МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 517.935, 517.938

© *Я. Ю. Ларина, Л. И. Родина*

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ[1]

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости и слабой асимптотической устойчивости заданного множества $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ относительно управляемой системы с импульсным воздействием в предположении, что функция $t \mapsto M(t)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа и для каждого $t \in [t_0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и замкнуто. Также получены условия, при которых для каждого решения $x(t,x_0)$ управляемой системы, выходящего из достаточно малой окрестности множества $M(t_0)$, найдется момент времени t^* такой, что точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит $\mathfrak{M}$ при всех $t \in [t^*,+\infty)$. Некоторые из представленных здесь утверждений являются аналогами результатов Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова для систем с импульсами, в других утверждениях существенно используется специфика импульсного воздействия. Результаты работы проиллюстрированы на примере модели «вредитель–биоагент» с импульсным управлением в предположении, что вбросы биоагентов (природных врагов данных вредителей) происходят в фиксированные моменты времени и количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, задается трофической функцией Холлинга. Получены условия асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\}$, где $x_1 = y_1/K$, y_1 — размер популяции вредителей, K — емкость среды.

Ключевые слова: управляемые системы с импульсным воздействием, функции Ляпунова, асимптотически устойчивые множества.

DOI: 10.20537/vm160404

Введение

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием описывают поведение изменяющихся во времени процессов различного характера, которые могут почти мгновенно переходить в другое состояние. К одному из важнейших направлений исследований в этой области относится теория устойчивости, в которой прямой метод Ляпунова является весьма эффективным средством изучения устойчивости решений [1–7].

Здесь представлено продолжение работ [8, 9], в которых рассматриваются условия положительной инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости заданного множества $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ относительно управляемой системы с импульсами. Получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости и слабой асимптотической устойчивости, сформулированные в терминах функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка и дополняющие результаты работ [8, 9]. Также получены условия, при которых для каждого решения $x(t,x_0)$ управляемой системы, выходящего из достаточно малой окрестности множества $M(t_0)$, найдется момент времени t^* такой, что точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит $\mathfrak{M}$ при всех $t \in [t^*,+\infty)$. Отметим, что некоторые из представленных здесь утверждений являются аналогами результатов Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова [10, 11] для систем с импульсами, в других утверждениях существенно используется специфика импульсного воздействия.

Результаты работы проиллюстрированы на примере модели биологического контроля популяции численности вредителей в предположении, что вбросы биоагентов (природных врагов данных вредителей) происходят в фиксированные моменты времени и количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, задается трофической функцией Холлинга типа II [12].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

§ 1. Основные определения

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, векторы w_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t = \tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функции $f(t, x, u)$ и $g(x, w)$ непрерывны для всех $(t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и всех $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ соответственно, решения системы (1.1) непрерывны справа. Относительно последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ полагаем, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$.

Определение 1. *Допустимым процессом управляемой системы* (1.1) назовем функцию

$$t \mapsto (u(t), w(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = (t_0, \tau_1) \cup (\tau_1, \tau_2) \cup \ldots$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) функция $w(t) = 0$ при $t \in I$ и $w(\tau_i) = w_i$, $w_i \in W$,

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = g(x, w_i); \ \ i = 1, 2, \ldots;$$

3) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

определено для всех $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ и $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) + g(x(\tau_i - 0), w_i)$ $i = 1, 2, \ldots;$

4) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$, где $U(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество и функция $(t, x) \mapsto U(t, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; предполагаем, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ множество $M(t)$ непусто и замкнуто. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\}, \quad \mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

Определение 2 (см. [10]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t, x)$ называется *определенно положительной* относительно множества $\mathfrak{M}$, если для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geqslant \delta$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}^\varepsilon$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,U(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$. Будем предполагать, что $F(t,x)$ непусто, ограниченно, замкнуто и выпукло. Поскольку функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху по (t,x), то функция $F(t,x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.2) существует (см. [13, с. 60]).

Условие 1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t,x_0)$ дифференциального включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0,x_0)=x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

Достаточные условия, при которых любое решение $\varphi(t,x_0)$ включения (1.2) определено при всех $t \geqslant t_0$, сформулированы в теореме 10.2 работы [14].

