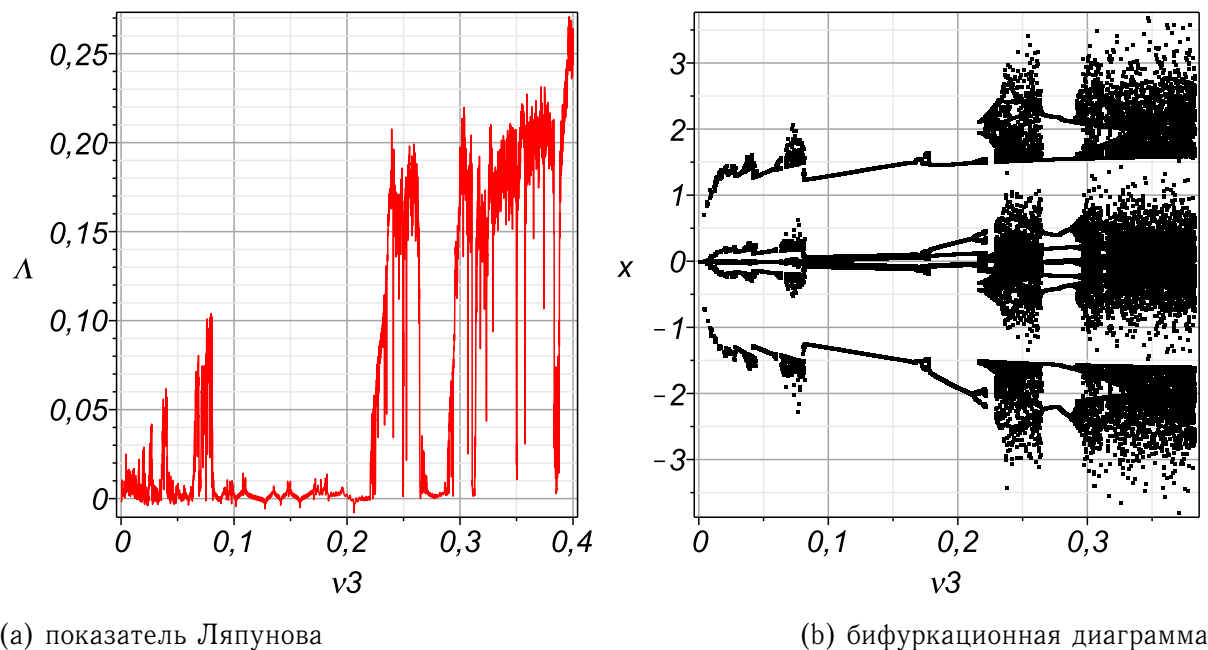


Рис. 9. График старшего показателя Ляпунова и бифуркационная диаграмма, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $h = 5.875$

каскад бифуркаций периода цикла Шарковского, завершающийся рождением цикла периода три. Доказано существование гомоклинических траекторий двух седлофокусов $O_{1,2}$ с помощью численно-аналитического метода стыковки с наперед заданной погрешностью частей траекторий, входящих в особую точку при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ в специальной системе координат. При разрушении гомоклинических траекторий двух седлофокусов $O_{1,2}$ происходит заключительный двойной гомоклинический каскад бифуркаций рождения счетного множества предельных циклов. В результате полного двойного гомоклинического каскада образуется странный аттрактор лоренцевского типа. График показателя Ляпунова и бифуркационная диаграмма системы подтверждают переход колебательной системы к динамическому хаосу при изменении одного из диссипативных параметров в несколько этапов, между которыми имеются регулярные окна.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00820.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 2-е изд. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 400 с.
2. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–128.
3. Козлов В.В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1990. № 1. С. 79–86.
4. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 528 с.
5. Кузнецов С.П. Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 3–49.
<https://doi.org/10.20537/nd1501001>
6. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
7. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
8. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложение. М.: Мир, 1980. 268 с.

9. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 304 с.
10. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
11. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.
12. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
13. Гурина Т.А. Качественные методы дифференциальных уравнений в теории управления летательными аппаратами. М.: Изд-во МАИ, 2014. 160 с.
14. Гурина Т.А., Дорофеев И.А. Гомоклинический каскад бифуркаций в системе типа Лоренца // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 2. С. 46–55.
15. Гурина Т.А., Дорофеев И.А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 63–68.
16. Гурина Т.А. Бифуркационное исследование перехода к хаосу в модели падения пластинки в жидкости // Материалы XX Междунар. конф. по выч. мех. и совр. прикл. прогр. системам. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 628–630.
17. Gurina T.A. Homoclinic chaos in the oscillatory system of motion of a plate in a liquid // Book of Abstracts Int. Conference–School «Dynamics, Bifurcations and Chaos-V». Nizhny Novgorod, 16–20 July 2018, p. 16.
<http://www.palata-nn.ru/files/news/2018/07/13/1/abstractsDBS18.pdf>
18. Krasilnikov P., Gurina T., Svetlova V. Bifurcation study of a chaotic model variable-length pendulum on a vibrating base // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2018. Vol. 105. P. 88–98.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.06.011>

Поступила в редакцию 17.10.2018

Гурина Татьяна Алексеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

E-mail: gurina-mai@mail.ru

T. A. Gurina

Bifurcation study of transition to chaos in the oscillatory system of motion of a plate in a liquid

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 3–18 (in Russian).

