УДК 514.74

© *В. Н. Ушаков, А. А. Успенский*

α-МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВОЙСТВА[1]

Приводится понятие α-множества в конечномерном евклидовом пространстве, являющееся одним из обобщений понятия выпуклого множества. Возникновение этого понятия связано с изучением свойств множеств достижимости нелинейных управляемых систем. В работе определяется числовая характеристика степени невыпуклости множества, на основе которой осуществляется классификация множеств. Вводятся в рассмотрение аналоги базовых понятий из выпуклого анализа и изучаются их свойства. Формулируются и доказываются утверждения в духе таких теорем из выпуклого анализа, как теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству и теоремы об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве. Изучается понятие мажорируемости невыпуклых множеств. Свойство мажорируемости является достаточным условием для представления замкнутого невыпуклого множества в виде пересечения полупространств в смысле введенных в работе определений. Полученные результаты теории отделимости невыпуклых множеств распространяются на случай подграфиков и надграфиков скалярных функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Ключевые слова: выпуклое множество, выпуклая оболочка, α-множество, α-гиперплоскость, α-отделимость.

DOI: 10.20537/vm160109

Введение

В настоящей работе приводится понятие α-множества в конечномерном евклидовом пространстве как некоторое обобщение понятия выпуклого множества. Оно было введено в начале 2000-х годов в [1], сформировалось при рассмотрении некоторых задач управления, относящихся к изучению множеств достижимости управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах. Множества достижимости таких систем, как правило, невыпуклы. Для одних систем эти множества мало отличаются от выпуклых, для других отличие от выпуклых множеств весьма ощутимо. В связи с этим возникла естественная потребность в наведении определенной классификации этих множеств по степени их невыпуклости. Так появилось понятие α-множества в $\mathbb{R}^n$. Возникло также намерение распространить некоторые базовые конструкции и утверждения выпуклого анализа на α-множества в $\mathbb{R}^n$. Для нас представляет самостоятельный интерес, не связанный с какими-либо задачами управления, вопрос о том, насколько можно продвинуться в распространении теорем выпуклого анализа при переходе от выпуклых множеств к α-множествам.

В работе введено несколько полезных, на наш взгляд, понятий и, в частности, понятие регулярного множества в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, приводятся понятия α-гиперплоскости и опорной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, формулируются и обосновываются некоторые утверждения об α-отделимости α-множеств. Приводятся примеры, иллюстрирующие введенные понятия. Работа является продолжением работы [1].

§ 1. Основные определения и понятия теории α-множеств

Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку в A.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14–01–00486_а).

Полагаем:
$\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\}$ — множество всех проекций $p(z^*)$ точки z^* на A;
$\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_A(z^*)$;
$\mathrm{con}(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(z - z^*) : \lambda \geqslant 0,\ z \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество $\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)\}$;
$H_A(z^*)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из $\mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*)$;
$(h_*\hat{,} h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^*\rangle}{\|h_*\|\|h^*\|} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*, $(h_*, h^*) \in H_A(z^*)$;
$\alpha_A(z^*) = \max\limits_{(h_*,h^*)\in H_A(z^*)} (h_*\hat{,} h^*) \in [0, \pi]$;
$\langle h_*, h^*\rangle$ — скалярное произведение h_* и h^* из $\mathbb{R}^n$, $\|h_*\| = \langle h_*, h^*\rangle^{1/2}$.

Полагаем $\alpha = \alpha_A = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^n\setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Определение 1. Множество A назовем *α-множеством* в $\mathbb{R}^n$.

Отметим некоторые свойства функции $\alpha_A(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Свойство 1. *Функция $\alpha_A(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$, не является, вообще говоря, непрерывной функцией.*

Действительно, рассмотрим компакт $A = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant \|z\| \leqslant 2\}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $z^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\Omega_A(z^*) = \{z \in \mathbb{R} : \|z\| = 1\}$, $\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^* = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leqslant 1\}$, $\mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*) = \mathbb{R}^2$ и, значит, $\alpha_A(z^*) = \pi$. В то же время $\alpha_A(z^*) = 0$ для всех $z^* \neq \mathbf{0}$, $\|z^*\| < 1$.

Свойство 2. *Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$, полунепрерывна сверху.*

Действительно, возьмем произвольную точку $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Пусть $\{z^{(k)}\}$ — последовательность точек $z^{(k)}$, $z^{(k)} \neq z^*$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к z^*. Отображение $z \mapsto \Omega_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$, полунепрерывно сверху по включению и, следовательно, отображение $z \mapsto \mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z) - z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$, полунепрерывно сверху по включению.

Пусть $(h_*^{(k)}, h^{*(k)})$ — те пары из $H_A(z^{(k)})$, на которых достигается

$$\alpha_A(z^{(k)}) = \max_{(h_*,h^*)\in H_A(z^{(k)})} (h_*\hat{,} h^*).$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\|h_*^{(k)}\| = 1$, $\|h_*^{(k)}\| = 1$ и существуют пределы $h_0 = \lim\limits_{k\to\infty} h_*^{(k)}$, $h^0 = \lim\limits_{k\to\infty} h^{*(k)}$. В силу полунепрерывности сверху отображения $z \mapsto \Omega_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$, векторы h_0 и h^0 содержатся в $\mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*)$, и, значит,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_A(z^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} (h_*^{(k)}\hat{,} h^{*(k)}) = (h_0\hat{,} h^0) \leqslant \sup_{(h_*,h^*)\in H_A(z^*)} (h_*\hat{,} h^*) = \alpha_A(z^*).$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_A(z^{(k)}) \leqslant \alpha_A(z^*)$ для любой последовательности $z^{(k)}, z^{(k)} \in \mathbb{R}^n \setminus A$, $z^{(k)} \neq z^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} z^{(k)} = z^*$. Свойство 2 доказано. □

Возникает естественный вопрос о том, достигается ли sup в равенстве $\alpha = \alpha_A = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^n\setminus A} \alpha_A(z^*)$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример 1. Пусть множество A из $\mathbb{R}^2$ представимо в виде $A = K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3$, где K_1 и K_2 — полукруги единичного радиуса, а K_3 — четверть круга радиуса 2 (см. рис. 1).

Рассмотрим последовательность $\{z^{(k)}\}$ точек $z^{(k)} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, принадлежащих диагонали 1-го квадранта плоскости $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{k\mapsto\infty} z^{(k)} = \mathbf{0}$. Имеет место

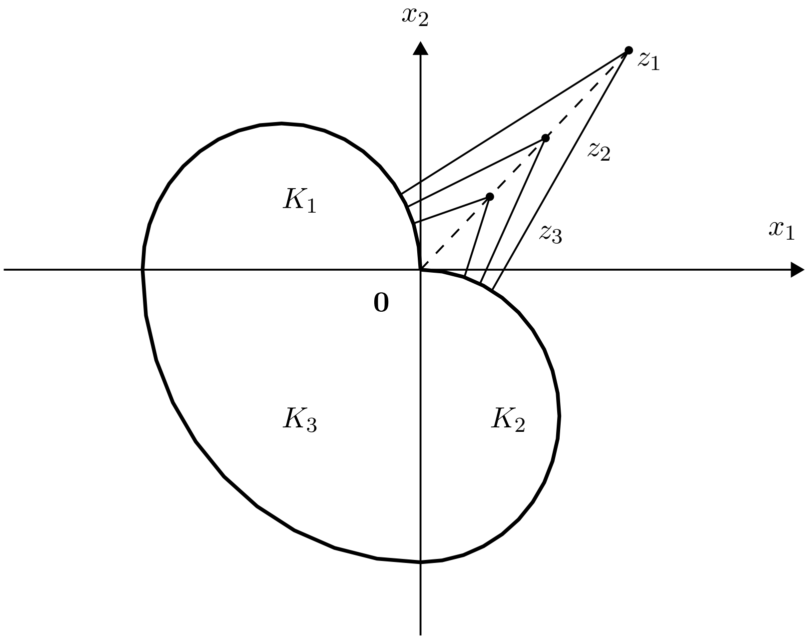

Рис. 1.

$\lim\limits_{k\mapsto\infty} \alpha_A(z^{(k)}) = \dfrac{\pi}{2}$. Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае $\alpha_A = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*) = \lim\limits_{k\mapsto\infty} \alpha_A(z^{(k)}) = \dfrac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_A(z^*) < \dfrac{\pi}{2}$ для любого $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

С другой стороны, имеется много примеров множеств A в $\mathbb{R}^2$ с числом $\alpha = \alpha_A = \dfrac{\pi}{2}$, в которых $\sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*)$ достигается на $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Пример 2. Пусть $A = \{(x_1, x_2) : -4\pi < x_1 < 4\pi,\ x_2 = \sin x_1\}$ (см. рис. 2). В этом примере $\alpha_A(z^0) = \dfrac{\pi}{2} = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*)$, $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Возникает вопрос о достаточно общих достаточных условиях, обеспечивающих достижимость $\sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*)$ на $\mathbb{R}^n \setminus A$. Относительно этого вопроса выскажем следующие соображения:

1. Пусть компактное множество A из $\mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу ∂A в $\mathbb{R}^n$ (определение гладкости см., например, в [2]). Тогда $\sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*)$ достигается на $\mathbb{R}^n \setminus A$.

2. Пусть A — не обязательно выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^2\setminus A} \alpha_A(z^*)$ достигается на $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Если для некоторого замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет место $\alpha = \alpha_A = 0$, то для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется $\alpha_A(z^*) = 0$, то есть $\Omega_A(z^*)$ состоит из одной точки $\pi(z^*)$. Известно (см. [3]), что в этом случае A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Имеет место также обратное утверждение: «Если A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\alpha_A(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$, и, значит, $\alpha = \alpha_A = 0$».

Итак, выпуклые замкнутые множества A в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{0}$-множества в $\mathbb{R}^n$ — это эквивалентные понятия.

Число $\alpha = \alpha_A$ можно трактовать как степень вогнутости множества A. Так, у замкнутых выпуклых множеств A в $\mathbb{R}^n$ эта степень равна 0.

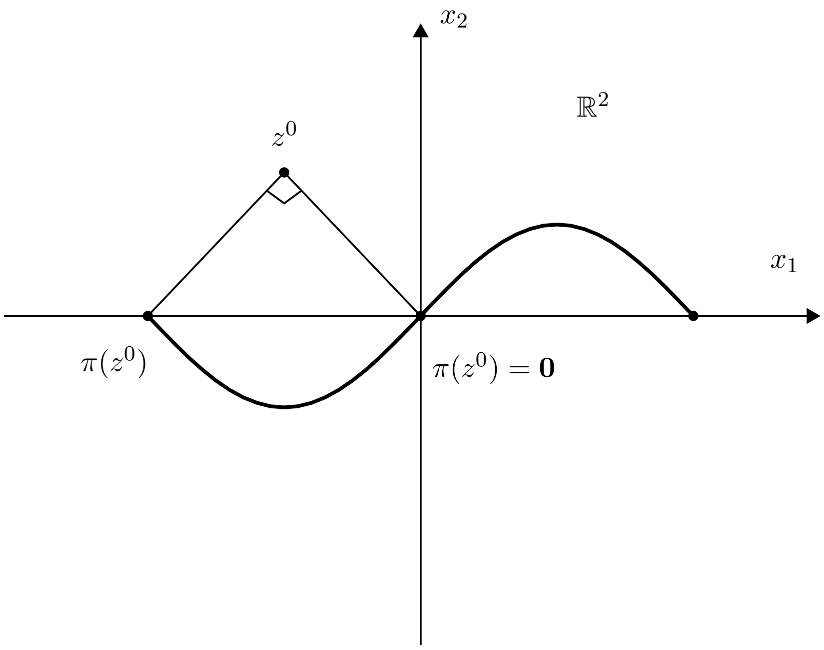

Рис. 2.

Допустим теперь, что для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено условие

$$z^* \notin \mathrm{co}\, \Omega_A(z^*). \tag{1.1}$$

Тогда существует гиперплоскость $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s, x\rangle = \gamma\}$ $(s \in \mathbb{R}^n, s \neq \mathbf{0}, \gamma \in \mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^n$, строго разделяющая множества $\{z^*\}$ и $\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)$: $\langle s, z^*\rangle < \min\limits_{w \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)} \langle s, w\rangle$. Отсюда следует, что для любой точки $w \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)$ верно $\langle s, x\rangle < \langle s, w\rangle$. Значит, для любого вектора $w - z^* \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*$ выполняется $\langle s, w - z^*\rangle > 0$ и, следовательно, $\cos(s,\hat{} w - z^*) > 0$. Это означает, что верно неравенство $\min\limits_{h \in \mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*)} \cos\,(s,\hat{}h) > 0$, которое эквивалентно неравенству

$$\max_{h \in \mathrm{con}\,(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*)} (s,\hat{}h) < \frac{\pi}{2}. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует

$$\alpha_A(z^*) = \max_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} (h_*,\hat{}h^*) < \pi. \tag{1.3}$$

Справедливо также следующее утверждение: «Если для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется (1.3), то выполняется (1.1)». Вместе с тем установлена эквивалентность соотношений (1.1) и (1.3).

Определение 2. Замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ назовем *регулярным множеством* в $\mathbb{R}^n$, если для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется (1.1).