Определение 3 (см. [15, с. 17]). Для липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q=(1,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел:

$$V^o(t,x;p) \doteq \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)} \frac{V(t+\varepsilon,y+\varepsilon p)-V(t,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t,x) \doteq \inf\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$ и $V^o_{\max}(t,x) \doteq \sup\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$ называются соответственно *нижней* и *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

§ 2. Множества, положительно инвариантные и асимптотически устойчивые относительно систем с импульсным воздействием

Определение 4 (см. [11]). Множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ называется *положительно инвариантным* относительно управляемой системы (1.1), если для любого $x_0 \in M(t_0)$ каждое решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) с начальным условием $x(t_0,x_0)=x_0$ удовлетворяет включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Определение 5 (см. [11]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Ляпунову* относительно управляемой системы (1.1), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого решения $x(t,x_0)$ системы (1.1) из условия $x_0 \in N^\delta(t_0)$ следует, что $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Множество $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво* относительно системы (1.1), если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое число $r>0$, что для каждого решения $x(t,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющего условию $x_0 \in N^r(t_0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(x(t,x_0),M(t)\big)=0$.

Лемма 1 (см. [8]). *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0$ выполнено для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ и*

$$\max_{w\in W} V(\tau_i,x+g(x,w)) \leqslant V(\tau_i,x) \quad \textit{для всех } x \in M^r(\tau_i),\ i=1,2,\ldots,$$

то множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно относительно управляемой системы (1.1).

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову относительно системы (1.1).

Теорема 1 (см. [8]). *Предположим, что существует функция $V(t,x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0$ выполнено для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ и*

$$\max_{w\in W} V(\tau_i,x+g(x,w))-V(\tau_i,x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i,x)\big) \quad \textit{для всех } x \in N^r(\tau_i),\ i=1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$. Также предполагаем, что если $x \in M(\tau_i)$, то $x + g(x, w) \in M(\tau_i)$ для любого $w \in W$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно управляемой системы (1.1).

В следующей теореме получены другие достаточные условия асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Здесь предполагаются более сильные ограничения на верхнюю производную в силу дифференциального включения $V^o_{\max}(t, x)$, но ослабляется неравенство (2.1). Отметим, что подобное утверждение для систем без импульсного воздействия доказано в работе [11].

Теорема 2. *Пусть существуют функции $V(t, x)$ и $g(t, z)$ такие, что:*

1) *$V(t, x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$;*

2) *функция $g(t, z)$ локально липшицева по z, $g(t, 0) \equiv 0$ и тривиальное решение уравнения $\dot{z} = g(t, z)$ асимптотически устойчиво (в классическом смысле);*

3) *неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant g\bigl(t, V(t, x)\bigr)$ выполнено для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$;*

4) *$\max\limits_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant V(\tau_i, x)$ для всех $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Тогда множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно управляемой системы (1.1).

Доказательство. Пусть $x(t, x_0)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$. Функция $v(t)$ является липшицевой на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$, в силу леммы 3 работы [10]; тогда, по теореме Радемахера (см. [16, с. 234]), она дифференцируема при почти всех t. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнено следующее неравенство (см. [10]):

$$\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}\bigl(t, x(t, x_0)\bigr);$$

поэтому из $V^o_{\max}(t, x) \leqslant g\bigl(t, V(t, x)\bigr)$ получаем, что $\dot{v}(t) \leqslant g\bigl(t, v(t)\bigr)$ на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть $z(t)$ является решением уравнения $\dot{z} = g(t, z)$, удовлетворяющим начальному условию $z(t_0) = v(t_0)$, тогда $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1)$ по теореме С. А. Чаплыгина [17]. В силу условия 4 данной теоремы для любого $w \in W$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} v(\tau_i) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i, x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\bigr) \leqslant \\ \leqslant V\bigl(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, x_0)\bigr) = v(\tau_i - 0),\ i = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

поэтому $v(\tau_1) \leqslant v(\tau_1 - 0) \leqslant z(\tau_1 - 0) = z(\tau_1)$. Применяя далее теорему Чаплыгина на каждом из отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 2, 3, \ldots$, получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Доказательство устойчивости по Ляпунову множества $\mathfrak{M}$ аналогично доказательству теоремы 2 работы [11]. Докажем, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво. Пусть $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, тогда из неравенства $0 \leqslant v(t) \leqslant z(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\bigl(x(t, x_0), M(t)\bigr) = 0$. Предположим, что это не так, тогда существуют постоянная $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_i \to +\infty$ и $\varrho\bigl(x(t_i, x_0), M(t_i)\bigr) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_i, x(t_i, x_0)) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и, так как функция V определенно положительная, найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_i, x(t_i, x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. □

Теорема 3. *Предположим, что существуют $\alpha < 0$ и функция Ляпунова $V(t, x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant \alpha < 0$ выполнено для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ и*

$$\max_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i),\ i = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Тогда для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (1.1), *удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$, существует момент времени $t^* = t^*(x(t, x_0)) > t_0$ такой, что точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ при всех $t \in [t^*, +\infty)$.*

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t, x)$ определенно положительная, то множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно управляемой системы (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$ и покажем, что для каждой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ существует такой момент времени $t^* = t^*(x(t,x_0)) > t_0$, что $v(t) = 0$ при всех $t \geqslant t^*$. Так же, как при доказательстве теоремы 2, из неравенства $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ получаем, что $\dot v(t) \leqslant \alpha < 0$ на каждом интервале (τ_{i-1},τ_i), $i = 1,2,\ldots$ (до момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$).

