

УДК 517.938.5, 531.38

© С. В. Соколов

**ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ АДЛЕРА–ВАН МЁРБЕКЕ. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БИФУРКАЦИЙ ТОРОВ ЛИУВИЛЛЯ<sup>1</sup>**

В работе рассмотрена интегрируемая гамильтонова система на алгебре Ли  $so(4)$  с дополнительным интегралом четвертой степени — интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Рассмотрены классические работы, посвященные, с одной стороны, динамике твердого тела, содержащего полости, полностью заполненные идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, а с другой стороны, изучению геодезических потоков левоинвариантных метрик на группах Ли. Приведены уравнения движения, функция Гамильтона, скобки Ли–Пуассона, функции Казимира и фазовое пространство рассматриваемого случая. В предыдущих работах начато исследование фазовой топологии интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке: приводятся в явном виде спектральная кривая, дискриминантное множество, бифуркационная диаграмма отображения момента, предьявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. В данной работе излагается алгоритм построения торов Лиувилля. Рассмотрены примеры перестроек лиувиллиевых торов при пересечении бифуркационных кривых для перестроек одного тора в два и двух торов в два.

*Ключевые слова:* интегрируемые гамильтоновы системы, бифуркационная диаграмма, бифуркации торов Лиувилля.

DOI: [10.20537/vm170404](https://doi.org/10.20537/vm170404)**§ 1. Введение**

В последние годы активно исследуются интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли с дополнительным полиномиальным интегралом степени выше второй. В частности, случай Адлера–ван Мёрбеке [1, 2] является актуальным объектом исследования. Отправной точкой послужили работы Мищенко и Фоменко [3, 4], посвященные интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. В результате на  $so(4)$  возникло новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Инвариантные соотношения третьей степени для одного интегрируемого случая на  $so(4)$  получены в работе [5]. Уравнения Эйлера на алгебре Ли  $so(4)$  также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [6–9]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [10] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на  $so(4)$  и их механическая интерпретация содержатся в книгах [11–16].

Вопросам анализа особенностей спектральной кривой и ее связи с бифуркационной диаграммой отображения момента посвящены работы [17–24]. Исследования фазовой топологии случая Адлера–ван Мёрбеке были начаты в [25, 26]. На первом этапе топологического анализа были приведены в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество, характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1. Далее, с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения момента была выделена бифуркационная диаграмма из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с  $L$ – $A$  парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке.

В настоящей работе излагается алгоритм построения связных компонент инвариантных многообразий интегрируемой гамильтоновой системы Адлера–ван Мёрбеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира. С помощью этого метода проиллюстрированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16–01–00170, 16–01–00809).

## § 2. Гамильтониан, интеграл и фазовое пространство

Уравнения движения интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке [1, 2] имеют вид уравнений Эйлера на алгебре  $so(4)$  [25, 26]:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}, \quad (2.1)$$

где трехмерный вектор  $\mathbf{M}$  имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», а компоненты трехмерного вектора  $\mathbf{S}$  пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

На ко-алгебре  $\mathfrak{g} = so(4)^*$  ( $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ ) с координатными функциями  $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$  определены скобки Ли–Пуассона:

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (2.2)$$

Скобка (2.2) имеет две функции Казимира:

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{F}_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}). \quad (2.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона  $H$  от  $\mathbf{M}, \mathbf{S}$  уравнения движения с помощью скобки Ли–Пуассона можно записать в гамильтоновой форме:

$$\dot{x} = \{H, x\}. \quad (2.4)$$

Здесь  $x$  — любая из переменных  $M_i, S_j$ .

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{\mathbf{F}_1 = a^2, \mathbf{F}_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2,$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена, и ограничение системы (2.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан:

$$H = (\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + 2(\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + (\mathbf{S}, C\mathbf{S}), \quad (2.5)$$

где диагональные  $3 \times 3$ -матрицы  $A, B, C$  имеют следующий вид:

$$A = \text{diag}[\alpha_2^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2],$$

$$B = \text{diag}[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2\alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1\alpha_3,$$

$$(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1\alpha_2],$$

$$C = \text{diag}[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3^2)].$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (2.5). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме:

$$K = 3 \sum_{i,j} \alpha_i (\alpha_j - \alpha_i) M_j S_j S_i^2 + \sum_i (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) M_i S_i^3 - \\ - (\mathbf{M}, \mathbf{M}) \sum_i [\alpha_j \alpha_k M_i S_i + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2) S_i^2]. \quad (2.6)$$

Во втором и третьем выражениях использовано суммирование, введенное С. В. Ковалевской. Здесь индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 3 и для заданного  $i$  индексы  $j, k$  принимают значения из множества  $\{1, 2, 3\}$ , не равные  $i$ .