Из предыдущих рассуждений следует, что если A — регулярное множество, то $\alpha_A(z^*) < \pi$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. При этом относительно $\alpha = \alpha_A$ возможен один из двух вариантов: 1. $\alpha = \alpha_A < \pi$; 2. $\alpha = \alpha_A = \pi$, причем $\alpha_A(z^*) < \pi$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Таким образом, регулярные множества в $\mathbb{R}^n$ — это или α-множества A с числом $\alpha = \alpha_A < \pi$, или π-множества, такие, что $\alpha_A(z^*) < \pi$ для всех $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Определение 3. Замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ назовем *нерегулярным множеством* в $\mathbb{R}^n$, если оно не является регулярным множеством в $\mathbb{R}^n$, т. е. если $\alpha_A(z^*) = \pi$ для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Если считать, что 0-множества в $\mathbb{R}^n$ составляют левый край спектра α-множеств, то нерегулярные множества можно считать составляющими правый край спектра.

Приведем два утверждения, относящиеся к замкнутым множествам в $\mathbb{R}^n$. Введем обозначение $\rho(z) = \min\limits_{a \in A} \|z - a\|^2$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть A — регулярное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого замкнутого множества B в $\mathbb{R}^n$ $(B \supset A, B \neq A)$, для которого $\sup\limits_{b \in B} \rho(b)$ достигается на B, все точки b множества B, максимально удаленные от A, удовлетворяют включению $b \in \partial B$.*

Доказательство. Пусть A и B удовлетворяют условиям теоремы 1, и b — максимально удаленная точка множества B от A.

Полагаем $\varepsilon = \rho(b)^{\frac{1}{2}} \in (0, \infty)$. Рассмотрим замкнутую ε-окрестность $A_\varepsilon = \{w \in \mathbb{R}^n \colon \rho(w)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon\}$ множества A. Справедливо включение $b \in A_\varepsilon$.

Предположим, что $b \notin \partial B$. Отсюда следует $b \in \operatorname{int} B$. Тогда $\mathbb{B}(b; \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z - b\| \leqslant \delta\} \subset B \subset A_\varepsilon$ при некотором $\delta \in (0, \infty)$. Значит, для любой точки $z \in \mathbb{B}(b; \delta)$ выполняется $\rho(z)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что для любых $s \in S = \{\bar{s} \in \mathbb{R}^n \colon \|\bar{s}\| \leqslant 1\}$ и $\lambda_k \in (0, \delta)$ выполняется $\rho(b + \lambda_k)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$, и, значит, $\rho(b + \lambda_k s) - \rho(b) \leqslant 0$. Пусть $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям $0 < \lambda_k < \delta$, $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = 0$.

Справедливо неравенство

$$\frac{\rho(b + \lambda_k s) - \rho(b)}{\lambda_k} \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Из (1.4) вытекает $\rho'(b; s) \leqslant 0$, $s \in S$; здесь $\rho'(b; s) = \lim\limits_{k \to \infty} \frac{\rho(b+\lambda_k s) - \rho(b)}{\lambda_k} = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{\rho(b+\lambda s) - \rho(b)}{\lambda}$ — производная по направлению s функции $\rho(z)$ в точке b.

Для производной $\rho'(b; s)$ справедливо равенство

$$\rho'(b; s) = \frac{d}{ds} \min_{a \in A} \|z - a\|^2_{z=b} = \min_{p(b) \in \Omega_A(b)} \frac{d}{ds} \|z - p(b)\|^2_{z=b} = 2 \min_{p(b) \in \Omega_A(b)} \langle b - p(b), s \rangle;$$

здесь символ $\frac{d}{ds} f(z)_{z=b}$ означает производную по направлению s функции $f(z)$ в точке $z = b$.

Так как $b \notin A$, то из условия регулярности множества A следует $b \notin \operatorname{co} \Omega_A(b)$. По теореме об отделимости выпуклых множеств (см., например, [4, 5]) существует гиперплоскость $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \langle s, z \rangle\}$, $(s \in \mathbb{R}^n,\ s \neq 0,\ \gamma \in \mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^n$, сильно разделяющая множества $\{b\}$ и $\operatorname{co} \Omega_A(b)$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что при этом s верно $\langle b - p(b), s \rangle > 0$, $p(b) \in \Omega_A(b)$. Отсюда следует $\rho'(b; s) > 0$ на этом векторе s. Пришли к противоречию с условием $\rho'(b, s) \leqslant 0$ для любого s. Значит, предположение о том, что $b \notin \partial B$, неверно.

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$. Тогда $\alpha_{A_\varepsilon} \leqslant \alpha_A$.*

Доказательство. Пусть $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$ и $w^* = p^\varepsilon(z^*)$ — проекция точки z^* на A_ε

Полагаем $\delta = \|w^* - z^*\| > 0$ и $\mathbb{B}(z^*; \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z - z^*\| \leqslant \delta\}$ — шар с центром в z^* радиуса δ. Шар $\mathbb{B}(z^*; \delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{B}(z^*; \delta) \bigcap \operatorname{int} A_\varepsilon = \varnothing. \tag{1.5}$$

Для точки $w^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$ рассмотрим точку $y^* = p(w^*)$ — проекцию точки w^* на A. Имея в виду, что $\|y^* - z^*\| = \varepsilon$, рассмотрим шар $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z - y^*\| \leqslant \varepsilon\}$. Шар $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon)$ удовлетворяет включению

$$\mathbb{B}(y^*;\varepsilon) \subset A_\varepsilon. \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует включение $\operatorname{int}\mathbb{B}(y^*;\varepsilon) \subset \operatorname{int} A_\varepsilon$, из которого с учетом (1.5) вытекает

$$\mathbb{B}(z^*;\delta)\bigcap \operatorname{int}\mathbb{B}(y^*;\varepsilon) = \varnothing. \tag{1.7}$$

С другой стороны, выполняется включение

$$w^* \in \partial\mathbb{B}(z^*;\delta)\bigcap \partial\mathbb{B}(y^*;\varepsilon). \tag{1.8}$$

Соотношения (1.7), (1.8) означают, что шары $\mathbb{B}(z^*;\delta)$ и $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon)$ касаются друг друга в точке w^* (см. рис. 3).

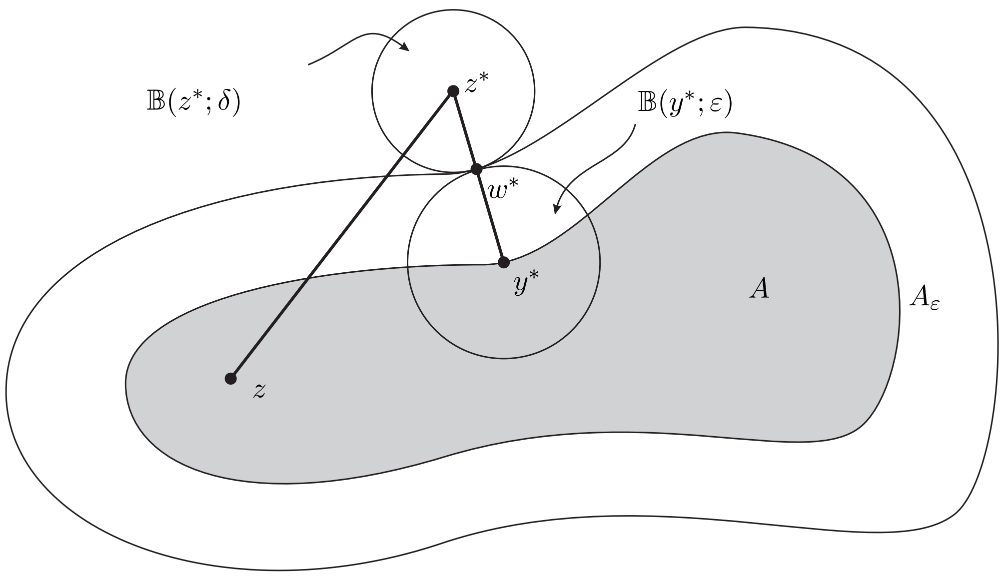

Рис. 3.

Из факта касания шаров $\mathbb{B}(z^*;\delta)$ и $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon)$ в точке w^* следует, что отрезки z^*w^* и w^*y^* лежат на одной прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Следовательно, расстояние между z^* и y^* равно $\|z^* - y^*\| = \delta + \varepsilon$. С другой стороны, видим, что расстояние между z^* и любой точкой $z \in A$ удовлетворяет неравенству $\|z^* - z\| \geqslant \delta + \varepsilon$. Следовательно, $\|z^* - y^*\| = \min\limits_{z\in A}\|z^* - z\|$. Это означает, что $y^* = p(z^*)$.

Отсюда следует $w^* - z^* = p^\varepsilon(z^*) - z^* = \gamma(p(z^*) - z^*)$, $\gamma \in (0,\infty)$.

Учитывая этот факт, покажем, что

$$\operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_{A_\varepsilon}(z^*) - z^*) \subset \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*). \tag{1.9}$$

Действительно, пусть $h \in \operatorname{co}\Omega_{A_\varepsilon}(z^*) - z^*$, и поэтому $h = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i(h^{(i)} - z^*)$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$, $h^{(i)} \in \Omega_{A_\varepsilon}(z^*)$, $i = 1,\ldots,n{+}1$. С другой стороны, по доказанному ранее, справедливо

$$h^{(i)} - z^* = \gamma_i(h^{*(i)} - z^*), \quad \gamma_i > 0, \quad h^{*(i)} \in \Omega_A(z^*), \quad i = 1,\ldots,n+1.$$

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

Тогда получаем

$$h = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \gamma_i (h^{*(i)} - z^*), \quad \lambda_i \gamma_i \geqslant 0, \quad h^{*(i)} \in \Omega_A(z^*), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Обозначим через $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i \gamma_i > 0$. Получаем $\dfrac{1}{\rho} h = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \dfrac{\lambda_i \gamma_i}{\rho}(h^{*(i)} - z^*)$, где $\dfrac{\lambda_i \gamma_i}{\rho} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n+1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \dfrac{\lambda_i \gamma_i}{\rho} = 1$.

Это означает, что $\dfrac{1}{\rho} h = h^* \in \operatorname{co} \Omega_A(z^*) - z^*$, и, следовательно, $h = \rho h^*$, где $\rho \geqslant 0$, $h^* \in \Omega_A(z^*) - z^*$, т. е. $h \in \operatorname{con}(\operatorname{co} \Omega_A(z^*) - z^*)$.

Тем самым доказано включение

$$\operatorname{co} \Omega_{A_\varepsilon}(z^*) - z^* \subset \operatorname{con}(\operatorname{co} \Omega_A(z^*) - z^*),$$

и, следовательно, включение (1.9).

Из (1.9) следует, что для $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$ верно неравенство $\alpha_{A_\varepsilon}(z^*) \leqslant \alpha_A(z^*)$. Из этого неравенства получаем $\alpha_{A_\varepsilon}(z^*) = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_\epsilon} \alpha_{A_\varepsilon}(z^*) \leqslant \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_\epsilon} \alpha_A(z^*) \leqslant \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) = \alpha_A$.

Теорема 2 доказана.

§ 2. Мажорируемость α-множеств. Теоремы об отделимости α-множеств

В этом разделе рассматриваются множества в $\mathbb{R}^n$ и, в основном, в $\mathbb{R}^2$. Предпринята попытка распространить некоторые базовые понятия и теоремы из выпуклого анализа на α-множества в $\mathbb{R}^n$.

Приведем некоторые определения.

Определение 4. Обозначим через $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha$ совокупность всех замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^n$ соответственно с числом $\alpha_A = \alpha$ и $\alpha_A \leqslant \alpha$, где $\alpha \in [0, \pi]$.

Ясно, что $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$ и $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in [0, \alpha]} \mathcal{A}_\beta$.

Пусть $\alpha \in [0, \pi]$.

Определение 5. *α-гиперплоскостью* Γ в $\mathbb{R}^n$ назовем такой гомеоморфный образ гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, что:

1. $\Gamma \in \mathcal{A}_\alpha$;
2. Γ разбивает $\mathbb{R}^n$ на два замкнутых множества в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфных замкнутому полупространству в $\mathbb{R}^n$.

Замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ из определения 5 обозначим через Φ^- и Φ^+. Согласно определению 5, эти множества есть элементы из $\mathcal{B}_\alpha$, и хотя бы одно из них — элемент совокупности $\mathcal{A}_\alpha : \max\{\alpha_{\Phi^-}, \alpha_{\Phi^+}\} = \alpha$.

$\Phi^-(\Phi+)$ назовем α-полупространством в $\mathbb{R}^n$, если $\Phi^-(\Phi^+)$ содержится в A_α. При таком определении, если $\Phi^-(\Phi^+)$ содержится в $\mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$, то $\Phi^-(\Phi^+)$ есть β-полупространство в $\mathbb{R}^n$ при некотором $\beta \in [0, \alpha)$.

В случае, если множества Γ, Φ^-, Φ^+ из $\mathcal{B}_\alpha$ таковы, что для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n$ имеет место $z^* \in \Gamma$, или $z^* \in \partial\Phi^-$, или $z^* \in \partial\Phi^+$, будем иногда обозначать эти множества так: $\Gamma(z^*)$, $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$.

Также в тех случаях, когда ясно, что речь идет об α-полупространстве Φ^- и Φ^+, будем иногда называть их полупространствами в $\mathbb{R}^n$.