В силу (2.2) для любого $w \in W$ выполнены соотношения

$$v(\tau_i) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i,x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i-0,x_0) + g(x(\tau_i-0,x_0),w)\bigr) \leqslant \\ \leqslant V\bigl(\tau_i, x(\tau_i-0,x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i-0, x(\tau_i-0,x_0)\bigr) = v(\tau_i-0),\ \ i=1,2,\ldots.$$

Так как $x_0 \in N^r(t_0)$, то, по определению функции Ляпунова, $v(t_0) = V(t_0,x_0) > 0$. Из неравенства $\dot v(t) \leqslant \alpha < 0$ следует, что $v(t) \leqslant \alpha(t-t_0) + v(t_0)$ для всех $t \in [t_0,\tau_1)$. Далее,

$$v(\tau_1) \leqslant v(\tau_1-0) \leqslant \alpha(\tau_1-t_0) + v(t_0),$$

$v(t) \leqslant \alpha(t-\tau_1) + v(\tau_1)$ для всех $t \in [\tau_1,\tau_2)$; поэтому $v(t) \leqslant \alpha(t-t_0) + v(t_0)$ для всех $t \in [t_0,\tau_2)$. Аналогично: $v(t) \leqslant \alpha(t-t_0) + v(t_0)$ для всех $t \geqslant t_0$, для которых $v(t) > 0$. Следовательно, $t^* \leqslant t_0 - \alpha^{-1}v(t_0)$ и $v(t) = 0$ при всех $t \geqslant t^*$. Это означает, что точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t^*$.

Если функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то в силу леммы 1 множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову относительно управляемой системы (1.1). Отсюда, с учетом доказанного выше, следует, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно управляемой системы (1.1). □

§ 3. Условия слабой асимптотической устойчивости множеств относительно систем с импульсами

Определение 6 (см. [11]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо положительно инвариантным* относительно управляемой системы (1.1), если для любой начальной точки $x_0 \in M(t_0)$ существует решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0$ и включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Определение 7 (см. [11]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо устойчивым по Ляпунову* относительно управляемой системы (1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^\delta(t_0)$ найдется решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \in [t_0,+\infty)$.

Множество $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво* относительно системы (1.1), если оно слабо устойчиво по Ляпунову и для некоторого $r > 0$ для любой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ найдется такое решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\bigl(x(t,x_0),M(t)\bigr) = 0$.

Лемма 2 (см. [9]). *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ имеет место неравенство $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и найдутся такие $\widehat w_i \in W$, что $V(\tau_i, x+g(x,\widehat w_i)) \leqslant V(\tau_i,x)$ для всех $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1,2,\ldots$, то множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно относительно системы* (1.1).

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову относительно системы (1.1).

Теорема 4 (см. [9]). *Предположим, что существует функция $V(t,x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и найдутся такие $\widehat w_i \in W$, что*

$$V(\tau_i, x+g(x,\widehat w_i)) - V(\tau_i,x) \leqslant -\psi\bigl(V(\tau_i,x)\bigr) \ \ \textit{для всех } x \in N^r(\tau_i),\ i=1,2,\ldots, \qquad (3.1)$$

где $\psi(s)$ — *непрерывная при* $s \geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Кроме того, предположим, что если* $x \in M(\tau_i)$, *то* $x + g(x, \widehat{w}_i) \in M(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (1.1).

Далее сформулированы другие достаточные условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Здесь предполагаются более сильные ограничения на нижнюю производную в силу дифференциального включения, но ослабляется неравенство (3.1).

Теорема 5. *Пусть существуют функции* $V(t,x)$ *и* $g(t,z)$ *такие, что:*

1) $V(t,x)$ — *определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция* $g(t,z)$ *локально липшицева по* z, $g(t,0) \equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* $\dot{z} = g(t,z)$ *асимптотически устойчиво (в классическом смысле)*;

3) *неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant g\big(t, V(t,x)\big)$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$;

4) *найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что* $V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i, x)$ *для всех* $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (1.1).