Keywords: motion of a body in a liquid, singular point, limit cycle, homoclinic trajectory, cascade of bifurcations, attractor, chaos, largest Lyapunov exponent.

MSC2010: 34C15, 34C23, 34C25

DOI: [10.20537/vm190101](https://doi.org/10.20537/vm190101)

We consider the model of chaotic motion of a plate in a viscous fluid, described by an oscillatory system of three ordinary differential equations with a quadratic nonlinearity. In the course of the bifurcation study of singular points of the system, maps of the types of singular points are constructed and a surface equation is found in the space of dissipation and circulation parameters on which the Andronov–Hopf bifurcation of the limit cycle creation takes place. With a further change in the parameters near the Andronov–Hopf surface, cascades of the period doubling doubling of the Feigenbaum cycle and the Sharkovsky subharmonic cascades, ending with the creation of a cycle of period three, are found. Expressions are obtained for saddle numbers of the saddle–node and two saddle–foci and their plots are plotted in the parameter space. It is shown that homoclinic cascades of bifurcations are realized in the system with the destruction of homoclinic trajectories of saddle–foci. The existence of homoclinic trajectories of saddle–foci is proved by a numerical-analytical method. The graphs of the largest Lyapunov exponent and the bifurcation diagrams show that when the dissipation coefficients change, the system switches to chaos in several stages.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00820).

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, New York: Springer, 1988. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1037-5>
2. Arnold V.I. *Dynamical systems V. Bifurcation theory and catastrophe theory*, New York: Springer, 1994. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57884-7>
3. Kozlov V.V. On the problem of fall of a rigid body in a resisting medium, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1990, vol. 45, no. 1, pp. 30–36 (in Russian).
4. Krasil'nikov P.S. *Prikladnye metody issledovaniya nelineinykh kolebaniy* (Applied methods for studying nonlinear oscillations), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2015, 528 p.
5. Kuznetsov S.P. Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 345–382. <https://doi.org/10.1134/S1560354715030090>
6. Kuznetsov S.P. *Dinamicheskii khaos* (Dynamic chaos), Moscow: Fizmatlit, 2006, 356 p.
7. Magnitskii N.A., Sidorov S.V. *Novye metody khaoticheskoi dinamiki* (New methods of chaotic dynamics), Moscow: Editorial URSS, 2004, 320 p.
8. Marsden J.E., McCracken M. *The Hopf bifurcation and its applications*, New York: Springer, 1976, 368 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6374-6>
9. Morozov A.D., Dragunov T.N. *Vizualizatsiya i analiz invariantnykh mnozhestv dinamicheskikh sistem* (Visualization and analysis of invariant sets of dynamical systems), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 304 p.
10. Neimark Yu.I., Landa P.S. *Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya* (Stochastic and chaotic oscillations), Moscow: Nauka, 1987, 424 p.
11. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics (Part I)*, Singapore: World Scientific, 1998, 416 p.
12. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics (Part II)*, Singapore: World Scientific, 2001, 592 p. <https://doi.org/10.1142/4221>
13. Gurina T.A. *Kachestvennye metody differentsial'nykh uravnenii v teorii upravleniya letatel'nyimi apparatami* (Qualitative methods of differential equations in the theory of control of aircraft), Moscow: Moscow Aviation Institute, 2014, 160 p.
14. Gurina T.A., Dorofeev I.A. Homoclinic cascade of bifurcations in a Lorentz-type system, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2010, vol. 12, no. 2, pp. 46–55 (in Russian).
15. Gurina T.A., Dorofeev I.A. The existence of a homoclinic butterfly in the stability model of an average firm, *Dinamicheskie sistemy*, 2010, issue 28, pp. 63–68 (in Russian).
16. Gurina T.A. Bifurcation study of the transition to chaos in the model of the falling of a plate in a liquid, *Proceedings of the XX Anniversary Int. Conf. on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems*, Moscow: Moscow Aviation Institute, 2017, pp. 628–630 (in Russian).
17. Gurina T.A. Homoclinic chaos in the oscillatory system of motion of a plate in a liquid, *Book of abstracts Int. Conference–School “Dynamics, Bifurcations and Chaos-V”*, Nizhny Novgorod, 16–20 July 2018, p. 16. <http://www.palata-nn.ru/files/news/2018/07/13/1/abstractsDBS18.pdf>
18. Krasilnikov P., Gurina T., Svetlova V. Bifurcation study of a chaotic model variable-length pendulum on a vibrating base, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 105, pp. 88–98. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.06.011>

Received 17.10.2018

Gurina Tat'yana Alekseevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Probability Theory and Computer Modelling, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: gurina-mai@mail.ru