Определение 6. α-гиперплоскость $\Gamma(z^*)$ в $\mathbb{R}^n$ назовем *опорной* к $A \in \mathcal{A}_\alpha$ в точке $z^* \in \partial A$, если A содержится в одном из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, отвечающих α-гиперплоскости $\Gamma(z^*)$.

То из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, которое содержит A, будем называть опорным к A в точке z^*.

Определение 7. Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ *α-отделимы* (*$\mathcal{B}_\alpha$-отделимы*), если существует такая α-гиперплоскость Γ в $\mathbb{R}^n$ (такая гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$), что $A \subset \Phi^-$, $B \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, отвечающие гиперплоскости Γ.

Определение 8. Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ сильно α-отделимы (сильно $\mathcal{B}_\alpha$-отделимы), если существует такая α-гиперплоскость Γ (такая гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$) в $\mathbb{R}^n$ и $\rho \in (0, \infty)$, что $A_\rho \subset \Phi^-$, $B_\rho \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, отвечающие гиперплоскости Γ.

Мы привели определения некоторых базовых понятий, относящихся к α-множествам в $\mathbb{R}^n$, — аналогов соответствующих понятий из выпуклого анализа. Ниже сформулируем и докажем несколько утверждений в духе таких теорем из выпуклого анализа, как теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству и теоремы об отделимости выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Однако поскольку случай α-множеств сложнее, чем случай выпуклых множеств (0-множеств) в $\mathbb{R}^n$, то при формулировке утверждений, относящихся к α-множествам в $\mathbb{R}^n$, нам придется стеснить эти множества некоторыми дополнительными условиями.

Сначала рассмотрим замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$, для которых введем свойство мажорируемости (m-свойство); покажем, что не все замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$ обладают m-свойством. Затем сформулируем и докажем некоторые утверждения (в духе теорем выпуклого анализа) для α-множеств в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством.

Итак, пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$.

Введем в $\mathbb{R}^2$ следующие множества:
$K(z^*; A) = \{h \in \mathbb{R}^2 : h \neq \mathbf{0},\ z = z^* + \lambda h \in A$ при некоторых $\lambda \in (0, \infty)\}$ — конус возможных направлений множества A в точке z^*;
$K_A(z^*) = \{z = z^* + \lambda h : \lambda \geqslant 0, h \in K(z^*; A)\}$;
$Q_A(z^*) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus K_a(z^*)}$, где черта — операция замыкания множества в $\mathbb{R}^2$.

Множества $K_A(z^*)$, $Q_A(z^*)$ для удобства изложения будем называть конусами в $\mathbb{R}^2$. Конус $Q_A(z^*)$ есть замкнутое, не обязательно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$. Заметим, что для некоторых замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^2$ с числом $\lambda \in (0, \pi)$ и точек $z^* \in \partial A$ может иметь место $Q_A(z^*) = \emptyset$ (см. рис. 4).

На рис. 4 изображен компакт A в $\mathbb{R}^2$ с числом $\alpha \in (0, \pi)$, чуть меньшим, чем π. Компакт A имеет форму сосиски, ширина которой, вплоть до вертикального и горизонтального отрезков, содержащих центры O_1 и O_3 окружностей радиуса r_1, неизменна и равна $r_2 - r_1 = r_4 - r_3$. Граница ∂A компакта A состоит из шести дуг окружностей радиусов r_i, $i = \overline{1, 4}$.

Граничная точка z^* компакта A выбрана так, что конусы $K(z^*; A)$ и $K_A(z^*)$ совпадают с $\mathbb{R}^2$, и, значит, $Q_A(z^*) = \emptyset$.

Перейдем от примера к рассмотрению общего случая. Допустим, что для некоторого замкнутого множества A в $\mathbb{R}^2$ и точки $z^* \in \partial A$ имеет место $Q_A(z^*) \neq \emptyset$. В этом случае конус $Q_A(z^*)$ есть, вообще говоря, замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$. $Q_A(z^*)$ представляет собой объединение некоторого набора выпуклых замкнутых конусов K_ω, $\omega \in \Omega$ в $\mathbb{R}^2$ с вершиной z^* :

$$Q_A(z^*) = \bigcup_{\omega \in \Omega} K_\omega; \tag{2.1}$$

здесь Ω — некоторое множество.

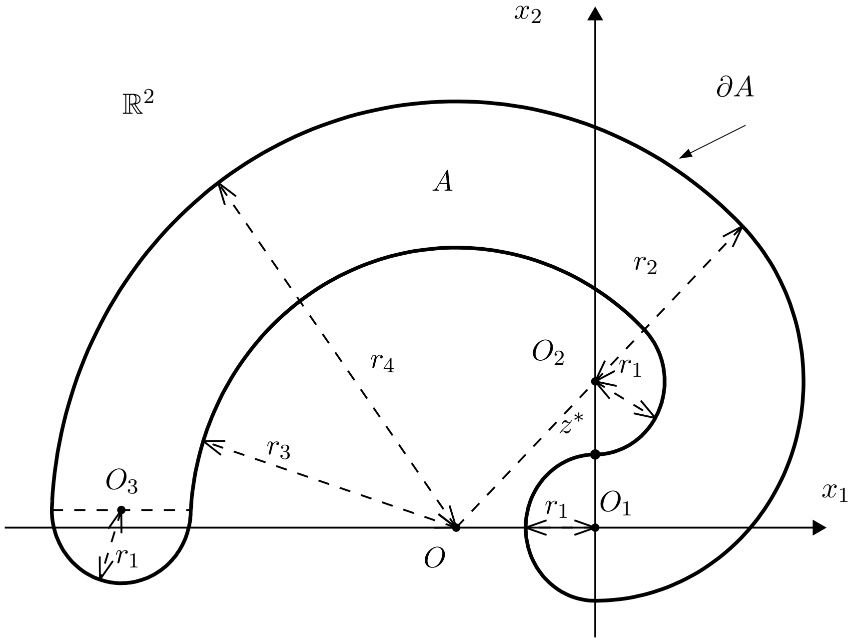
x_2
$\mathbb{R}^2$
∂A
A
r_2
r_4
O_2
r_1
z^*
r_3
O_3
r_1
O_1
x_1
r_1
O

Рис. 4.

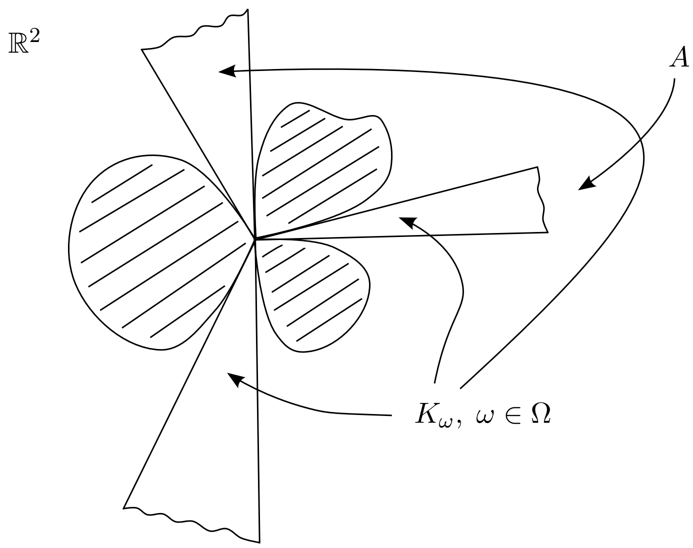
$\mathbb{R}^2$
A
$K_\omega,\ \omega \in \Omega$

Рис. 5.

Конус $Q_A(z^*)$, представленный на рис. 5, состоит из трех конусов K_ω, $\omega \in \Omega = \{1, 2, 3\}$, с непустой $\operatorname{int} K_\omega \neq \emptyset$ (см. рис. 5).

Будем говорить, что $z^* \in \partial A$ — точка типа I, если:

(a) $Q_A(z^*) \neq \emptyset$;

(b) существует такое представление (2.1) конуса $Q_A(z^*)$, что среди конусов K_ω, $\omega \in \Omega$, есть выпуклый конус K_{ω^*} с $\operatorname{int} K_{\omega^*} \neq \emptyset$, не совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$;

(c) конус $Q_A(z^*)$ не допускает представления (2.1), в котором среди конусов K_ω, $\omega \in \Omega$, найдется конус, совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что $z^* \in \partial A$ — точка типа II, если:

(a) $Q_A(z^*) \neq \emptyset$;

(b) конус $Q_A(z^*)$ допускает представление (2.1), в котором среди конусов K_ω, $\omega \in \Omega$, найдется конус, совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$.

На рис. 6 изображены точки $z^* \in \partial A$ типа I и типа II.

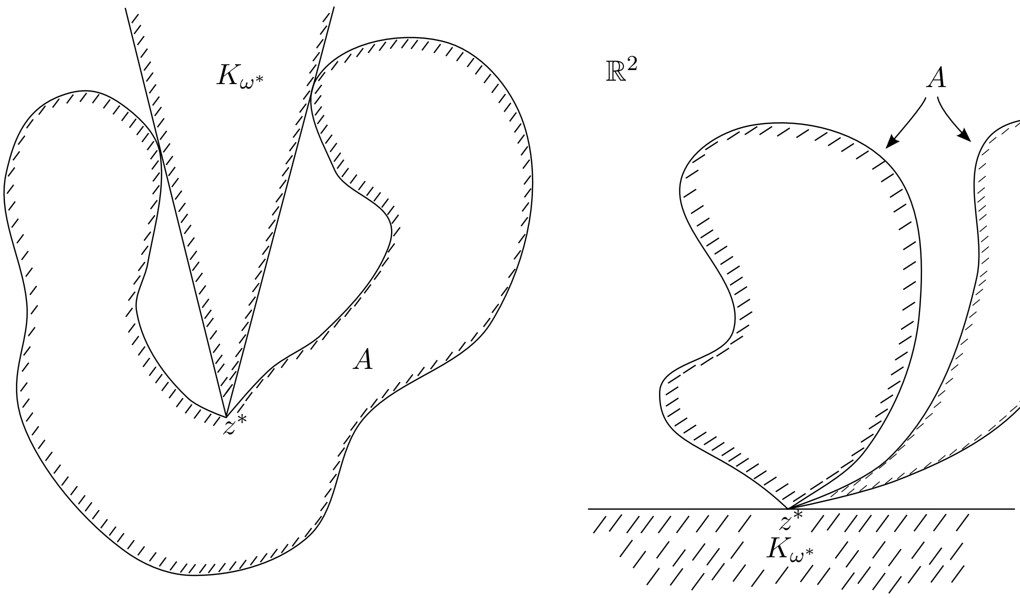

Рис. 6.

В случае, когда $z^* \in \partial A$ есть точка типа I, рассмотрим соответствующий конус $K^* = K_{\omega^*}$ (из условия b), биссектрису конуса K^* и какую-либо точку y^* на биссектрисе, $y^* \neq z^*$ (см. рис. 7). Из y^* восстановим перпендикуляры к образующим (крайним лучам) конуса K^*. Через $\beta = \beta(y^*)$ обозначим меньший угол между перпендикулярами. Имеет место $0 < \beta < \pi$.

Угол $\beta = \beta(y^*)$ есть некоторая характеристика конуса K^*, содержащегося в $Q_A(z^*)$. Следовательно, эта характеристика имеет отношение к самому множеству A. Однако эта характеристика не связана непосредственно с понятием проекции точки на множество A. Угол $\beta = \beta(y^*)$ не есть, вообще говоря, угол между двумя векторами вида $p(y^*) - y^*$.

Введенное ниже свойство связывает характеристику $\beta = \beta(y^*)$ с угловой характеристикой, в основе которой лежит понятие проекции точки на множество A.

Определение 9. Будем говорить, что замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ обладает *m-свойством* (*свойством мажорируемости*), если для любой точки $z^* \in \partial A$ существует такое представление (2.1), в котором z^* есть точка типа I или типа II, и для любой точки типа I среди соответствующих конусов $K^* = K_{\omega^*}$ найдется такой конус и для него такая точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, что $\beta \leqslant \alpha_A(z^0)$.

В связи с приведенными определениями возникает вопрос о существовании в $\mathbb{R}^2$ замкнутых множеств, у которых множество точек $z^* \in \partial A$ типа I непусто и которые при этом обладают m-свойством. Ответ на этот вопрос положителен. Приведем примеры таких множеств.

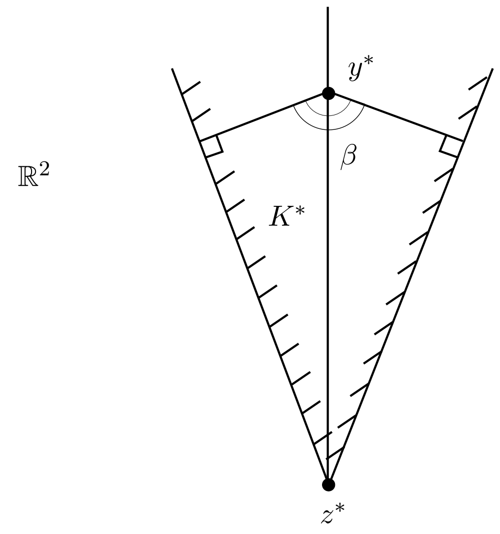

Рис. 7.

Пример 3. Пусть замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ ограничено дугами трех окружностей (см. рис. 8), причем крайние точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ внутренней дуги не совпадают.