Доказательство. Для каждого $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$ определим множество

$$\widehat{U}(t,x) \doteq \begin{cases} u \in U(t,x) : V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant g\big(t, V(t,x)\big), & \text{если } (t,x) \in \mathfrak{N}^r, \\ U(t,x), \quad \text{если } (t,x) \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Множество $\widehat{U}(t,x)$ непусто в силу условия 3 теоремы и ограничено, так как $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$ при всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$. Замкнутость $\widehat{U}(t,x)$ доказана в лемме 1 работы [9]. Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}(t,x)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \quad \widehat{F}(t,x) = \overline{\text{co}}\, \widehat{H}(t,x), \tag{3.2}$$

где $\widehat{H}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, \widehat{U}(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$, $\overline{\text{co}}\, \widehat{H}(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\widehat{H}(t,x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее $\widehat{H}(t,x)$. Функции $(t,x) \mapsto \widehat{H}(t,x)$ и $(t,x) \mapsto \widehat{F}(t,x)$ полунепрерывны сверху по лемме 10.1 работы [14]. Тогда, в силу теоремы 2 работы [18, с. 213], существуют решения $\widehat{\varphi}_i(t, x_i)$ дифференциального включения (3.2), удовлетворяющие начальному условию $\widehat{\varphi}_i(\tau_i, x_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, то $\widehat{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$ также для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$. Следовательно, $\widehat{\varphi}_i(t, x_i)$ — решения дифференциального включения (3.2) являются решениями исходного дифференциального включения (1.2), и каждое из них, в силу условия 1 о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Пусть $\widehat{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют четвертому условию теоремы. Определим решение $x(t, x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in N^r(t_0)$, которое на $[t_0, \tau_1)$ совпадает с $\widehat{\varphi}_0(t, x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_i(t, x_i)$, где

$$x_i = \widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}) + g\big(\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}), \widehat{w}_i\big), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2. □

Доказательство следующего утверждения комбинирует доказательства теорем 3 и 5.

Теорема 6. *Предположим, что существуют* $\alpha < 0$ *и функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i), \ i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для каждой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ *существует решение* $x(t, x_0)$ *системы* (1.1), *для которого найдется момент времени* $t^* = t^*(x(t, x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t, x_0))$ *принадлежит* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (1.1).

§ 4. Асимптотически устойчивые множества в модели биологического контроля популяции численности вредителей

4.1. Описание модели биологического контроля популяции

Рассматривается задача о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля [19, с. 157]. Пусть $y_1(s)$ характеризует размер популяции вредителей в момент времени s, $y_2(s)$ — численность биоагентов (природных врагов рассматриваемых вредителей) в момент s. С учетом влияния биоагентов на популяцию вредителей, динамика популяции вредителей и биоагентов описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \ell y_1 \left(1 - \dfrac{y_1}{K}\right) - L(y_1)y_2, \\ \dot{y_2} = kL(y_1)y_2 - \mu y_2, \end{cases}$$

где ℓ — естественный темп прироста популяции вредителей при отсутствии внутривидовой конкуренции, K — емкость среды, то есть некоторое стабильное значение числа особей, способных обитать на одной единице территории, $L(y_1)$ — трофическая функция, которая характеризует количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, причем k-я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная энергия тратится на поддержание основного обмена, μ — коэффициент естественной смертности биоагентов. Предполагаем, что функция $L(y_1)$ является трофической функцией Холлинга типа II [12], то есть

$$L(y_1) = \frac{cy_1}{1 + cdy_1},$$

где c — коэффициент эффективности поиска вредителей биоагентом, количественно характеризующий интенсивность его атак, d — величина, обратная максимальному индивидуальному рациону. Все указанные выше коэффициенты положительные.

Иногда для достижения результата биоконтроля требуются дополнительные вбросы биоагентов в определенные моменты времени $s_i = ip$, $p > 0$, $i = 1, 2, \ldots$. В этом случае математическая модель дополнится соотношением, отражающим скачкообразное увеличение численности биоагентов:

$$y_2(s_i) = y_2(s_i-) + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где коэффициент управления γ_i равен количеству биоагентов, распространяемых в момент s_i. Предполагаем, что $s_0 = 0$, $y_2(0) \geqslant \gamma_-$ и $\gamma_i \in [\gamma_-, \gamma_+]$, где $0 < \gamma_- < \gamma_+$, $i = 1, 2, \ldots$.