Отметим, что выражение (2.6) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [1]). Дополнительный интеграл (2.6) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [27] и в книге [15].

Непосредственно можно убедиться, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.**  $\{H, K\} = 0$ , если  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ .

Рассмотрим далее алгоритм построения торов Лиувилля для фиксированных значений первых интегралов системы.

### § 3. Визуализация торов Лиувилля

Заметим, что гамильтониан (2.5), дополнительный интеграл (2.6) и функции Казимира (2.3) инвариантны относительно инверсии  $M_i \rightarrow -M_i, S_i \rightarrow -S_i \forall i = 1, 2, 3$ . Следовательно, совместная поверхность уровня должна обладать зеркальной симметрией относительно гиперплоскостей  $M_i = 0, S_i = 0 \forall i = 1, 2, 3$ . Будем искать точки пересечения совместной поверхности уровня с этими гиперплоскостями.

Рассмотрим, например, точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы

$$F_1 = a^2, F_2 = b^2, H = h, K = k, M_1 = 0, S_1 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad (3.1)$$

где  $a, b, h, k$  обозначены постоянные казимиров и интегралов.

1. Последовательно исключая из уравнений системы (3.1) переменные  $M_2, M_3, S_2$  и проводя замену  $S_3^2 = z$ , мы получаем уравнение четвертой степени относительно  $z$ , коэффициенты которого зависят от постоянных интегралов, казимиров, а также от параметров  $\alpha_i$ . Явные зависимости коэффициентов мы здесь не приводим ввиду их чрезвычайной громоздкости.

2. Разрешая это уравнение и проводя обратную подстановку в уравнения системы (3.1), получаем значения координат точки, принадлежащей совместной поверхности уровня интегралов.

3. Наконец, используем координаты этой точки в качестве начальных условий задачи Коши для уравнений (2.1) и интегрируем их численно. В случае когда значения констант интегралов попадают внутрь камеры бифуркационной диаграммы, мы, в результате численного интегрирования, получаем обмотку регулярного инвариантного тора.

4. Проецируя полученную интегральную кривую на одно из возможных подпространств фазового пространства системы, мы получаем наглядный образ инвариантного тора, заметаемого всюду плотной обмоткой.

5. Повторяем действия пп. 3 и 4 для всех корней уравнения, полученных в п. 2, мы получаем образы нескольких торов, число которых равняется числу компонент связности инвариантных многообразий интегрируемой системы.

### § 4. Перестройки торов Лиувилля

В работе [25] подробно описаны особенности ранга 0 и 1 отображения момента, дискриминантное множество спектральной кривой, ассоциированной с  $L$ - $A$  парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке, а также построена бифуркационная диаграмма для конкретных значений параметров задачи (рис. 1).

Особый интерес для применения техники, изложенной в предыдущем параграфе, представляет визуализация перестроек торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы. Для получения картины таких перестроек рассмотрим подробнее бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 1, в окрестности одной из ее ветвей (рис. 2).

Фиксируем значение постоянной гамильтониана  $h = 5.65$  и будем изменять значение постоянной интеграла  $K$ , постепенно приближаясь сверху к синей ветви бифуркационной диаграммы и пересекая ее. Согласно результатам топологического анализа, проведенного в [25], при пересечении этой ветви мы должны наблюдать бифуркацию типа  $B$ , то есть перестройку двух торов в один.

Применяя алгоритм, изложенный в предыдущем параграфе, для построения торов, при значениях постоянных интегралов, соответствующих точкам, отмеченным на рис. 2, мы можем наблюдать перестройку типа  $B$  на серии изображений, представленных на рис. 3.

Действуя аналогично, мы можем наглядно увидеть бифуркацию типа  $C_2$ , при которой два тора перестраиваются в два. Для этого сначала приведем увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы в окрестности ветви, при пересечении которой наблюдается перестройка

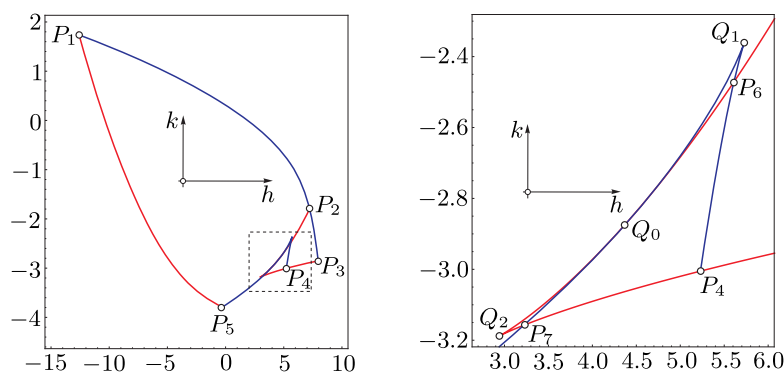


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  и ее увеличенный фрагмент для  $a = 0.66$ ,  $b = 0.86$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.77$

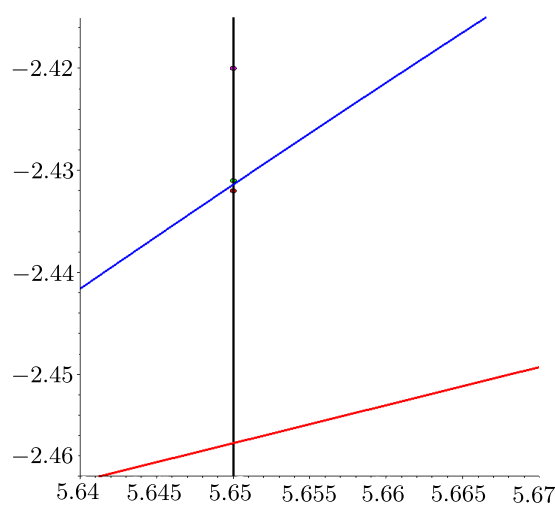


Рис. 2. Фрагмент бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , изображенной на рис. 1

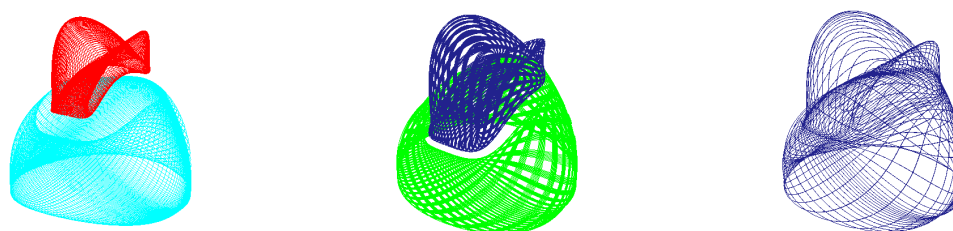


Рис. 3. Бифуркация двух торов Лиувилля в один при пересечении ветви бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , изображенной на рис. 2. Левый фрагмент соответствует верхней точке, средний — средней точке, правый — нижней точке

нужного нам типа. Отметим точки, в прообразе отображения момента для которых будем строить торы.

Далее получим торы при значениях постоянных интегралов, соответствующих точкам, отмеченным на рис. 4. В результате мы можем наблюдать перестройку типа  $C_2$  на серии изображений, представленных на рис. 5.

Стоит отметить, что, помимо наглядности представления результатов исследования пере-

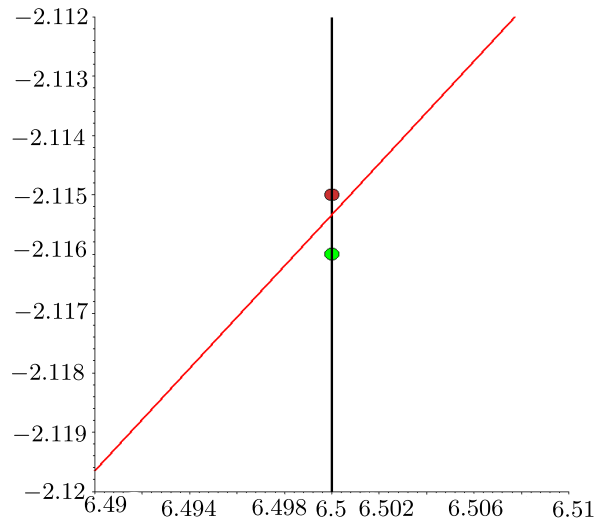


Рис. 4. Фрагмент бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , изображенной на рис. 1

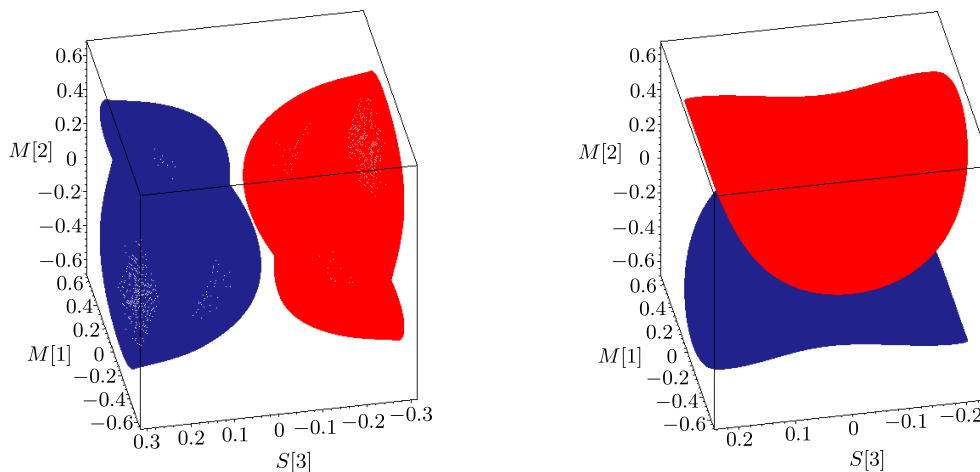


Рис. 5. Бифуркация двух торов Лиувилля в два при пересечении ветви бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , изображенной на рис. 4. Левый фрагмент соответствует верхней точке, правый — нижней точке.

строек торов Лиувилля, изложенный выше алгоритм обладает одним неоспоримым достоинством. В случае сложного строения совместной поверхности уровня первых интегралов, как в рассматриваемой проблеме с дополнительным интегралом четвертой степени, вышеуказанная методика позволяет в отсутствие явных аналитических выражений для параметризации инвариантных торов (как в ситуации разделенных переменных) получить информацию о строении торов (и главное — об их количестве), что дополняет классические методы исследования фазовой топологии. Обладая возможностью по координатам точки внутри камеры бифуркационной диаграммы получить сведения о количестве компонент связности инвариантных многообразий в прообразе отображения момента, мы получаем возможность дополнительной верификации типов бифуркаций в системе.

## § 5. Заключение

В настоящей работе представлен алгоритм построения связных компонент инвариантных многообразий интегрируемой гамильтоновой системы Адлера–ван Мёрбеке для заданных зна-

чений констант первых интегралов и функций Казимира. С помощью этого метода для бифуркационной диаграммы, приведенной в [25], проиллюстрированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

Авторы выражают благодарность за плодотворные обсуждения А. В. Борисову, И. С. Мамаеву, П. Е. Рябову.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler M., van Moerbeke P.A. A new geodesic flow on  $so(4)$  // Probability, statistical mechanics and number theory. Advances in mathematics supplementary studies. 1986. Vol. 9. P. 81–96.
2. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body // Communications in Mathematical Physics. 1986. Vol. 105. Issue 3. P. 461–472. DOI: [10.1007/BF01205938](https://doi.org/10.1007/BF01205938)
3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 19. Москва: МГУ, 1979. С. 3–94.
5. Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V. A new integrable case on  $so(4)$  // Doklady Physics. 2001. Vol. 46. Issue 12. P. 888–889. DOI: [10.1134/1.1433537](https://doi.org/10.1134/1.1433537)
6. Greenhill A.G. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1880. Vol. IV. P. 4–14.
7. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журнал Русского физико-химического общества, ч. физическая. 1885. Т. XVII. Отд. 1. № 6. С. 81–113.
8. Poincaré H. Sur la précession des corps déformables // Bulletin Astronomique, Serie I. 1910. Vol. XXVII. P. 321–356.
9. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 442 с.
10. Stekloff W. Sur la mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série. 1909. Vol. 1. P. 145–256.
11. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988. 413 с.
12. Adler M., van Moerbeke P., Vanhaecke P. Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. xii+484 p. DOI: [10.1007/978-3-662-05650-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05650-9)
13. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. 432 с.
14. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.
15. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
16. Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991. 320 с.
17. Audin M. Spinning tops. A course on integrable systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 148 p.
18. Браилов Ю.А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли // Математический сборник. 2003. Т. 194. № 11. С. 3–16. DOI: [10.4213/sm778](https://doi.org/10.4213/sm778)
19. Ryabov P.E. Algebraic curves and bifurcation diagrams of two integrable problems // Mekhanika Tverdogo Tela. 2007. № 37. P. 97–111.
20. Bolsinov A.V., Oshemkov A.A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. Vol. 14. No. 4–5. P. 431–454. DOI: [10.1134/S1560354709040029](https://doi.org/10.1134/S1560354709040029)
21. Коняев А.Ю. Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли // Математический сборник. 2010. Т. 201. № 9. С. 27–60. DOI: [10.4213/sm7715](https://doi.org/10.4213/sm7715)
22. Bolsinov A., Izosimov A. Singularities of bi-Hamiltonian systems // Communications in Mathematical Physics. 2014. Vol. 331. Issue 2. P. 507–543. DOI: [10.1007/s00220-014-2048-3](https://doi.org/10.1007/s00220-014-2048-3)
23. Ryabov P.E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostap // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 415–421. DOI: [10.1016/j.geomphys.2014.07.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.07.009)
24. Izosimov A. Singularities of integrable systems and algebraic curves // International Mathematics Research Notices. 2017. Vol. 2017. Issue 18. P. 5475–5524. DOI: [10.1093/imrn/rnw168](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw168)

25. Ryabov P.E., Oshemkov A.A., Sokolov S.V. The integrable case of Adler–van Moerbeke. Discriminant set and bifurcation diagram // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. Vol. 21. No. 5. P. 581–592. DOI: [10.1134/S1560354716050087](https://doi.org/10.1134/S1560354716050087)
26. Рябов П.Е., Бирючева Е.О. Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 4. С. 633–650. DOI: [10.20537/nd1604007](https://doi.org/10.20537/nd1604007)
27. Болсинов А.В., Борисов А.В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // *Математические заметки*. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 11–34. DOI: [10.4213/mzm400](https://doi.org/10.4213/mzm400)

Поступила в редакцию 04.12.2017

Соколов Сергей Викторович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4.  
E-mail: [sokolovsv72@mail.ru](mailto:sokolovsv72@mail.ru)

*S. V. Sokolov*

**The Adler–van Moerbeke integrable case. Visualization of bifurcations of Liouville tori**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. [532–539](#) (in Russian).

*Keywords:* integrable Hamiltonian systems, bifurcation diagram, bifurcations of Liouville tori.

MSC2010: 70E05, 70E17, 37J35

DOI: [10.20537/vm170404](https://doi.org/10.20537/vm170404)

In this paper we consider an integrable Hamiltonian system on the Lie algebra  $so(4)$  with an additional integral of the fourth degree — the Adler–van Moerbeke integrable case. We discuss classical works which explore, on the one hand, the dynamics of a rigid body with cavities completely filled with an ideal fluid performing a homogeneous vortex motion and, on the other hand, are devoted to the study of geodesic flows of left-invariant metrics on Lie groups. The equations of motion, the Hamiltonian function, Lie–Poisson brackets, Casimir functions and the phase space of the case under consideration are given. In previous papers, the investigation of the phase topology of the integrable Adler–van Moerbeke case was started: a spectral curve, a discriminant set and a bifurcation diagram of the moment map are explicitly shown, and characteristic exponents for determining the type of critical points of rank 0 and 1 of the moment map are presented. In this paper we present an algorithm for constructing Liouville tori. Examples are given of bifurcations of Liouville tori at the intersection of bifurcation curves for reconstructions of one torus into two tori and of two tori into two tori.

## REFERENCES

1. Adler M., van Moerbeke P.A. A new geodesic flow on  $so(4)$ , *Probability, statistical mechanics and number theory. Advances in mathematics supplementary studies*, 1986, vol. 9, pp. 81–96.
2. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body, *Communications in Mathematical Physics*, 1986, vol. 105, issue 3, pp. 461–472. DOI: [10.1007/BF01205938](https://doi.org/10.1007/BF01205938)
3. Miščenko A.S., Fomenko A.T. Euler equations on finite-dimensional Lie groups, *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 371–389. DOI: [10.1070/IM1978v012n02ABEH001859](https://doi.org/10.1070/IM1978v012n02ABEH001859)
4. Mishchenko A.S., Fomenko A.T. Integrability of Euler’s equations on semisimple Lie algebras, *Trudy Seminara po Vektornomu i Tenzornomu Analizu* (Proceedings of the workshop on vector and tensor analysis), vol. 19, Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1979, pp. 3–94 (in Russian).
5. Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V. A new integrable case on  $so(4)$ , *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, no. 12, pp. 888–889. DOI: [10.1134/1.1433537](https://doi.org/10.1134/1.1433537)
6. Greenhill A.G. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1880, vol. IV, pp. 4–14.