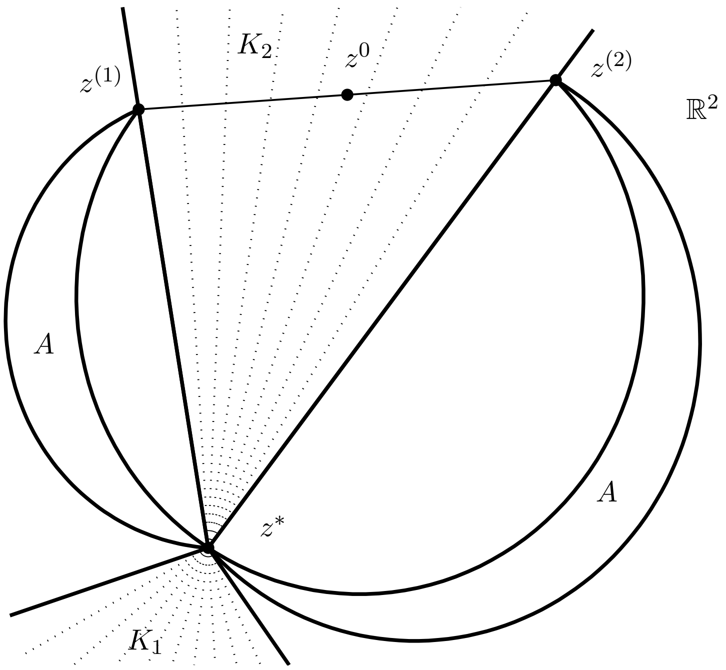

Рис. 8.

Любая внутренняя точка z^* внутренней дуги, входящей в ∂A, является точкой типа I. Так, например, точке z^*, принадлежащей всем трем дугам одновременно, соответствует конус $Q_A(z^*) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus K_A(z^*)} = K_1 \bigcup K_2$, где K_1 и K_2 — замкнутые выпуклые конусы с вершиной z^*. Конусы K_1 и K_2 имеют непустые внутренности и не совпадают с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$. Видим, что конус $K^* = K_2$ имеет соответствующий угол $\beta = \beta(y^*) < \pi$. С другой стороны, $\alpha_A = \alpha_A(z^0)$ для точки $z^0 = \dfrac{1}{2}(z^{(1)} + z^{(2)}) = \pi$. Точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, а также внутренние точки двух внешних дуг, входящих в ∂A, являются точками типа II.

Видим, что множество A обладает m-свойством. □

Таким образом, приведенный пример показывает, что совокупность замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством, непуста. Возникает естественный вопрос: «Может быть, все невыпуклые замкнутые множества A в $\mathbb{R}^2$, у которых $z^* \in \partial A$ есть точки типа I или типа II, обладают m-свойством?»

Приведем пример, показывающий, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример 4. Основу конструкции составляет трехзвенная ломаная X с узлами в точках $w = (0, b)$, $y = (-c, 0)$, $u = (d, -e)$, $z = (2d + c, 0)$, где параметры $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$, их значения определим ниже. Построим характеристическое множество $L(X)$, состоящее из точек, имеющих не менее двух проекций (ближайших точек) на ломаной X. Линейная структура X определяет геометрию характеристического множества. $L(X)$ является объединением одномерных и нульмерных многообразий в виде дуг парабол, открытых отрезков (отрезков без концов), полупрямых, точек и содержит (см. рис. 9):

- конечную совокупность $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$ точек склейки одномерных многообразий;
- открытый отрезок L_1 биссектрисы угла, образованного звеньями wy и yu ломаной X;
- дугу L_2 параболы, фокус которой совпадает с точкой w, а директриса — с осью Ox_1;
- дугу $L_3 = x^{(2)}x^{(3)}$ параболы, состоящую из точек, равноудаленных от точки w и звена uz ломаной X;
- полупрямую L_4 с крайней точкой $x^{(3)}$, состоящую из точек, равноудаленных от концов w и z ломаной X;
- открытый отрезок $L_5 = ux^{(2)}$ биссектрисы угла, образованного звеньями yu и uz ломаной X.

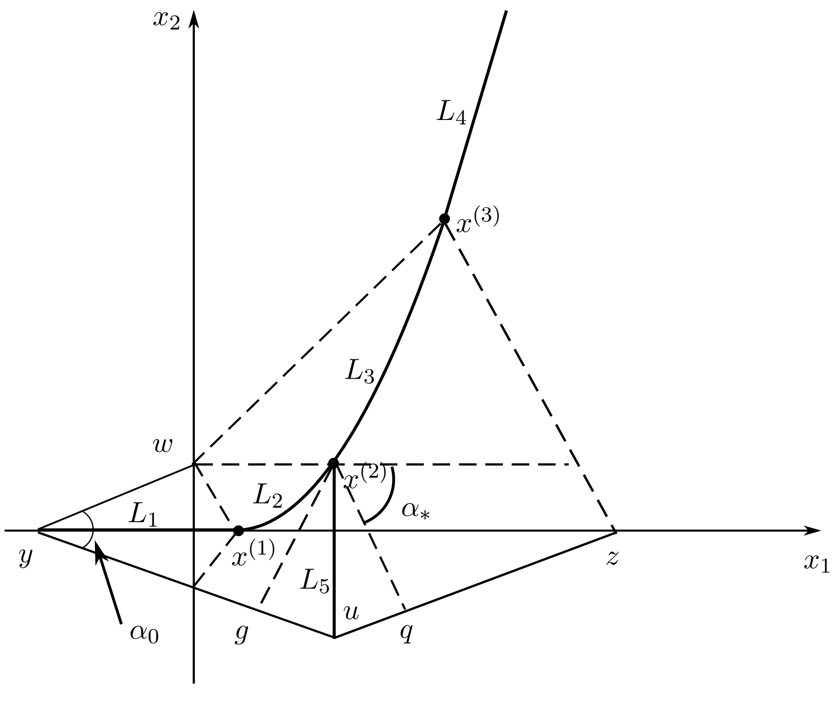

Рис. 9.

Изучим поведение функции $\alpha_X(\cdot)$ на характеристическом множестве $L(X)$ и оценим сверху ее множество значений.

Выделим особо точку бифуркации $x^{(2)}$ — единственную точку из $L(X)$, имеющую не две, а три различные проекции на ломаную X. Одной из проекций является w, другую обозначим g, третью проекцию обозначим q. Проекции w, g и q упорядочены против часовой стрелки относительно точки $x^{(2)}$. Пусть углы $\alpha_1 = \widehat{wx^{(2)}g}$, $\alpha_2 = \widehat{gx^{(2)}q}$, тогда $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Заметим, что за счет надлежащего выбора значений параметров b, c, d, e угол $\alpha_X(x^{(2)})$ можно сделать меньше любой наперед заданной положительной константы.

Функция $\alpha_X(\cdot)$, будучи рассмотренной на кривой $L(y) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, в точке $x^{(2)}$ терпит разрыв. В этой точке происходит скачок значений функции на величину $\alpha_2 > 0$ при движении вдоль $L(y)$ в направлении от $x^{(1)}$ до $x^{(2)}$. График сужения $\alpha_X(\cdot)$ на $L(y)$ при натуральной параметризации $s = s(x)$ этой кривой представлен на рис. 10. Аналогичным образом функция $\alpha_X(\cdot)$ ведет себя вдоль другой характеристической линии $L(u) = L_5 \cup \{x^{(2)}\}$ при движении вдоль $L(u)$ в направлении от u до $x^{(2)}$. Здесь также в точке $x^{(2)}$ происходит скачок значений функции, но на величину $\alpha_1 > 0$. За счет выбора параметров углы α_1 и α_2, а вместе с этим и угол $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$, можно сделать меньше любой малой положительной величины. Примем $b = 1/2$, $c = 1$. Потребуем, чтобы $\dfrac{e}{d+c} = 1/2$. Тогда $x^{(1)} = (1/4, 0)$. Найдем значение параметра d, при котором парабола с фокусом в точке w и директрисой, определяемой звеном yu ломаной X, проходит через точку $x^{(2)} = (d, 1/2)$. Подставив $b = 1/2$, $c = 1$ в уравнение параболы

$$\begin{gathered}2b(d+c)^2x_2 - (d+c)^2x_1^2 + e\big(2(d+c)x_1x_2 + 2c(d+c)x_2 + 2ecx_1 + 2bex_2 - ex_2^2\big) = \\ = (d+c)^2b^2 + e^2(b^2 - c^2),\end{gathered}$$

учитывая соотношение $\dfrac{e}{d+c} = 1/2$, получим квадратное уравнение $d^2 - d - 1 = 0$. Откуда $d = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда $e = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, точки $x^{(2)} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; $x^{(3)} = \left(\dfrac{51+24\sqrt{5}}{8(3+\sqrt{5})}, \dfrac{37+16\sqrt{5}}{4(3+\sqrt{5})}\right) \approx$ $\approx (2.498, 3.474)$.

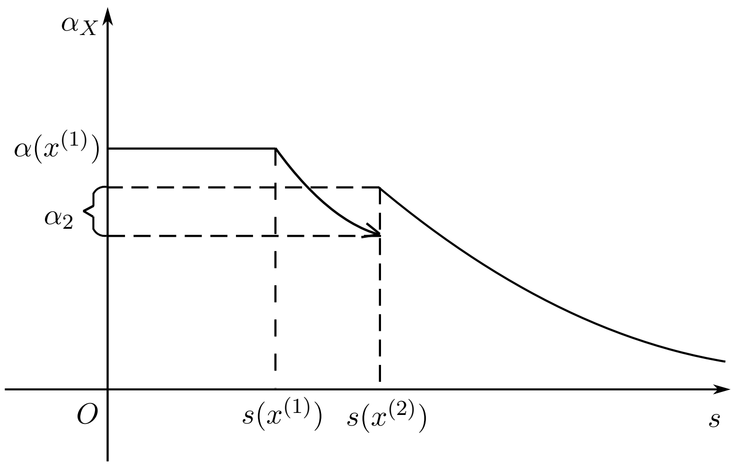

Рис. 10.

Докажем, что при таком выборе параметров выполняется строгое неравенство

$$\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)}).$$

Обозначим α_0 угол между звеньями wy и yu ломаной X. Имеем $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha_0}{2}\right) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{e}{d+c} = 1/2$. Отсюда $\alpha_0 = 2\operatorname{arctg} 1/2$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{2 \cdot 1/2}{1-(1/2)^2} = 4/3$, то $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 4/3$. Обозначим α_* дополнение угла $\alpha(x^{(2)})$ до π, т. е. $\alpha_* = \pi - \alpha(x^{(2)})$. Из подобия прямоугольных треугольников (см. рис. 9) получаем, что $\operatorname{tg}\alpha_* = c/b = 2$. Тогда $\alpha_* = \operatorname{arctg} 2$. Отсюда $\alpha_X(x^{(1)}) = \pi - \alpha_0 = \pi - \operatorname{arctg} 4/3$, $\alpha_X(x^{(2)}) = \pi - \alpha_* = \pi - \operatorname{arctg} 2$. Требуемое неравенство $\alpha_X(x^{(1)}) > \alpha_X(x^{(2)})$ доказано.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_1 \cup L_2$ при ее обходе в направлении от точки y до точки $x^{(2)}$:

$$\alpha_X(x) \leqslant \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L_1 \cup L_2.$$

Аналогично можно показать, что $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(3)}\}$ при ее обходе в направлении от точки $x^{(2)}$ до точки $x^{(3)}$. Стало быть, для всех точек кривой $L(y)$ выполняется оценка

$$\alpha_X(x) \leqslant \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(y).$$

Осталось заметить, что функция $\alpha_X(\cdot)$ на открытом отрезке L_5 постоянна, причем для всех точек $x \in L_5$ справедливо равенство $\alpha_X(x) = \alpha_0 = \operatorname{arctg} 4/3$. Поскольку $\alpha_0 < \alpha_X(x^{(2)})$, а $\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)})$, то для всех точек кривой $L_5 \cup x^{(2)}$ справедливо неравенство $\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)})$. В итоге получаем оценку

$$\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(X).$$

Опираясь на полученные результаты, построим невыпуклое компактное множество A, не обладающее m-свойством.

Для этого сконструированную ломаную X дополним до замкнутой линии выпуклой кривой, соединяющей точки w и z. В качестве такой кривой выберем, например, дугу $\overline{X}$ эллипса, проходящего через точки w и z. Замкнутая кривая $X \cup \overline{X}$ является кусочно-гладкой и ограничивает компактно невыпуклое множество, которое обозначим A (см. рис. 11). Нетрудно видеть, что характеристическое множество $L(A)$ множества A совпадает с $L(X)$.

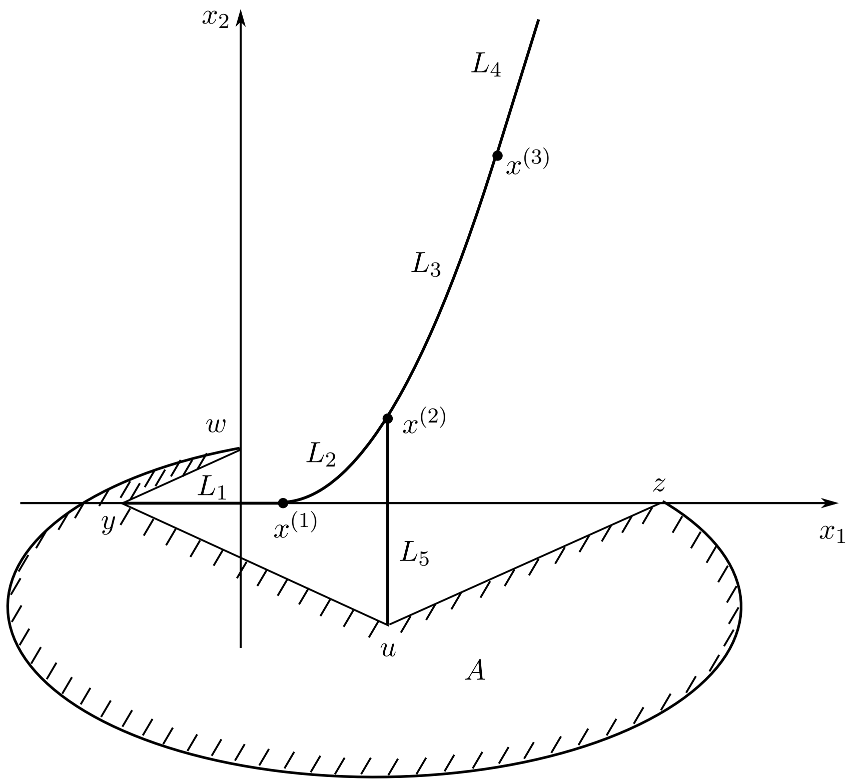

Рис. 11.

Поскольку $\alpha_A(x) = 0$, когда $x \in \mathbb{R}^2 \setminus L(A)$ (в силу единственности проекции точки x на множество A), и $\alpha_A(x) \leqslant \alpha_A(x^{(1)})$, когда $x \in L(A)$ (обоснование приведено выше), то

$$\alpha_A = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(x) = \alpha_A(x^{(1)}) = \pi - \operatorname{arctg} 4/3.$$

Рассмотрим $Q_A(y)$ — замыкание дополнения конуса возможных направлений множества A в точке $y \in \partial A$. В данном случае y является точкой типа I, конус $Q_A(y) = wyz$, т. е. состоит из одной выпуклой компоненты K_1, $K_1 = Q_A(y)$. На биссектрисе конуса K_1 выберем точку $y^* \neq y$, вычислим угол

$$\beta(y^*) = \pi - \operatorname{arctg} 1/2.$$

Очевидно, что

$$\alpha_A < \beta(y^*).$$

Последнее неравенство означает, что A не является m-мажорируемым множеством в смысле определения 9.

Вернемся к изучению замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством. Дадим еще одно определение.

Полагаем $A_0 = A$ для произвольного замкнутого множества A в $\mathbb{R}^2$.

Определение 10. Будем говорить, что замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ обладает *усиленным m-свойством*, если для любой ε-окрестности A_ε, $\varepsilon \in [0, \infty)$, выполняется m-свойство.

Легко показывается, что совокупность замкнутых множеств в $\mathbb{R}^2$, обладающих усиленным m-свойством, непуста. Для этого приведем пример (см. рис. 12).

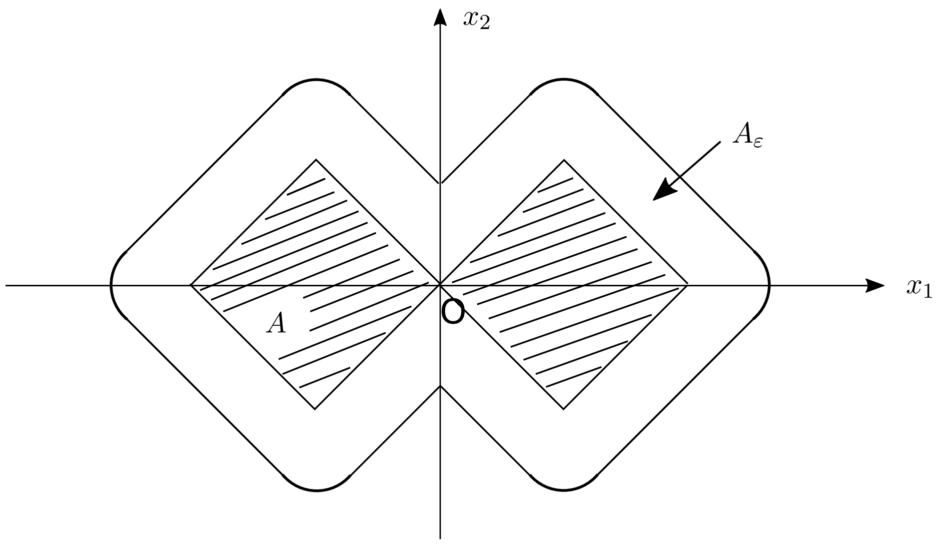

Рис. 12.

Ясно, что примеров замкнутых множеств $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$, в $\mathbb{R}^2$, обладающих усиленным m-свойством, много. Труднее, на наш взгляд, найти множество $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$, в $\mathbb{R}^2$, обладающее m-свойством, но не обладающее усиленным m-свойством.

Сформулируем и докажем некоторые утверждения относительно α-множеств в духе утверждений выпуклого анализа. Эти утверждения имеют смысл достаточных условий, и в их формулировках присутствует m-свойство.

Теорема 3 (о существовании опорной α-гиперплоскости). *Пусть A из $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет включению $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$, обладает m-свойством, а также $z^* \in \partial A$. Тогда существует хотя бы одна α-гиперплоскость, опорная к A в точке z^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z^* \in \partial A$. Тогда, по условиям теоремы, существует такое представление (2.1), согласно которому z^* есть точка типа I или типа II.

Если z^* — точка типа I, то среди соответствующих конусов K_ω, $\omega \in \Omega$, из представления (2.1) найдется конус $K^* = K_{\omega^*}$, а также точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ такие, что $\beta(y^*) \leqslant \alpha_A(z^0)$. Поскольку A есть α-множество, то $\alpha_A(z^0) \leqslant \alpha$, и, значит, $\beta(y^*) \leqslant \alpha$. Тогда угол при вершине z^* конуса K^* равен $\pi - \beta(y^*) \geqslant \pi - \alpha$. Последнее неравенство означает, что в конус K^* можно вложить некоторый замкнутый выпуклый конус K^o с вершиной в точке z^0 и углом при вершине, равным $\pi - \alpha$.

Очевидно, что граница ∂K^o конуса K^o есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$. Полагаем $\Gamma(z^*) = \partial K^o$, $\Phi^-(z^*) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus K^o}$, $\Phi^+(z^*) = K^o$. Из построения K^o видно, что $A \subset \Phi^-(z^*)$. Значит, $\Gamma(z^*)$ — α-гиперплоскость, опорная к A в точке z^*.

Если $z^* \in \partial A$ — точка типа II, то доказательство очевидно. Теорема 3 доказана. $\square$

Теорема 4 (о сильной отделимости точки и α-множества). *Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$, — множество в $\mathbb{R}^2$, обладающее усиленным m-свойством, и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Тогда множества $\{z^*\}$ и A сильно α-отделимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A замкнуто в $\mathbb{R}^2$ и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, то $\hat{\rho}(z^*) = \min\limits_{z \in A} \|z - z^*\| = \varepsilon \in (0, \infty)$. По теореме 2 выполняется $\alpha_\varepsilon = \alpha_{A_\varepsilon} \leqslant \alpha < \pi$, и, значит, A_ε — регулярное множество в $\mathbb{R}^2$. Тогда $z^* \in \partial A_\varepsilon$ по теореме 1. Так как A обладает усиленным m-свойством, то A_ε обладает m-свойством. Тогда по теореме 3 существует опорная α_ε-гиперплоскость $\Gamma^\varepsilon(z^*)$ к A_ε в точке z^*. Множество A_ε содержится в одном из замкнутых полупространств $\widetilde{\Phi}^-(z^*), \widetilde{\Phi}^+(z^*)$, порожденных α_ε-гиперплоскостью $\Gamma^\varepsilon(z^*)$. Пусть для определенности $A_\varepsilon \subset \widetilde{\Phi}^+(z^*)$ (см. рис. 13).

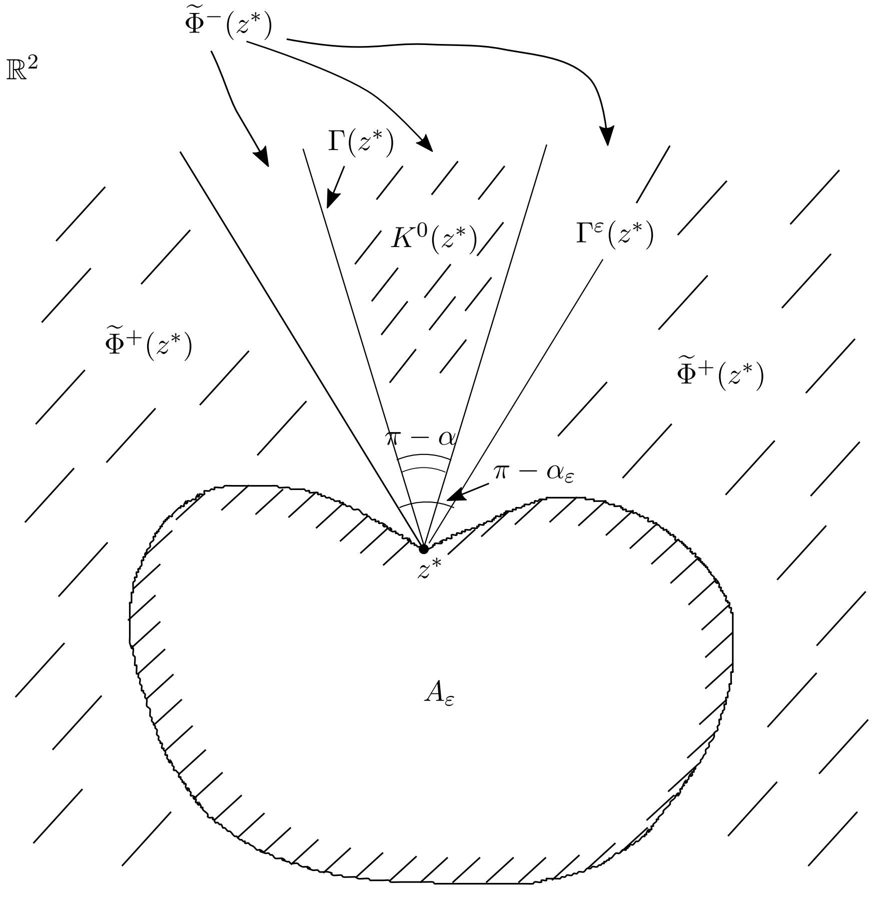

Рис. 13.

Учитывая то, как доказывалась теорема 3, можем считать, что $\widetilde{\Phi}^-(z^*)$ есть выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^2$. Граница $\Gamma^\varepsilon(z^*) = \partial\widetilde{\Phi}^-(z^*)$ конуса $\widetilde{\Phi}^-(z^*)$ есть α_ε-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$, и поэтому угол конуса $\widetilde{\Phi}^-(z^*)$ при вершине z^* равен $\pi - \alpha_\varepsilon$. Так как $\alpha_\varepsilon \leqslant \alpha$, то $\pi - \alpha \leqslant \pi - \alpha_\varepsilon$, и, значит, в конус $\widetilde{\Phi}^{-}(z^*)$ можно вложить замкнутый выпуклый конус $K^0(z^*)$ с углом при вершине z^*, равным $\pi-\alpha$. Очевидно, что граница $\Gamma(z^*) = \partial K^0(z^*)$ конуса $K^0(z^*)$ есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 13).

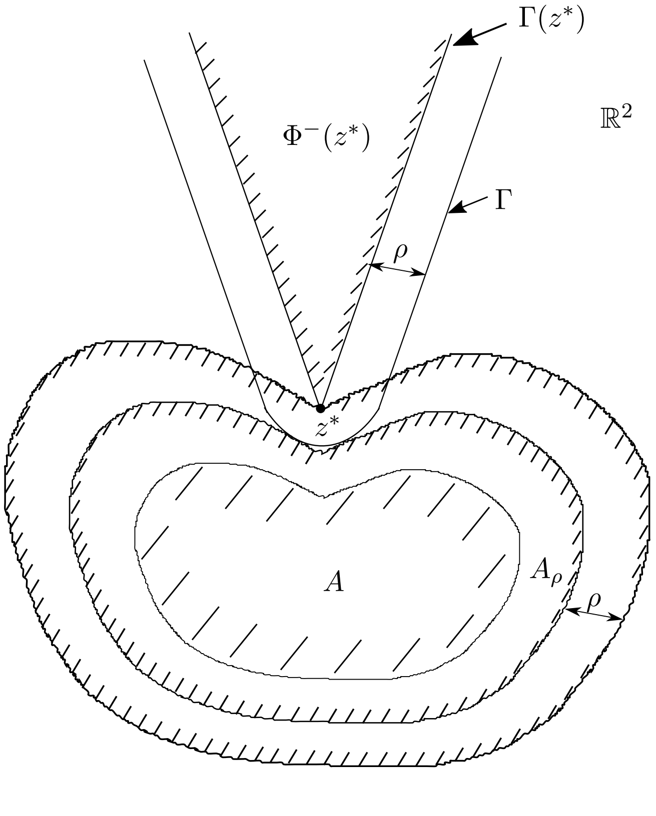

Рис. 14.

Плоскость $\mathbb{R}^2$ разбивается α-гиперплоскостью $\Gamma(z^*)$ на два замкнутых множества $\Phi^-(z^*) = K^0(z^*) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\Phi^+(z^*) \in \mathcal{A}_\alpha$, причем $\{z^*\} \subset \Phi^-(z^*)$, $A_\varepsilon \subset \Phi^+(z^*)$. Рассмотрим множество $\Phi^-(z^*)_\rho$ — замкнутую ρ-окрестность множества $\Phi^-(z^*)$, $\rho = \dfrac{\varepsilon}{2} \in (0,\infty)$. Полагаем $\Gamma = \partial\Phi^-(z^*)_\rho$ (см. рис. 14). Множество Γ есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$, которая разбивает $\mathbb{R}^2$ на два полупространства Φ^- и Φ^+ такие, что $\{z^*\} \in \Phi^-$, $A_\rho \subset \Phi^+$. Теорема 4 доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть $A \in A_\alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$, — замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$, которое содержится в некотором полупространстве $\Pi_s^- = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle s,z\rangle \leqslant \chi\}$, $(s \in \mathbb{R}^2,\ s \neq \mathbf{0},\ \chi \in \mathbb{R}^1)$ и обладает усиленным m-свойством. Тогда A есть пересечение всех α-полупространств в $\mathbb{R}^2$, его содержащих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Φ_ω^+, $\omega \in \Omega$, всевозможные α-полупространства в $\mathbb{R}^2$, содержащие A.

Совокупность $\{\Phi_\omega^+ : \omega \in \Omega\}$ непуста. В самом деле, рассмотрим полупространство $\Pi_s^+ = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle s,z\rangle \geqslant \chi\}$ в $\mathbb{R}^2$. Выберем некоторую точку $z^o \in \Pi_s^+$ и введем конус $K(z^o) = \{z = z^o + \lambda h :\ \ \lambda \in [0,\infty),\ h \in \mathbb{R}^2,\ \widehat{(h,s)} \leqslant \pi - \alpha\}$ с углом $\pi-\alpha$ при вершине z^o. По построению, множество $\Phi^+(z^0) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus K(z^o)}$ есть α-полупространство в $\mathbb{R}^2$, содержащее Π_s^-. Значит, $A \subset \Phi^+(z^o)$.

Итак, справедливо включение

$$A \subset \bigcap_{\omega\in\Omega} \Phi_\omega^+.$$

Покажем, что верно обратное включение

$$\bigcap_{\omega\in\Omega}\Phi^+_\omega \subset A.$$

Предположим противное: $\bigcap\limits_{\omega\in\Omega}\Phi^+_\omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Значит, существует точка $z^* \in \bigcap\limits_{\omega\in\Omega}\Phi^+_\omega \setminus A$. По теореме 4 существует α-гиперплоскость Γ в $\mathbb{R}^2$, сильно разделяющая $\{z^*\}$ и A, то есть разбивающая $\mathbb{R}^2$ на два полупространства Φ^- и Φ^+ из $\mathcal{B}_\alpha$ таких, что $\{z^*\}_\rho \subset \Phi^-$, $A_\rho \subset \Phi^+$, где $\rho \in (0,\infty)$, причем Φ^+ есть α-полупространство в $\mathbb{R}^2$.

Так как Φ^+ есть α-полупространство, содержащее A, то $\Phi^+ \in \{\Phi^+_\omega : \omega\in\Omega\}$. Тогда получаем, что $z^* \in \bigcap\limits_{\omega\in\Omega}\Phi^+_\omega \subset \Phi^+$, а с другой стороны $\{z^*\}_\rho \subset \Phi^-$. Пришли к противоречию с предположением от противного. Теорема 5 доказана. □

В теореме 5 установлено, что замкнутые множества A в $\mathbb{R}^2$ из совокупности $\mathcal{A}_\alpha$, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, представимы в виде пересечения α-полупространств из $\mathbb{R}^2$. Тематика, затрагивающая вопросы, касающиеся структуры пересечений множеств в $\mathbb{R}^n$ — элементов из $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha$, весьма актуальна, на наш взгляд. Такие вопросы возникают, например, в связи с доказательством некоторых утверждений об отделимости α-множеств в $\mathbb{R}^n$.

Обратимся к рассмотрению совокупностей $\mathcal{B}_\alpha$, где $\alpha\in[0,\pi]$. По-видимому, совокупность $\mathcal{B}_\alpha$ замкнута относительно операции $\varphi(A) = A\bigcap B$ (B — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$).

Возникает вопрос о том, является ли совокупность $\mathcal{A}_\alpha$ замкнутой относительно операции $\varphi(A,B) = A\bigcap B$, т. е. выполняется ли $\varphi(A,B)\in\mathcal{A}_\alpha$ при A и B из $\mathcal{A}_\alpha$.

Как показано А. Н. Фоминым в [1, с. 60–61], ответ на этот вопрос отрицателен.

От ситуации α-отделимости точки и α-множества в $\mathbb{R}^2$ перейдем к рассмотрению более общей ситуации двух непересекающихся множеств из $\mathbb{R}^n$ — элементов совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha\in[0,\pi)$.

Выскажем следующее предположение.

Гипотеза 1. *Пусть A и B из $\mathbb{R}^n$ — элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha\in[0,\pi)$, такие, что $\rho(A,B)\geqslant\gamma$, где $\gamma\in(0,\infty)$. Тогда существует гиперплоскость $\Gamma\in\mathcal{A}_\alpha$, сильно разделяющая A и B.*

В теореме 4 об отделимости точки и множества представлен частный случай как некоторое подтверждение справедливости гипотезы 1. Рассмотрим еще одну ситуацию, говорящую в пользу гипотезы 1.

Пусть заданы скалярные функции $f(x)$, $g(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, липшицевы на $\mathbb{R}^n$ с одной и той же константой Липшица $L\in(0,\infty)$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ два множества $A = \operatorname{epi} f(\cdot) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}^n,\ y\geqslant f(x)\}$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}^n,\ y\leqslant g(x)\}$. Предполагается: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}(f(x)-g(x))\geqslant\gamma^*$, где $\gamma^*\in(0,\infty)$.

Рассмотрим $\operatorname{gr} f(\cdot) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}^n, y = f(x)\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

Каждой точке $z^* = (x^*, f(x^*))\in\operatorname{gr} f(\cdot)$ сопоставим в $\mathbb{R}^{n+1}$ конус $K(z^*) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}^n,\ |y - f(x^*)|\leqslant L\|x - x^*\|\}$.

Конус $K(z^*)$ состоит из двух замкнутых выпуклых конусов $K^+(z^*)$ (верхнего) и $K^-(z^*)$ (нижнего) с вершиной z^* (см. рис. 15). Через $\vartheta\in(0,\pi)$ обозначим угол при вершине z^* каждого из конусов $K^+(z^*), K^-(z^*)$ — наибольший из углов между крайними лучами каждого из конусов.

Выделим для определенности рассуждений верхний конус $K^+(z^*)$. Выделим в $K^+(z^*)$ пару λ_*, λ^* крайних лучей, угол между которыми равен ϑ (см. рис. 16). По построению конуса $K^+(z^*)$, угол ψ, который составляет каждый из лучей λ_*, λ^* с подпространством $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, равен $\dfrac{\pi-\vartheta}{2}$.

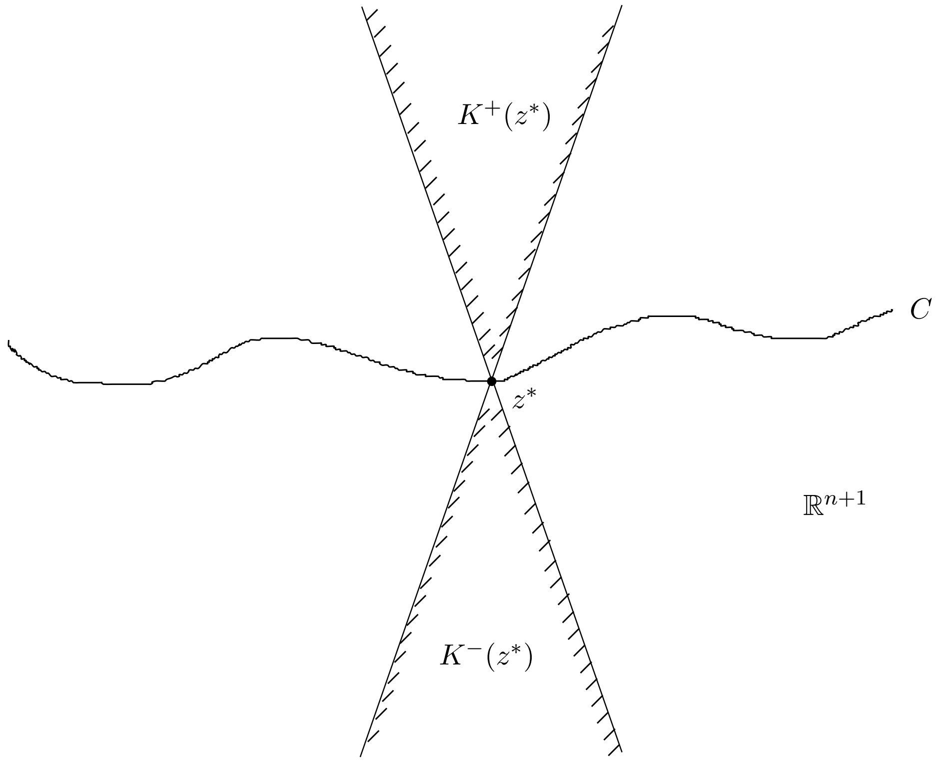

Рис. 15.

Обозначим через λ центральный луч $K^+(z^*)$ — луч конуса, составляющий одинаковые углы со всеми образующими конуса $K^+(z^*)$. Пусть z^o ($z^o \neq z^*$) — какая-либо точка на луче λ (см. рис. 13), а α — угол между двумя перпендикулярами, восстановленными из z^o к лучам λ_* и λ^*. Видим, что $\alpha = 2\psi = \pi - \vartheta$ не зависит от выбора точки z^o на луче λ.

Утверждение 1. *Множества* $\operatorname{hypo} f(\cdot)$, $\operatorname{epi} f(\cdot)$ *и, значит,* $\operatorname{gr} f(\cdot)$ *есть элементы совокупности* $\mathcal{B}_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $z^o \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$. Пусть для определенности $z^o \in \operatorname{epi} f(\cdot)$ (см. рис. 17). Обозначим через z^* какую-либо проекцию точки z^o на $\operatorname{gr} f(\cdot)$. Для простоты будем считать, что $z^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Точка z^* находится в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ строго ниже точки z^0; в противном случае пришли бы к противоречию с тем, что z^* — проекция точки z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$. Это означает, что вектор $s = z^0 - z^*$ направлен вверх в том смысле, что $\langle s, l\rangle > 0$; здесь $e = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Введем гиперплоскость $\Pi_s(z^*) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle s, z\rangle = 0\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, опорную к шару $\mathbb{B}(z^0; r) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z - z^0\| \leqslant r\}$ $(r = \|z^0\|)$ в точке $z^* = 0$. Также введем конус Булигана $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$ множества $\operatorname{gr} f(\cdot)$ в точке z^* (см. рис. 18). Определение конуса Булигана см., например, в [4, 7].

Из свойств вектора $s \in \mathbb{R}^{n+1}$, нормального к гиперплоскости $\Pi_s(z^*)$, и свойств функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, следует, что отображения $\Pi_s(z^*) \mapsto \mathbb{R}^n$, $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*) \mapsto \mathbb{R}^n$ ортогонального проектирования множеств $\Pi_s(z^*)$, $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$ на $\mathbb{R}^n$ являются накрывающими, и поэтому можно сравнивать множества $\Pi_s(z^*)$ и $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$ по «высоте». $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$ находится под $\Pi_s(z^*)$ (за исключением точки $z^* = (x^*, f(x^*))$, ибо в противном случае имело бы место $\langle s, h\rangle > 0$ для некоторого направления $\Lambda_h(z^*) = \{\lambda h : \lambda \geqslant 0\}$ $(h \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1})$ конуса $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$, что повлекло бы за собой $\Lambda_h(z^*) \bigcap \operatorname{int} \mathbb{B}(z^0; r) \neq \emptyset$. Это повлекло бы за собой соотношение $\operatorname{gr} f(\cdot) \bigcap \operatorname{int} \mathbb{B}(z^0; r) \neq \emptyset$, противоречащее определению точки z^*.

Замечание 1. На рис. 18 представлена схема расположения множеств $\mathbb{B}(z^0; r)$, $\Pi_s(z^*)$, $T_{\operatorname{gr} f(\cdot)}(z^*)$, $K^-(z^*)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Схема достаточно адекватно отражает расположение этих множеств в $\mathbb{R}^{n+1}$. Так, на этой схеме шар $\mathbb{B}(z^0; r)$ расположен над гиперплоскостью

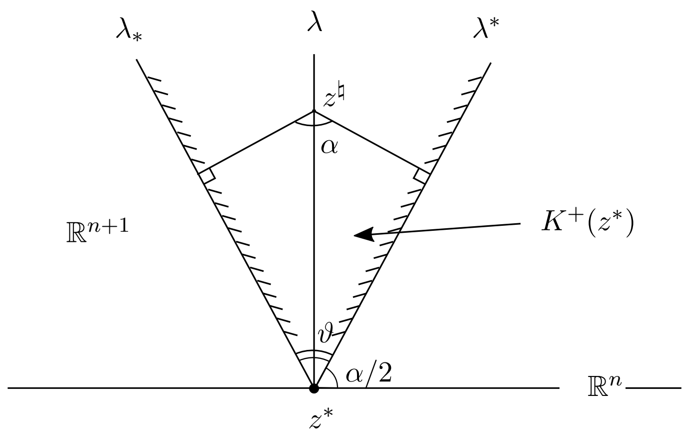
λ_*
λ
λ^*
$z^\natural$
α
$K^+(z^*)$
$\mathbb{R}^{n+1}$
ϑ
$\alpha/2$
$\mathbb{R}^n$
z^*

Рис. 16.

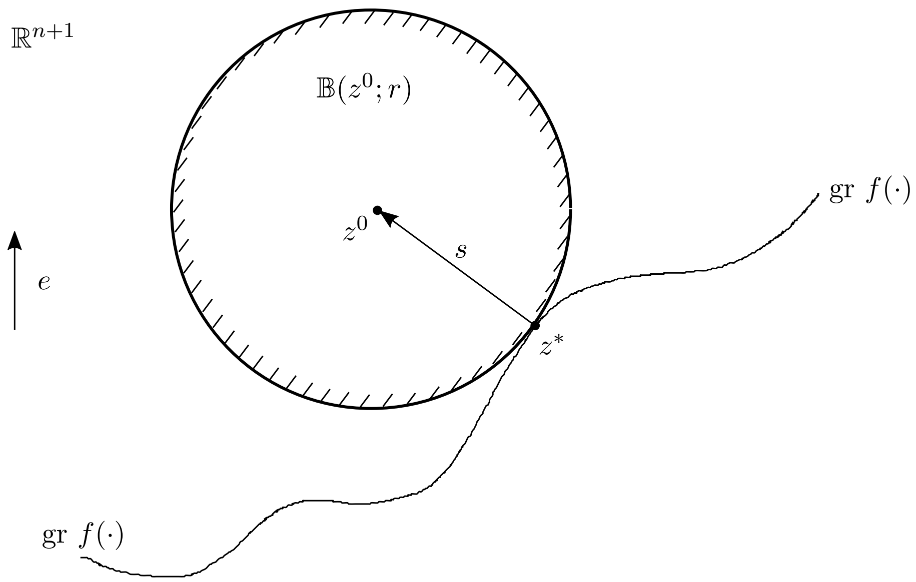
$\mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{B}(z^0; r)$
gr $f(\cdot)$
z^0
s
e
z^*
gr $f(\cdot)$

Рис. 17.

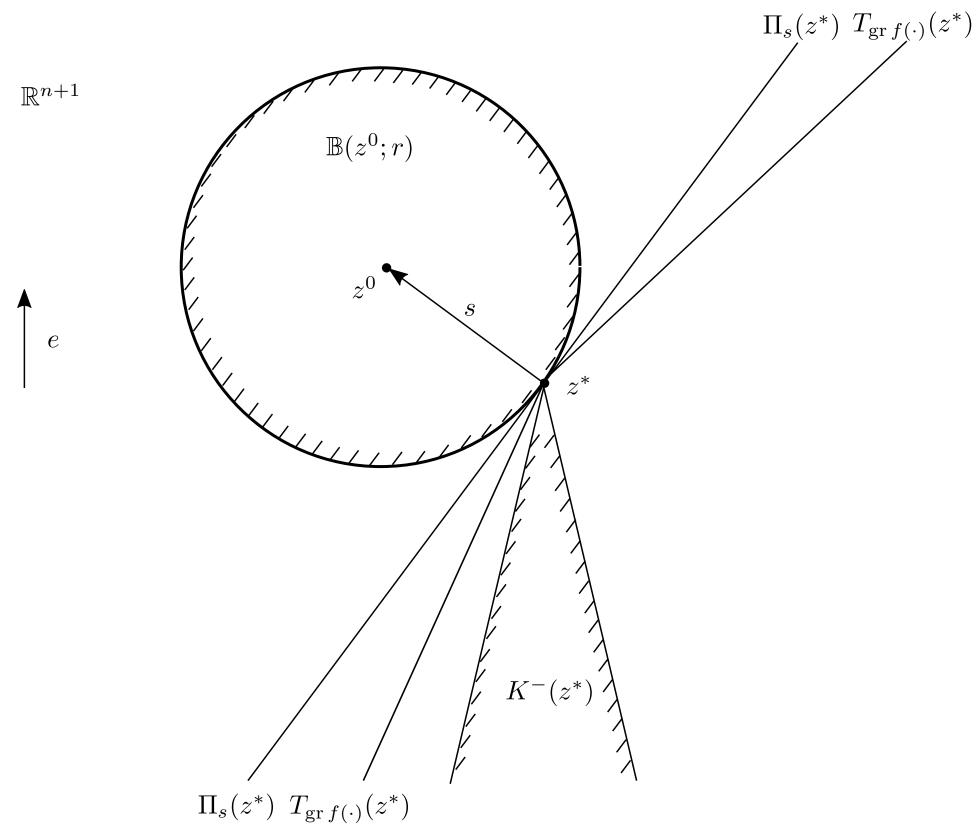

Рис. 18.

$\Pi_s(z^*)$; гиперплоскость $\Pi_s(z^*)$ — над конусом $K^-(z^*)$. Это следует понимать так, что все точки, скажем, множества $\mathbb{B}(z^0; r)$ расположены выше (по отношению к направлению вектора $e = (0, \ldots, 0, 1)$) соответствующих точек гиперплоскости $\Pi_s(z^*)$. □

Обозначим через $\Pi_s^-(z^*)$ и $T^-(z^*)$ множества точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, расположенных соответственно не выше множеств $\Pi_s(z^*)$ и $T_{\mathrm{gr}\,f(\cdot)}(z^*)$. Заметим, что $\Pi_s(z^*)$ представимо в виде $\Pi_s(z^*) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle s, z\rangle \leqslant 0\}$.

Из того, что $T_{\mathrm{gr}\,f(\cdot)}(z^*)$ находится под гиперплоскостью $\Pi_s(z^*)$, следует

$$T^-(z^*) \subset \Pi_s(z^*). \tag{2.2}$$

Далее обратим внимание на конус $K^-(z^*)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. По построению, этот конус расположен под $T_{\mathrm{gr}\,f(\cdot)}(z^*)$ (при этом не исключается, что конусы имеют общие направления). Это означает, что

$$K^-(z^*) \subset T^-(z^*). \tag{2.3}$$

Из включений (2.2), (2.3) следует

$$K^-(z^*) \subset \Pi_s(z^*). \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (2.4) и то, что вершина $z^* = \mathbf{0}$ конуса $K^-(z^*)$ удовлетворяет включению $z^* \in \Pi_s(z^*)$, получаем, что $\Pi_s(z^*)$ — опорная к $K^-(z^*)$ гиперплоскость в точке z^* (см. рис. 18).

Вместе с тем имеем, что s есть вектор внешней нормали к $K^-(z^*)$ в точке $z^* = \mathbf{0}$, то есть $s \in K = \{s \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle s, \overline{k}\rangle \leqslant 0$ для любого $\overline{k} \in K^-(z^*)\}$ (см. рис. 18).

Конус K в $\mathbb{R}^{n+1}$, сопряженный к конусу $K^-(z^*)$, имеет максимальный угол между образующими, равный $\alpha = \pi - \vartheta$ (см. рис. 19).

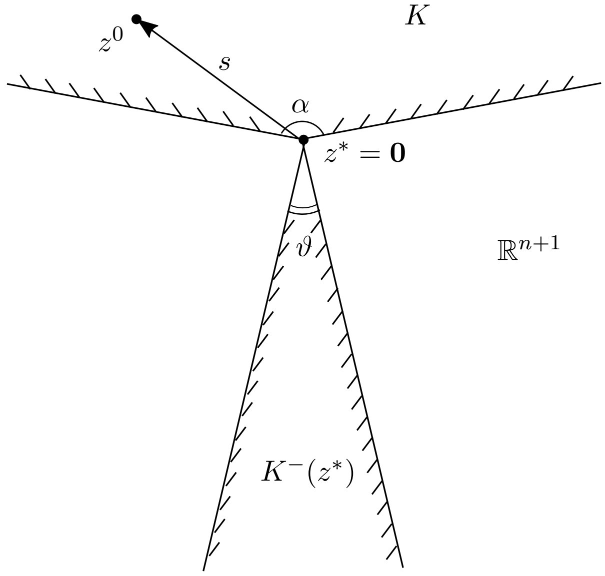

Рис. 19.

Поскольку z^* — ближайшая точка на $\operatorname{gr} f(\cdot)$ и, следовательно, ближайшая точка на $\operatorname{hypo} f(\cdot)$ к $z^0 \in \operatorname{epi} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$, была выбрана произвольно, то получаем, что любой вектор $s = z^0 - z^* \in K$ и, значит, $z^* - z^0 \in -K$. В результате получаем, что для любой точки $z^0 \in \operatorname{epi} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$ имеет место $\alpha_{\operatorname{hypo} f(\cdot)}(z^0) \leqslant \alpha$ и, значит, $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$. Рассуждая аналогично, получаем: для любой точки $z^0 \in \operatorname{hypo} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot) = \operatorname{hypo} f(\cdot) \setminus \operatorname{epi} f(\cdot)$ имеет место $\alpha_{\operatorname{epi} f(\cdot)}(z^0) \leqslant \alpha$ и, значит, $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Из $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ следует $\operatorname{gr} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Очевидно также, что множества $\operatorname{hypo} g(\cdot)$, $\operatorname{epi} g(\cdot)$, $\operatorname{gr} f(\cdot)$ есть элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$.

Вместе с тем утверждение A доказано.

Вернемся к вопросу о сильной α-отделимости множеств $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ в рамках условий, наложенных на функции $f(x)$ и $g(x)$ на с. 112.

Для этого введем функцию $h(x) = 1/2\bigl(f(x) + g(x)\bigr)\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ липшицевы на $\mathbb{R}^n$ с константой L, то и функция $h(x)$ липшицева на $\mathbb{R}^n$ с константой L. Значит, множество $\Gamma = \operatorname{gr} h(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ есть элемент совокупности $\mathcal{B}_\alpha$ с той же константой α, что A и B. Заметим также, что $\Gamma = \operatorname{gr} h(\cdot) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть гомеоморфный образ гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающий $\mathbb{R}^{n+1}$ на два множества, гомеоморфные замкнутому полупространству в $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. рис. 20). Следовательно, множество Γ есть $\mathcal{B}_\alpha$-гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$.

По условиям, наложенным на функции $f(x)$ и $g(x)$, выполняется $f(x) - g(x) \geqslant \gamma^*$, $x \in \mathbb{R}^n$ и, значит, $f(x) - h(x) = 1/2\bigl(f(x) - g(x)\bigr) \geqslant \gamma^*/2$, $h(x) - g(x) = 1/2\bigl(f(x) - g(x)\bigr) \geqslant \gamma^*/2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Зафиксировав некоторое $\rho \in (0, \gamma^*/2)$, получаем

$$g(x) + \rho < h(x) < f(x) - \rho, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что гиперплоскость $\Gamma = \operatorname{gr} h(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ сильно $\mathcal{B}_\alpha$-разделяет множества $A^-_\rho = \bigl\{(x, y)\colon x \in \mathbb{R}^n, y \geqslant f(x) - \rho\bigr\}$ и $B^+_\rho = \bigl\{(x, y)\colon x \in \mathbb{R}^n, y \leqslant g(x) + \rho\bigr\}$.

Действительно, покажем, что при некотором $\omega \in (0, \infty)$

$$A_\omega \subset A^-_\rho, \quad B_\omega \subset B^+_\rho. \tag{2.6}$$

Докажем, например, что при некотором $\omega \in (0, \infty)$ имеет место $A_\omega \subset A^-_\rho$. Предположим противное. Тогда, выбрав произвольно последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$, имеем

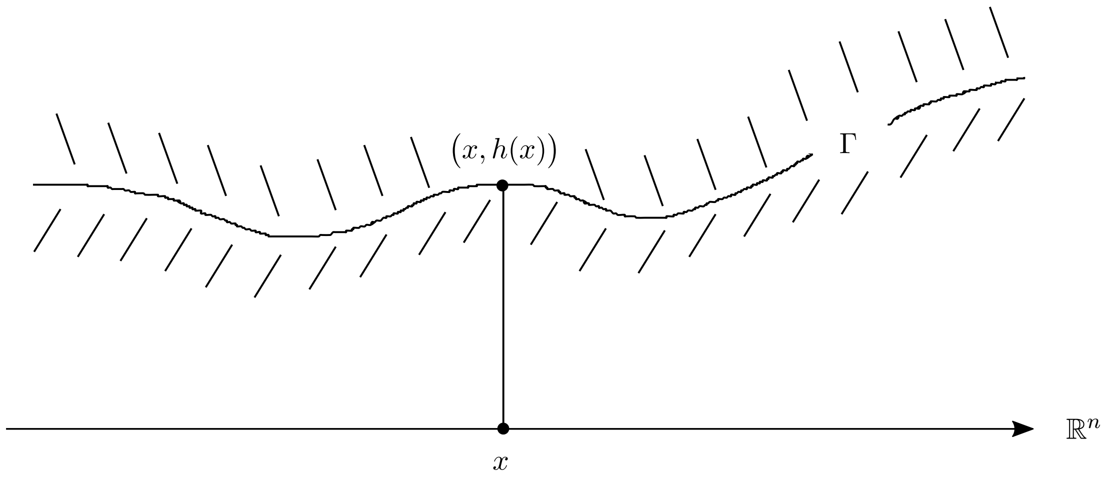

Рис. 20.

$A_{\omega_k} \not\subset A_\rho^-$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $z^{(k)} \in A_{\omega_k} \setminus A_\rho^-$. Для $z^{(k)}$ имеет место представление $z^{(k)} = \big(x^{(k)}, f(x^{(k)}) - \rho - \varkappa^{(k)}\big)$, где $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\varkappa^{(k)} \in (0, \infty)$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\varkappa^{(k)} \downarrow 0$ при $k \to \infty$ (см. рис. 21).

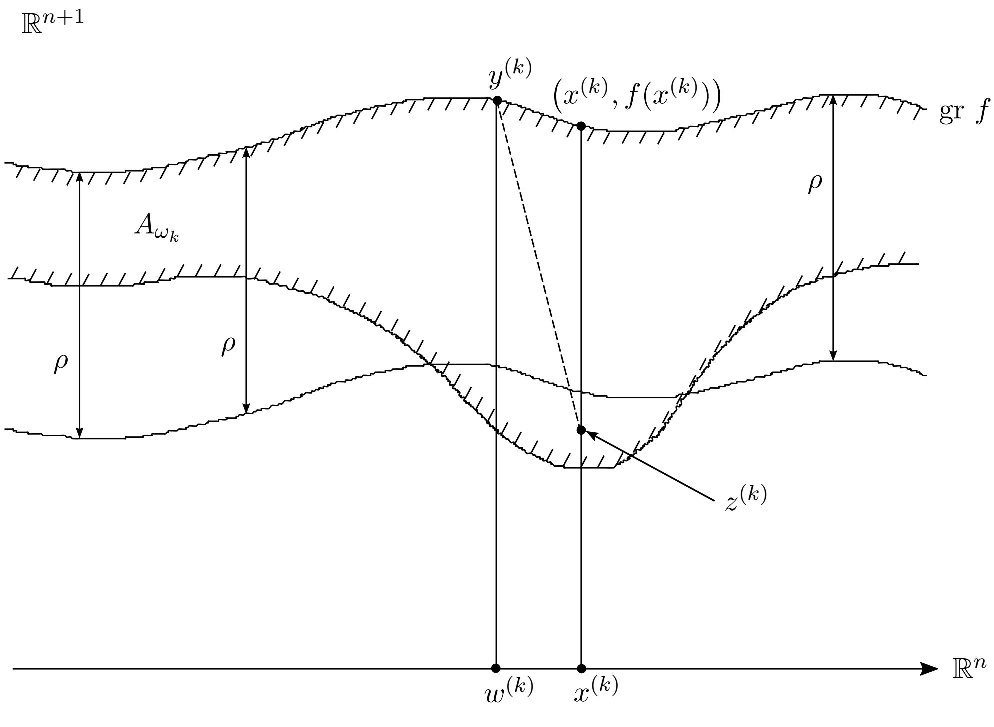

Рис. 21.

Пусть $y^{(k)} = \big(w^{(k)}, f(w^{(k)})\big)$, $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ — ближайшая точка на gr $f(\cdot)$ к точке $z^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Так как $\|y^{(k)} - z^{(k)}\| \leqslant \omega_k$, $k \in \mathbb{N}$ и $\omega_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$, то $\|z^{(k)} - y^{(k)}\| \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. $\|x^{(k)} - w^{(k)}\| \to 0$ и $\big|f(x^{(k)}) - \rho - \varkappa^{(k)} - f(w^{(k)})\big| \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда получаем, что при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$

$$f(x^{(k)}) - f(w^{(k)}) > \rho/2.$$

С другой стороны, так как $\|w^{(k)} - x^{(k)}\| \to 0$ при $k \to \infty$ и функция $f(x)$ липшицева на $\mathbb{R}^n$ с константой L, то

$$f(x^{(k)}) - f(w^{(k)}) \leqslant L\|x^{(k)} - w^{(k)}\| < \rho/2$$

при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$.

Последние два неравенства противоречат друг другу, и, значит, предположение от противного не верно. Отсюда следует $A_\omega \subset A_\rho^-$ при некотором $\omega \in (0,\infty)$. Аналогично, $B_\omega \subset B_\rho^+$ при некотором $\omega \in (0,\infty)$. Включения (2.6) доказаны.

Принимая во внимание (2.6), получаем, что гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$ сильно $\mathcal{B}_\alpha$-разделяет A_ω и B_ω при некотором $\omega \in (0,\infty)$.

Сконструируем теперь α-гиперплоскость Γ^* в $\mathbb{R}^{n+1}$, сильно α-разделяющую A_ω и B_ω, подправив несколько гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$.

Учитывая определение функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и выбор числа ρ, а также положив $\xi^* = \gamma^* - 2\rho > 0$, получаем $\big(g(x)+\rho\big) + \xi^*/2 \leqslant h(x) \leqslant \big(f(x)-\rho\big) - \xi^*/2$, $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. получаем, что гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$ располагается в середине слоя Ω в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, заключенного между графиками функций $f(x)-\rho$ и $g(x)+\rho$, имеющего высоту $\xi^* > 0$ (см. рис. 22).

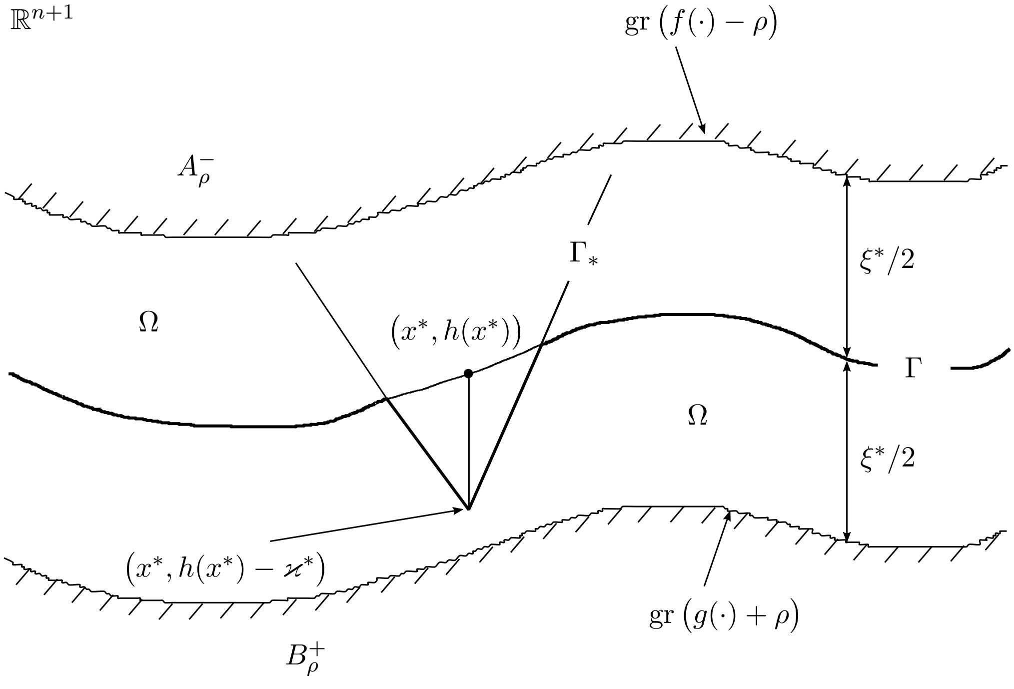

Рис. 22.

Зафиксируем некоторое $\varkappa^* \in (0, \xi^*/2)$ и введем коническую $\varkappa^*$-вариацию гиперплоскости Γ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для этого выберем некоторую точку $\big(x^*, h(x^*)\big) \in \Gamma$ и, опустив ее в $\mathbb{R}^{n+1}$ на величину $\varkappa^*$, получим точку $\big(x^*, h(x^*) - \varkappa^*\big) \in \Omega$. Полагаем

$$q(x) = \big(h(x^*) - \varkappa^*\big) + L\|x - x^*\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, выпукла и $\Gamma_* = \mathrm{gr}\; q(\cdot) \in \mathcal{A}_\alpha$. Введем еще одну функцию

$$\varphi(x) = \min\big(h(x), q(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как функции $h(x)$ и $q(x)$ липшицевы на $\mathbb{R}^n$ с константой L, то и функция $\varphi(x)$ липшицева на $\mathbb{R}^n$ с константой L, и, следовательно, множество $\Gamma^* = \mathrm{gr}\;\varphi(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ — коническая $\varkappa^*$-вариация гиперплоскости Γ удовлетворяет включению $\Gamma^* \in \mathcal{B}_\alpha$ с числом α, $\mathrm{tg}(\alpha/2) = L$. Кроме того, для точек $z = \big(x^*, h(x^*) - \varkappa^* + \nu\big)$, $\nu > 0$ будет $\alpha_{\mathrm{gr}\;\varphi(\cdot)}(z) = \alpha$ при достаточно малых $\nu > 0$.

Учитывая $\mathrm{gr}\;\varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ и равенство $\alpha_{\mathrm{gr}\;\varphi(\cdot)}(z) = \alpha$ при некоторых $z \in \mathrm{epi}\,\varphi(\cdot) \setminus \mathrm{gr}\;\varphi(\cdot)$, получаем $\Gamma^* = \mathrm{gr}\;\varphi(\cdot) \in \mathcal{A}_\alpha$. Также видим, что Γ^* в $\mathbb{R}^{n+1}$ α-разделяет множества A_ρ^- и B_ρ^+ и, следовательно, α-разделяет множества A_ω и B_ω.

Тем самым установлено, что справедливо следующее утверждение о сильной α-отделимости.

Теорема 6. *Пусть в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *заданы два замкнутых множества* $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ *и* $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$, *где функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *липшицевы на* $\mathbb{R}^n$ *с константой Липшица* $L \in (0, \infty)$. *Пусть также* $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \big(f(x) - g(x)\big) \geqslant \gamma^*$ *при некотором* $\gamma^* \in (0, \infty)$.

Тогда множества A *и* B *есть элементы совокупности* $\mathcal{B}_\alpha$, *где* $\operatorname{tg}(\alpha/2) = L$. *В пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$ *существует гиперплоскость* $\Gamma^* \in \mathcal{A}_\alpha$, *сильно разделяющая* A *и* B.

Авторы посвящают статью памяти профессора Е. Л. Тонкова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н. α-множества и их свойства. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2004. 62 с.
2. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
3. Motzkin T. Sur quelques proprietes caracteristiques des ensembles convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1935. Vol. 21. P. 562–567.
4. Половинкин Е.С., Балашов М.Б. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 360 с.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
6. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
7. Bouligand G. Sur les surfaces depourvues de points hyperlimites // Ann. Soc. Polon. Math. 1930. Vol. 9. P. 32–41.

Поступила в редакцию 21.12.2015

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, профессор, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Успенский Александр Александрович, к. ф.-м. н., зав. сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: uspen@imm.uran.ru

V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii

α-sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties

Keywords: convex set, convex hull, α-set, α-hyperplane, α-separability.

MSC: 52A30

The concept of α-set in a finite-dimensional Euclidean space, which is one of generalizations of the notion of a convex set, is introduced. The emergence of this concept is connected with the study of properties of attainability sets of nonlinear controlled systems. The numerical characteristic of nonconvexity degree of a set on the basis of which a classification of sets is carried out is defined in the paper. Analogs of basic concepts from the convex analysis are introduced into consideration and their properties are studied. Statements in the spirit of such theorems from the convex analysis as the theorem of existence of basic hyperplane to a convex set and theorems of separability of convex sets in Euclidean space are formulated and proved. The concept of magoriums of nonconvex sets is studied. Property of a magoriums is a sufficient condition for representation of a closed nonconvex set in the form of crossing of half-spaces in the sense of definitions entered in this work. The obtained results of the theory of separability of nonconvex sets can be extended on a case of hypograph and epigraph of the scalar functions with Lipschitz condition.

REFERENCES

1. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Fomin A.N. *α-mnozhestva i ikh svoistva* (α-sets and their properties), Ekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2004, 62 p.
2. Bruce J.W., Giblin P.J. *Krivye i osobennosti* (Curves and singularities), Moscow: Mir, 1988, 262 p.
3. Motzkin T. Sur quelques proprietes caracteristiques des ensembles convexes, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 1935, vol. 21, pp. 562–567.
4. Polovinkin E.S., Balashov M.B. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and strongly convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007, 360 p.
5. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* (Convex analysis and extremal problems), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.
6. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* (Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus), Moscow: Nauka, 1990, 431 p.
7. Bouligand G. Sur les surfaces depourvues de points hyperlimites, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 1930, vol. 9, pp. 32–41.

Received 21.12.2015

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Professor, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Sector, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: uspen@imm.uran.ru