Избавимся от некоторых параметров в модели и произведем замену переменных:

$$t = \ell s, \quad x_1 = \frac{y_1}{K}, \quad x_2 = \frac{y_2}{kK}, \quad a = \frac{ckK}{\ell}, \quad b = \frac{\ell d}{k}, \quad m = \frac{\mu}{\ell}.$$

Получаем новую систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1 - x_1) - \dfrac{ax_1x_2}{1 + abx_1}, \\ \dot{x_2} = \dfrac{ax_1x_2}{1 + abx_1} - mx_2, \quad t \neq \tau_i, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_2(\tau_i) = x_2(\tau_i-) + w_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Здесь $\tau_i = ih$, $h = \ell p$, $w_i = \dfrac{\gamma_i}{kK}$ — показатели управления, $w_i \in W = [w_-, w_+]$, где $w_- = \dfrac{\gamma_-}{kK}$, $w_+ = \dfrac{\gamma_+}{kK}$, $0 < w_- < w_+$, $i = 1, 2, \ldots$. Отметим, что $x_2(\tau_0) = \dfrac{y_2(s_0)}{kK} \geqslant w_-$, где $\tau_0 = s_0 = 0$.

4.2. Свойства решений системы (4.1), (4.2)

Лемма 3. *Имеют место следующие свойства:*

1) *решения системы* (4.1), (4.2) *неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, и если* $x_2(0) \geqslant w_-$, *то* $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mh}$ *для всех* $t \geqslant 0$;

2) *решения системы* (4.1), (4.2) *определены при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Для того чтобы решения системы (4.1) (без импульсного воздействия) были неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, необходимо и достаточно, чтобы функции

$$f_1(t,x_1,x_2) = x_1(1-x_1) - \frac{ax_1x_2}{1+abx_1}, \quad f_2(t,x_1,x_2) = \frac{ax_1x_2}{1+abx_1} - mx_2$$

удовлетворяли *условию квазиположительности* (см. [20, с. 34]): $f_1(t,0,x_2) \geqslant 0$ для всех $x_2 \geqslant 0$ и $f_2(t,x_1,0) \geqslant 0$ для всех $x_1 \geqslant 0$. Так как $f_1(t,0,x_2) \equiv 0$, $f_2(t,x_1,0) \equiv 0$, условие квазиположительности выполнено. Поэтому $x_i(t) \geqslant 0$ при всех $t \in [0,h)$ для любых $x_i(0) \geqslant 0$, $i=1,2$. Далее, $x_1(h) = x_1(h-0)$, $x_2(h) = x_2(h-0) + w_1$, $w_1 > 0$, поэтому $x_i(h) \geqslant 0$, $i=1,2$. Для следующих промежутков $[ih,(i+1)h)$, $i=1,2,\ldots$, рассуждения аналогичны.

Пусть $x_2(0) \geqslant w_-$. Из второго уравнения системы (4.1) получаем, что $\dot{x_2} \geqslant -mx_2$ для всех $t \geqslant 0, t \neq \tau_i$. Следовательно, в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [17] $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mt}$ для всех $t \in [\tau_0,\tau_1) = [0,h)$; тогда $x_2(h) \geqslant w_- e^{-mh} + w_- > w_-$. Применяя теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1}) = [ih,(i+1)h)$, $i=1,2,\ldots$, и учитывая, что $x_2(\tau_i) = x_2(\tau_i - 0) + w_- > w_-$, получаем, что $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mh}$ для всех $t \geqslant 0$.

Докажем, что решения системы (4.1) определены при всех $t \geqslant 0$. Для этого достаточно показать [14, с. 62], что существуют функции $V(x)$ и $\beta(z)$ такие, что:

1) $V(x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно некоторого множества $\mathfrak{M}_0 = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times M\big\}$, где $M \subset \mathbb{R}^2$ — непусто и компактно;

2) функция $\beta(z)$ непрерывна и $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \dfrac{|\beta(z)|}{|z|} < \infty$;

3) неравенство $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \beta(V(x))$ выполнено для всех $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \varrho > 0$.

Напомним, что функция Ляпунова $V(x)$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x) = +\infty$. Поскольку решения системы (4.1) неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, неравенство $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \beta(V(x))$ достаточно проверить для всех

$$x \in \mathbb{R}^2_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\},$$

для которых $\|x\| > \varrho > 0$. Функциями, удовлетворяющими всем перечисленным выше условиям, являются, например, функции $V(x) = x_1 + x_2$, $x \in \mathbb{R}^2_+$ и $\beta(z) = z$, так как неравенство

$$V^o_{\max}(t,x) = V^o(x_1,x_2) = x_1 - x_1^2 - mx_2 \leqslant x_1 + x_2 = \beta(V(x))$$

справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^2_+$ и функция $V(x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}_0 = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \{(0,0)\}\big\}$. Таким образом, решения системы (4.1) определены при всех $t \geqslant 0$, поэтому решения системы (4.1), (4.2) также определены при всех $t \geqslant 0$. □

4.3. Асимптотически устойчивые множества в модели (4.1), (4.2)

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\big\}$, где $C_1 > 0$. Функция

$$V(t,x_1,x_2) = V(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \leqslant C_1, \\ x_1 - C_1, & \text{если } x_1 > C_1, \end{cases}$$

является функцией Ляпунова относительно данного множества. Заметим, что для этой функции для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и всех $w \in W$ справедливо равенство

$$V(\tau_i, x + g(x,w)) = V(\tau_i, x_1, x_2 + w_i) = V(\tau_i, x_1, x_2) = V(\tau_i, x), \ \ i = 1,2,\ldots,$$

поэтому условие (2.2) выполнено.

Производная функции V в силу системы (4.1) при $x_1 > C_1$ равна

$$V^o(x_1,x_2) = x_1(1-x_1) - \frac{ax_1x_2}{1+abx_1} = \frac{x_1(g(x_1)-ax_2)}{1+abx_1},$$

где $g(x_1) = -abx_1^2 + abx_1 - x_1 + 1$. Поскольку $x_2(t) \geqslant C_2 = w_- e^{-mh}$ для всех $t \geqslant 0$, достаточно оценить $V^o(x_1,x_2)$ при $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Рассмотрим два случая, в первом из которых предположим, что $ab \leqslant 1$. Отметим, что функция $g(x_1)$ достигает наибольшего значения при $x_1^* = \dfrac{ab-1}{2ab} \leqslant 0$ и убывает при $x_1 > x_1^*$. Поэтому если $C_2 > a^{-1}$, то

$$g(x_1) - ax_2 < g(C_1) - aC_2 < g(C_1) - 1 < g(0) - 1 = 0$$

при $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$. Далее, функция $\dfrac{x_1}{1+abx_1}$ возрастает при $x_1 > C_1$, поэтому

$$V^o_{\max}(t,x) = V^o(x_1,x_2) = \frac{x_1(g(x_1)-ax_2)}{1+abx_1} < \frac{C_1\big(g(C_1)-1\big)}{1+abC_1} < 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Пусть $C_2 \leqslant a^{-1}$. Тогда уравнение $g(x_1) = aC_2$ имеет решения

$$x_1^- = \frac{ab-1-\sqrt{D}}{2ab}, \quad x_1^+ = \frac{ab-1+\sqrt{D}}{2ab}, \text{ где } D = (ab+1)^2 - 4a^2bC_2,\ C_2 = w_- e^{-mh}, \tag{4.3}$$

причем $x_1^- \leqslant 0$, $x_1^+ \geqslant 0$. Следовательно, если $C_1 > x_1^+$, то $g(C_1) - aC_2 < 0$; поэтому, учитывая неравенство $g(x_1) - ax_2 < g(C_1) - aC_2$, получаем

$$V^o_{\max}(t,x) = \frac{x_1(g(x_1)-ax_2)}{1+abx_1} < \frac{C_1\big(g(C_1)-aC_2\big)}{1+abC_1} < 0 \tag{4.4}$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$, где $C_1 > x_1^+$.

Рассмотрим второй случай, когда $ab > 1$. Функция $g(x_1)$ достигает наибольшего значения $\dfrac{(ab+1)^2}{4ab}$ при $x_1^* = \dfrac{ab-1}{2ab} > 0$. Пусть $C_2 > \dfrac{(1+ab)^2}{4a^2b}$, тогда

$$V^o_{\max}(t,x) < \frac{C_1}{1+abC_1}\Big(\frac{(ab+1)^2}{4ab} - aC_2\Big) < 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Если $C_2 \in \Big(\dfrac{1}{a}, \dfrac{(1+ab)^2}{4a^2b}\Big]$, то $0 < x_1^- < x_1^+$. Возьмем $C_1 < x_1^-$; тогда для всех $t \geqslant 0$, $x_1 \in \Big(C_1, \dfrac{x_1^- + C_1}{2}\Big)$, $x_2 \geqslant C_2$ выполнено неравенство

$$V^o_{\max}(t,x) < \frac{C_1}{1+abC_1}\Big(g\Big(\frac{x_1^-+C_1}{2}\Big) - aC_2\Big) < \frac{C_1(g(x_1^-)-aC_2)}{1+abC_1} = 0.$$

Если $C_1 > x_1^+$, то справедлива оценка (4.4). Далее, если $C_2 \leqslant a^{-1}$, здесь также получаем оценку (4.4), которая верна для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$, где $C_1 > x_1^+$.