7. Zhukovsky N.E. On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous drop liquid, *Zhurnal russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva, chast' fizicheskaya*, 1885, vol. XVII, part 1, no. 6, pp. 81–113 (in Russian).
8. Poincaré H. Sur la précession des corps déformables, *Bulletin Astronomique, Serie I*, 1910, vol. XXVII, pp. 321–356.
9. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami, sodержashchimi zhidkost'* (Motion of a body with cavities filled with fluid), Moscow: Nauka, 1965, 442 p.
10. Stekloff W. Sur la mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, 1909, vol. 1, pp. 145–256.
11. Fomenko A.T. *Symplectic geometry*, Gordon and Breach Publishers, 1995, 484 p.
12. Adler M., van Moerbeke P., Vanhaecke P. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, xii+484 p. DOI: [10.1007/978-3-662-05650-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05650-9)
13. Kozlov V.V. *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996, xi+378 p. DOI: [10.1007/978-3-642-78393-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-78393-7)
14. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Sovremennye metody teorii integriruemyykh sistem* (Modern methods of integrable systems theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 296 p.
15. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela. Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos* (Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005, 576 p.
16. Bogoyavlenskii O.I. *Oprokidyvayushchiesya solitony. Nelineinye integriruemye uravneniya* (Overtuning solitons. Nonlinear integrable equations), Moscow: Nauka, 1991. 320 p.
17. Audin M. *Spinning tops. A course on integrable systems*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 148 p.
18. Brailov Yu.A. Geometry of translations of invariants on semisimple Lie algebras, *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 11, pp. 1585–1598. DOI: [10.1070/SM2003v194n11ABEH000778](https://doi.org/10.1070/SM2003v194n11ABEH000778)
19. Ryabov P.E. Algebraic curves and bifurcation diagrams of two integrable problems, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2007, no. 37, pp. 97–111 (in Russian).
20. Bolsinov A.V., Oshemkov A.A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2009, vol. 14, no. 4–5, pp. 431–454. DOI: [10.1134/S1560354709040029](https://doi.org/10.1134/S1560354709040029)
21. Konyaev A.Yu. Bifurcation diagram and the discriminant of a spectral curve of integrable systems on Lie algebras, *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, no. 9, pp. 1273–1305. DOI: [10.1070/SM2010v201n09ABEH004112](https://doi.org/10.1070/SM2010v201n09ABEH004112)
22. Bolsinov A., Izosimov A. Singularities of bi-Hamiltonian systems, *Communications in Mathematical Physics*, 2014, vol. 331, issue 2, pp. 507–543. DOI: [10.1007/s00220-014-2048-3](https://doi.org/10.1007/s00220-014-2048-3)
23. Ryabov P.E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat, *Journal of Geometry and Physics*, 2015, vol. 87, pp. 415–421. DOI: [10.1016/j.geomphys.2014.07.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.07.009)
24. Izosimov A. Singularities of integrable systems and algebraic curves, *International Mathematics Research Notices*, 2017, vol. 2017, issue 18, pp. 5475–5524. DOI: [10.1093/imrn/rnw168](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw168)
25. Ryabov P.E., Oshemkov A.A., Sokolov S.V. The integrable case of Adler–van Moerbeke. Discriminant set and bifurcation diagram, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 5, pp. 581–592. DOI: [10.1134/S1560354716050087](https://doi.org/10.1134/S1560354716050087)
26. Ryabov P.E., Biryucheva E.O. The discriminant set and bifurcation diagram of the integrable case of M. Adler and P. van Moerbeke, *Nelineinaya Dinamika*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 633–650 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1604007](https://doi.org/10.20537/nd1604007)
27. Bolsinov A.V., Borisov A.V. Compatible Poisson brackets on Lie algebras, *Mathematical Notes*, 2002, vol. 72, no. 1, pp. 10–30. DOI: [10.1023/A:1019856702638](https://doi.org/10.1023/A:1019856702638)

Received 04.12.2017

Sokolov Sergei Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Machines Science named after A. A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Malyy Khariton'evskiy per., 4, Moscow, 101990, Russia.

E-mail: [sokolovsv72@mail.ru](mailto:sokolovsv72@mail.ru)