Таким образом, функция $V(x_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Итогом проделанных вычислений является следующее утверждение об асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\big\}$, где $C_1 > 0$. Здесь x_1^-, x_1^+ задаются равенством (4.3).

Утверждение 1. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $ab \leqslant 1$ *и* $w_- > a^{-1}e^{mh}$;

2) $ab > 1$ *и* $w_- > \dfrac{(1+ab)^2 e^{mh}}{4a^2 b}$;

3) $ab > 1$, $w_- \in \left(a^{-1}e^{mh}, \dfrac{(1+ab)^2 e^{mh}}{4a^2 b}\right]$, $(C_1 < x_1^-$ *и* $x_1(0) < x_1^-)$ *или* $C_1 > x_1^+$;

4) $w_- \leqslant a^{-1}e^{mh}$, $C_1 > x_1^+$.

Тогда для каждого решения $x(t, x_0)$ *системы* (4.1), (4.2)*, удовлетворяющего начальному условию* $x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in N^r(0) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \in (C_1, C_1 + r]\}$*, существует момент времени* $t^* = t^*(x(t, x_0)) > 0$ *такой, что точка* $(t, x(t, x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \geqslant t^*$. *Множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно данной системы.*

Как следует из утверждения 1, при указанных ограничениях на w_- и C_1 доля вредителей x_1 будет уменьшена до величины C_1 и найдется такой момент времени $t^* = t^*(x(t, x_0)) > 0$, что неравенство $x_1(t) \leqslant C_1$ выполнено при всех $t \geqslant t^*$.

Утверждение 2. *Если* $w_- > a^{-1}e^{mh}$, *то множества*

$$\mathfrak{M}_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 = 0\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 \leqslant x_1^+\}$$

асимптотически устойчивы относительно управляемой системы (4.1), (4.2).

Доказательство. Функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}_1$ является функция $V(t, x) = V(x_1) = x_1$. Если $w_- > a^{-1}e^{mh}$, то есть $C_2 > a^{-1}$, то $g(0) - aC_2 = 1 - aC_2 < 0$, поэтому существуют такие $r > 0$ и $\alpha < 0$, что $g(x_1) - aC_2 < \alpha < 0$ для всех $x_1 \in [0, r]$. Следовательно,

$$g(x_1) - ax_2 \leqslant g(x_1) - aC_2 < \alpha < 0,$$

$$V^o_{\max}(t, x) = \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1 + abx_1} \leqslant \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1 + abr} \leqslant \frac{\alpha x_1}{1 + abr} = \frac{\alpha}{1 + abr} V(t, x)$$

для всех $x_1 \in [0, r]$, $x_2 \geqslant C_2$. Несложно проверить, что для функций $V(t, x)$ и $g(t, z) = \dfrac{\alpha}{1 + abr} z$ выполнены все условия теоремы 2, поэтому множество $\mathfrak{M}_1$ асимптотически устойчиво.

Для доказательства асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}_2$ рассмотрим функцию Ляпунова относительно этого множества:

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \leqslant x_1^+, \\ x_1 - x_1^+, & \text{если } x_1 > x_1^+. \end{cases}$$

Если $w_- > a^{-1}e^{mh}$, то $x_1^+ > 0$. Оценим верхнюю производную функции V при $x_1 > x_1^+$, $x_2 \geqslant w_- e^{-mh}$:

$$V^o_{\max}(t, x) = \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1 + abx_1} \leqslant \frac{x_1^+(g(x_1) - aw_- e^{-mh})}{1 + abx_1^+} =$$
$$= -\frac{abx_1^+}{1 + abx_1^+}(x_1 - x_1^+)(x_1 - x_1^-) < -\frac{x_1^+\sqrt{D}}{1 + abx_1^+} V(x_1).$$

Следовательно, множество $\mathfrak{M}_2$ асимптотически устойчиво в силу теоремы 2. □

Авторы выражают благодарность Ольге Николаевне Самсонюк за обсуждение работы на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.
2. Bainov D.D., Simeonov P.S. Systems with impulse effect: stability, theory and applications. N. Y.: Halsted Press, 1989. 255 p.
3. Перестюк Н.А., Плотников В.И., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. 428 с.
4. Игнатьев А.О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Математический сборник. 2003. Т. 194. № 10. С. 117–132. DOI: 10.4213/sm776
5. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Математические заметки. 2004. Т. 76. Вып. 1. С. 44–51. DOI: 10.4213/mzm89
6. Perestyuk N.A., Chernikova O.S. On the stability of invariant sets of discontinuous dynamical systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2001. Vol. 53. Issue 1. P. 91–98. DOI: 10.1023/A:1010492901900
7. Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 3–10.
8. Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 51–59. DOI: 10.20537/vm150106
9. Ларина Я.Ю. О слабой асимптотической устойчивости управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 68–78. DOI: 10.20537/vm160106
10. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
11. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
12. Holling C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly // The Canadian Entomologist. 1959. Vol. 91. No. 5. P. 293–320. DOI: 10.4039/Ent91293-5
13. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
14. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
15. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
16. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.
17. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.
18. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
19. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 232 с.
20. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007. 324 с.

Поступила в редакцию 29.09.2016

Ларина Яна Юрьевна, ассистент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: yana_larina89@mail.ru

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: LRodina67@mail.ru

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

Ya. Yu. Larina, L. I. Rodina

Asymptotically stable sets of control systems with impulse actions

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 490–502 (in Russian).

Keywords: control systems with impulse actions, Lyapunov functions, asymptotically stable sets.

MSC2010: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

DOI: 10.20537/vm160404

We get sufficient conditions for asymptotic stability and weak asymptotic stability of a given set $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ with respect to the control system with impulse actions. We assume that the function $t \mapsto M(t)$ is continuous in the Hausdorff metric and for each $t \in [t_0,+\infty)$ the set $M(t)$ is nonempty and closed. Also, we obtain conditions under which for every solution $x(t,x_0)$ of the control system that leaves a sufficiently small neighborhood of the set $M(t_0)$ there exists an instant t^* such that point $(t,x(t,x_0))$ belongs to $\mathfrak{M}$ for all $t \in [t^*,+\infty)$. Some of the statements presented here are analogues of the results obtained by E.A. Panasenko and E.L.Tonkov for systems with impulses, and in other statements the specificity of impulse actions is essentially used. The results of this paper are illustrated by the "pest–bioagents" model with impulse control and we assume that the addition of bioagents (natural enemies of the given pests) occur at fixed instants of time and the number of pests consumed on average by one biological agent per unit time is given by the trophic Holling function. We obtain conditions for asymptotic stability of the set $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\big\}$, where $x_1 = y_1/K$, y_1 is the size of the population of pests and K is the capacity of environment.

REFERENCES

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nye uravneniya s impul'snym vozdeistviem* (Impulsive differential equations), Kiev: Vishcha shkola, 1987, 288 p.
2. Bainov D.D., Simeonov P.S. *Systems with impulse effect: stability, theory and applications*, N. Y.: Halsted Press, 1989, 255 p.
3. Perestyuk N.A., Plotnikov V.I., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. *Impul'snye differentsial'nye uravneniya s mnogoznachnoi i razryvnoi pravoi chast'yu* (Impulsive differential equations with multivalued and discontinuous right hand side), Kiev: Institut of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, 2007, 428 p.
4. Ignat'ev A.O. Method of Lyapunov functions in problems of stability of solutions of systems of differential equations with impulse action, *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 10, pp. 1543–1558. DOI: 10.1070/SM2003v194n10ABEH000776
5. Gladilina R.I., Ignat'ev A.O. On the stability of periodic impulsive systems, *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, issue 1, pp. 41–47. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036740.50477.42
6. Perestyuk N.A., Chernikova O.S. On the stability of invariant sets of discontinuous dynamical systems, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2001, vol. 53, issue 1, pp. 91–98. DOI: 10.1023/A:1010492901900
7. Anashkin O.V., Dovzhik T.V., Mit'ko O.V. Stability of solutions of differential equations in the availability of impulse actions, *Dinamicheskie Sistemy*, 2010, issue 28, pp. 3–10 (in Russian).
8. Larina Ya.Yu. Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 51–59 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150106
9. Larina Ya.Yu. Weak asymptotic stability of control systems with impulsive actions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 68–78 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160106
10. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, issue 1, pp. 194–212. DOI: 10.1134/S0081543808030164
11. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221. DOI: 10.1134/S0081543810050159
12. Holling C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly, *The Canadian Entomologist*, 1959, vol. 91, no. 5, pp. 293–320. DOI: 10.4039/Ent91293-5

13. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Moscow: Nauka, 1985, 223 p.
14. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, issue 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).
15. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.
16. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* (Geometric theory of measure), Moscow: Nauka, 1987, 761 p.
17. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii* (A new method of approximate integration of differential equations), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 102 p.
18. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1986, vol. 169, pp. 199–259.
19. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on mathematical models in biology. Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 232 p.
20. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modeling of processes of selection), Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State University, 2007, 324 p.

Received 29.09.2016

Larina Yana Yur'evna, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: yana_larina89@mail.ru

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru