МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 4

УДК 517.977.8, 519.837.4

© *Л. С. Чиркова*

УКЛОНЕНИЕ В КОНУСЕ ОТ «МЯГКОЙ ПОИМКИ» В ИГРЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача о конфликтном взаимодействии одного убегающего и группы преследователей. Все игроки обладают равными динамическими возможностями. Движение каждого из них описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка. Убегающий обладает полной информацией, а преследователи знают только координаты всех игроков. Поимка понимается как совпадение ускорений, скоростей и координат игроков. Предполагается, что начальное положение, скорость и ускорение убегающего принадлежат заданному конусу. Кроме того, предполагается, что третья производная функции, задающей траекторию движения убегающего, в начальный момент времени также принадлежит этому конусу. Доказано, что если число преследователей меньше размерности пространства, то в игре можно избежать «мягкой поимки».

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, фазовые ограничения, уклонение от встречи в конусе.

Введение

В [1] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников. Показано, что поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

В работе [2] исследована задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследователей, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Доказано, что в игре происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.

В работах [3, 4] рассматривалась задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а закон движения каждого из них — дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Было получено достаточное условие уклонения от встречи при дискриминации преследователей.

Нестационарная задача уклонения в дифференциальных играх второго порядка рассматривалась в работах [5, 6]. В [7] доказано убегание в дифференциальной игре второго порядка одного убегающего от группы преследователей при условии, что убегающий не покидает границы выпуклого конуса. В [8, 9] получены достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от группы преследователей в игре третьего и четвертого порядка с равными возможностями участников.

В данной работе найдены достаточные условия уклонения от встречи при условии, что все участники обладают равными возможностями, закон движения каждого из участников — дифференциальное уравнение четвертого порядка, а убегающий не покидает границы выпуклого конуса. Работа примыкает к исследованиям [10–12].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$x_i^{\mathrm{IV}} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \quad \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0, \quad \dddot{x}_i(0) = \dddot{x}_i^0. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{\mathrm{IV}} = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0, \quad \dddot{y}(0) = \dddot{y}^0. \tag{1.2}$$

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы множества D вида $D = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \ (q_j, y) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, m\}$, где q_j — единичные векторы.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$\begin{gathered} z_i^{\mathrm{IV}} = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad \dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, \\ \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0, \quad \dddot{z}_i(0) = \dddot{z}_i^0 = \dddot{x}_i^0 - \dddot{y}^0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Обозначим через $\operatorname{Int} X$, ∂X, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, границу и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{N}_q = \{1, \ldots, q\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Определение 1. Говорят, что в дифференциальной игре (1.3) из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \dddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0, \dddot{z}_k^0)$ можно избежать «мягкой поимки», если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $v(t) \in S$, что $y(t) \in D$ и $\|z_i(t)\| + \|\dot{z}_i(t)\| + \|\ddot{z}_i(t)\| \neq 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_k$ и всех $t \geqslant 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего E формируется на основе информации о состоянии $Z(s) = (z_1(s), \dot{z}_1(s), \ddot{z}_1(s), \dddot{z}_1(s), \ldots, z_k(s), \dot{z}_k(s), \ddot{z}_k(s), \dddot{z}_k(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_k$, в тот же момент времени. Каждый преследователь обладает информацией о координатах всех игроков в данный момент времени.

§ 2. Решение задачи

Теорема 1. *Если выполнены неравенство $k \leqslant n - 1$ и включения y^0, $\dot{y}^0$, $\ddot{y}^0$, $\dddot{y}^0 \in D$, то в игре* (1.3) *можно избежать «мягкой поимки».*

Так как число преследователей меньше размерности пространства, то можно считать, что $0 \notin \operatorname{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \dddot{z}_i^0\}$. В противном случае убегающий добивается этого условия за сколь угодно малое время. Тогда на основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует вектор $p \in \partial S$ и число $\epsilon > 0$ такие, что $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\dddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \eta_1(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \|z_i(t)\|, \quad \eta_2(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \|\dot{z}_i(t)\|, \quad \eta_3(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \|\ddot{z}_i(t)\|, \quad \eta_4(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \|\dddot{z}_i(t)\|, \\ \eta_5(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |(y(t), q_j)|, \quad \eta_6(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |(\dot{y}(t), q_j)|, \quad \eta_7(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |(\ddot{y}(t), q_j)|, \\ \eta_8(t) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} |(\dddot{y}(t), q_j)|, \quad \delta = \min\{1, \epsilon, \min_{1 \leqslant j \leqslant 8} \sqrt{\eta_j(0)}\}. \end{gathered}$$

Введем также убывающие последовательности τ_j, $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что если

$$\|z_l(t')\| = \delta_j, \quad (z_l(t'), p) > 0, \quad \|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j, \quad (\dot{z}_l(t'), p) > 0, \quad \|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j, \quad (\ddot{z}_l(t'), p) > 0,$$

то $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, или $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, или $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняются равенства $\eta_1(t) = \delta_i$, $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_k$ такой, что

$$\|z_l(t_i)\| = \delta_i, \quad (z_l(t_i), p) > 0, \quad \|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i, \quad (\dot{z}_l(t_i), p) > 0, \quad \|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i, \quad (\ddot{z}_l(t_i), p) > 0,$$

назовем моментом i-го сближения.

Положим $v(t) = 0$, $t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i + \tau_i)$.

При $t=0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_1^i=\dfrac{\delta}{2^{i+2}}$, $\delta_1^i=\dfrac{(4\delta-\tau_1^i)(\tau_1^i)^3}{36}$. Тогда $\tau_i\leqslant\tau_1^i$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\delta}{2^{i+2}}=\dfrac{\delta}{4}=\xi_1$.

Если в момент времени $t=t'$ для некоторого $i\in\mathbb{N}_k$

$$\|z_l(t')\|=\delta_1^i,\ \|\dot z_l(t')\|=\delta_1^i,\ \|\ddot z_l(t')\|=\delta_1^i,\ (z_l(t'),p)>0,\ (\dot z_l(t'),p)>0,\ (\ddot z_l(t'),p)>0,\ (\dddot z_l(t'),p)<-\delta,$$

то при любых управлениях $u_i(t)$, $v(t)$ на $[t',t'+\tau_1^i]$ справедливо неравенство

$$(z_l(t'+\tau_1^i),p)<\delta_1^i+\delta_1^i\tau_1^i+\delta_1^i\frac{(\tau_1^i)^2}{2}-\delta\frac{(\tau_1^i)^3}{3!}+\frac{(\tau_1^i)^4}{4!}<0.$$

Положим $\tau_1=\tau_1^1$, $\delta_1=\delta_1^1$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(z_l(t_i),p)>0$, $\|\dot z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(\dot z_l(t_i),p)>0$, $\|\ddot z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(\ddot z_l(t_i),p)>0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$.

1. Предположим, что

$$(z_l(t_i),\dot z_l(t_i))\neq-\|z_l(t_i)\|\cdot\|\dot z_l(t_i)\|. \tag{2.1}$$

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$, если на всем полуинтервале он не встречает ни одного из преследователей. Если на $[t_i,t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_r, $r\in\mathbb{N}_k\setminus\{l\}$, то $v(s)=u_l(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty}[t_j,t_j+\tau_j)$.

Убегающий будет сближаться с преследователями P_r, $r\in\mathbb{N}_k\setminus\{l\}$, настолько близко и «обходить» их за столь малое время, чтобы для траектории $z_l(t)$ на отрезке $[t_i,t_i+\tau_i]$ при любых управлениях $u_l(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_l(t_i+\tau),\dot z_l(t_i+\tau))\neq-\|z_l(t_i+\tau)\|\cdot\|\dot z_l(t_i+\tau)\|\quad\forall\,\tau\in[0,\tau_i],$$

$$\min_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]}\|z_l(t)\|>\delta_{i+1},\qquad\min_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]}\|\dot z_l(t)\|>\delta_{i+1},\qquad\min_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]}\|\ddot z_l(t)\|>\delta_{i+1}. \tag{2.2}$$

Обозначим через $l_i(\tau)$, $\tau\geqslant0$, прямую, проходящую через точки $x(\tau)=z_l(t_i)+\dot z_l(t_i)\tau$ и $y(\tau)=\dot z_l(t_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_l(t_i)$ и $\dot z_l(t_i)$ и из предположения (2.1) заключаем, что при любом $\tau\geqslant0$ векторы $x(\tau)$, $y(\tau)$ линейно независимы и функция $f(\tau)=\min\limits_{x\in l_i(\tau)}\|x\|>0$. В момент $t=t_i$ определим число

$$\beta_i=\min\{\delta_i^{i+1},\min_{\tau\in[0,\tau_i]}f(\tau)\}. \tag{2.3}$$

Если $v(s)=u_l(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория при $t\in[t_i,t_i+\tau_i]$ имеет вид $z_l^0(t)=x(t-t_i)$, $\dot z_l^0(t)=y(t-t_i)$. Тогда $\|z_l^0(t)\|\geqslant\beta_i$, $\|\dot z_l^0(t)\|\geqslant\beta_i$ для всех $t\in[t_i,t_i+\tau_i]$. Теперь предположим, что на множестве $[t_i,t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^q,t^q+\tau^q)$, $q=1,2,\ldots$, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\tau^q<\xi_{i+1},\quad\xi_{i+1}=\min\left\{\min_p\xi_{i+1}^p,(3\beta_i)^{\frac13}\right\}, \tag{2.4}$$

где $\xi_{i+1}^p>0$ — корень уравнения $\xi_{i+1}^4+4\xi_{i+1}^3\tau_i+6\xi_{i+1}^2\tau_i^2+4\xi_{i+1}\tau_i^3-6\beta_i=0$.

Покажем, что если $v(s)=u_l(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}[t^q,t^q+\tau^q)$, управление $v(s)$ на множестве $\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}[t^q,t^q+\tau^q)$ произвольно, то соответствующая траектория $z_l^r(t)$, $t\in[t_i,t_i+\tau_i]$, такова, что

$$\|z_l^r(t)-z_l^0(t)\|<\frac{\beta_i}{2}, \tag{2.5}$$

$$\|\dot z_l^r(t)-\dot z_l^0(t)\|\leqslant\frac{\beta_i}{2} \tag{2.6}$$

для любого управления $u_l(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i]$.

Пусть $r=1$, $z_l^1(t^1)=z_l^0(t^1)$. Имеем $\|z_l^1(t^1+\tau^1)-z_l^0(t^1+\tau^1)\|\leqslant\dfrac{(\tau^1)^4}{12}$. Тогда при t из отрезка $[t^1+\tau^1,t_i+\tau_i]$ имеет место неравенство $\|z_l^1(t)-z_l^0(t)\|<\dfrac{1}{12}\big((\tau^1)^4+4(\tau^1)^3\tau_i+6(\tau^1)^2\tau_i^2+4\tau^1\tau_i^3\big)$. Поэтому для всех t таких, что $t\in[t_i,t_i+\tau_i]$, выполнено неравенство

$$\|z_l^1(t)-z_l^0(t)\|<\frac{1}{12}\big((\tau^1)^4+4(\tau^1)^3\tau_i+6(\tau^1)^2\tau_i^2+4\tau^1\tau_i^3\big).$$

Аналогично получим, что

$$\|z_l^r(t)-z_l^0(t)\|<\frac{1}{12}\big(\xi_{i+1}^4+4\xi_{i+1}^3\tau_i+6\xi_{i+1}^2\tau_i^2+4\xi_{i+1}\tau_i^3\big)\leqslant\frac{\beta_i}{2},\quad r\in\mathbb{N},\quad t\in[t_i,t_i+\tau_i].$$

Докажем неравенство (2.6).

При $r=1$, $\dot z_l^1(t^1)=\dot z_l^0(t^1)$ имеем $\|\dot z_l^1(t^1+\tau^1)-\dot z_l^0(t^1+\tau^1)\|\leqslant\dfrac{(\tau^1)^3}{6}$. При $t\in[t^1+\tau^1,t_i+\tau_i]$ выполнено неравенство $\|\dot z_l^1(t)-\dot z_l^0(t)\|\leqslant\dfrac{(\tau^1)^3}{6}$, поэтому для всех $t\in[t_i,t_i+\tau_i]$ имеет место $\|\dot z_l^1(t)-\dot z_l^0(t)\|<\dfrac{(\tau^1)^3}{6}$.

Пусть теперь r — произвольное натуральное число. Тогда выполнено следующее неравенство: $\|\dot z_l^r(t)-\dot z_l^0(t)\|\leqslant\sum\limits_{q=1}^{\infty}\dfrac{(\tau^q)^3}{6}<\dfrac{(\xi_{i+1})^3}{6}\leqslant\dfrac{\beta_i}{2}$. Покажем, что $\forall\,\tau\in[0,\tau_i]$

$$(z_l^r(t_i+\tau),\dot z_l^r(t_i+\tau))\neq-\|z_l^r(t_i+\tau)\|\cdot\|\dot z_l^r(t_i+\tau)\|. \tag{2.7}$$

Предположим противное: существуют числа τ_0 из отрезка $[0,\tau_i]$ и положительное b такие, что $z_l^r(t_i+\tau_0)=-b\cdot\dot z_l^r(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (2.5), (2.6) векторы $z_l^0(t_i+\tau_0)$, $\dot z_l^0(t_i+\tau_0)$ можно представить в виде $z_l^0(t_i+\tau_0)=z_l^r(t_i+\tau_0)+x$, $\dot z_l^0(t_i+\tau_0)=\dot z_l^r(t_i+\tau_0)+y$, где x, $y\in\dfrac{\beta_i\cdot S}{2}$.

Рассмотрим множество пар $L=\{\alpha\mid\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^1,\alpha_1+\alpha_2=1\}$. Согласно (2.3) $\min\limits_{\alpha\in L}\|\alpha_1\cdot(z_l^r(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2\cdot(\dot z_l^r(t_i+\tau_0)+y)\|\geqslant\beta_i$. С другой стороны, при $\alpha_1^*=\dfrac{1}{1+b}$, $\alpha_2^*=\dfrac{b}{1+b}$ $\|\alpha_1^*\cdot(z_l^r(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2^*\cdot(\dot z_l^r(t_i+\tau_0)+y)\|<\dfrac{\beta_i}{2}$. Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.7) выполняется при любом τ из $[0,\tau_i]$.

В момент $t=t_i$ по формулам (2.3), (2.4) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+r}=\frac{\xi_{i+1}}{2^r},\quad \delta_{i+1}^{i+r}=\frac{(4\delta-\tau_{i+1}^{i+r})(\tau_{i+1}^{i+r})^3}{36},\quad \tau_{i+1}^{i+1}<\tau_i^{i+1},\quad \sum_{r=1}^{\infty}\tau_{i+1}^{i+r}=\xi_{i+1}.$$

Положим $\delta_{i+1}=\min\left\{\delta_{i+1}^{i+1},\min\limits_{j=5,6,7,8}\sqrt{\eta_j(t_i+\tau_i)}\right\}$, $\tau_{i+1}=\frac{\delta_{i+1}}{2}$.

Если на интервале $(t_i,t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_q, $q\in\mathbb{N}_k\setminus\{l\}$, то убегающий «обходит» их за столь малое время, что $\min\limits_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]}\|z_l(t)\|\geqslant\dfrac{\beta_i}{2}$.

Поскольку $\delta_{i+1}<\tau_{i+1}^{i+1}=\dfrac{\xi_{i+1}}{2}\leqslant\dfrac{\beta_i}{8}$, то справедливо неравенство (2.2).

Теперь покажем, что убегающий не выходит за границы множества D. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[t_i,t_i+\tau_i]=\emptyset$. Тогда на любом полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Это можно сделать в силу неравенств (2.5), (2.6) (β_i мало).

По условию теоремы $y_0 \in D$. Докажем по индукции, что $(y(t), q_j) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ и $j = 1, \ldots, m$. База индукции: пусть $\overline{k} = 1$, $t \in [0, t_1]$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}_m$ выполнено $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 \leqslant 0$, так как y^0, $\dot{y}^0$, $\ddot{y}^0$ и $\dddot{y}^0 \in D$.

Пусть $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 + \dfrac{\tau_1^4}{4!} < 0 \; \forall\, j \in \mathbb{N}_m$. Индукционное предположение: пусть при $\overline{k} = i - 1$ справедливо неравенство $(y(t), q_j) < 0 \; \forall\, t \in [t_{i-2} + \tau_{i-2}, t_{i-1} + \tau_{i-1}] \; \forall\, j \in \mathbb{N}_m$. Докажем для $\overline{k} = i$. При $t \in [t_{i-1} + \tau_{i-1}, t_i]$ выполнено $(y(t), q_j) < -\delta_i^2 < 0 \; \forall\, j \in \mathbb{N}_m$. Пусть $t \in (t_i, t_i + \tau_i]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2 + \dfrac{\tau_i^4}{4!} \leqslant -\delta_i^2 + \left(\dfrac{\delta_i}{2^{i+2}}\right)^4 \dfrac{1}{4!} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Таким образом, для любого $\overline{k} = 1, 2, \ldots$ убегающий не покидает множества D.

2. Рассмотрим ситуацию, когда условие (2.1) не выполнено:

$$(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) = -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\| \tag{2.8}$$

для некоторых l, i. Существует положительное число ϵ_i, $\epsilon_i \in (0, \tau_i)$, такое, что при произвольных $u_r(s)$, $r = 1, \ldots, k$, $r \neq l$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы следующие неравенства: $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|z_r(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1} \; \forall\, r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, $(z_l(t_i + \epsilon_i), p) > 0$ и $y(t) \in D \; \forall\, t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$.

Векторы $z_l(t_i)$, $\dot{z}_l(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_l(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_l(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} \;\;\,1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который

$$(z_l(t_i + \gamma_i), \dot{z}_l(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_l(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i + \gamma_i)\|. \tag{2.9}$$

Покажем, что такое число γ_i существует.

При $t \geqslant t_i$ введем в рассмотрение функции

$$f_1^i(t) = (z_l(t), \psi_i) = \int_{t_i}^{t} \frac{(t-s)^3}{3!} \cdot (u_l(s) - v(s), \psi_i)\, ds,$$

$$f_2^i(t) = (\dot{z}_l(t), \psi_i) = \int_{t_i}^{t} \frac{(t-s)^2}{2} \cdot (u_l(s) - v(s), \psi_i)\, ds,$$

$$f_3^i(t) = (\ddot{z}_l(t), \psi_i) = \int_{t_i}^{t} (t-s) \cdot (u_l(s) - v(s), \psi_i)\, ds, \quad f_4^i(t) = \int_{t_i}^{t} (u_l(s) - v(s), \psi_i)\, ds.$$

Функции $f_1^i(t)$, $f_2^i(t)$, $f_3^i(t)$, $f_4^i(t)$, $t_i \leqslant t \leqslant t_i + \epsilon_i$, удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{f}_1^i(t) = f_2^i(t), \quad \dot{f}_2^i(t) = f_3^i(t), \quad \dot{f}_3^i(t) = f_4^i(t), \quad \dot{f}_4^i(t) = (u_l(t) - v(t), \psi_i). \tag{2.10}$$

Причем $f_1^i(t_i) = f_2^i(t_i) = f_3^i(t_i) = f_4^i(t_i) = 0$. Из уравнений (2.8) видно, что $f_4^i(t) \not\equiv 0$ на $[t_i, t_i + \epsilon_i]$. Действительно, пусть $f_4^i(t) \equiv 0$, $t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$. Тогда $f_3^i(t) = \mathrm{const}$, а $u_l(t) \equiv v(t) \; \forall\, t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$. Если $f_3^i(t) = \mathrm{const}$, на $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, тогда $f_3^i(t) \equiv 0$, следовательно, $f_2^i(t) = \mathrm{const}$ и $f_2^i(t) = 0$, а затем $f_1^i(t) = \mathrm{const}$ и $f_1^i(t) = 0 \; \forall\, t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$. Тогда векторы $z_l(t)$ и $\dot{z}_l(t)$ линейно зависимы на всем отрезке $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, а $u_l(t) \equiv v(t)$ — на $[t_i, t_i + \epsilon_i]$. Но это противоречит выбранному управлению: если справедливо $(u_l(t) - v(t), \psi_i) = 0$, то $(u_l(t), \psi_i) = (v(t), \psi_i) \; \forall\, t \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, а это невозможно.

Множество $G^i = \{t \in (t_i, t_i + \epsilon_i) \; f_4^i(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G^i = \bigcup\limits_j (\alpha_j^i, \beta_j^i)$, где $\{(\alpha_j^i, \beta_j^i)\}$ — взаимно не пересекающаяся не более чем счетная система интервалов.

Пусть (α_j^i, β_j^i) — некоторый интервал из этой системы. Тогда выполнено $f_4^i(\alpha_j^i) = f_4^i(\beta_j^i) = 0$, $f_4^i(t) \not\equiv 0$ на (α_j^i, β_j^i), значит, $f_3^i(t) \not\equiv 0$ на (α_j^i, β_j^i). Если $f_2^i(\alpha_j^i) \neq 0$, тогда $\dot{f}_2^i(t) = f_3^i(t) \neq 0$

и $f_2^i(\beta_j^i) \neq 0$. Следовательно, соотношение (2.9) выполнено при $t_i+\gamma_i=\beta_j^i$. Если же $f_2^i(\alpha_j^i)=0$, то $\dot f_2^i(\alpha_j^i) \neq 0$ и $f_2^i(\beta_j^i) \neq 0$. Следовательно, соотношение (2.9) имеет место при $t_i+\gamma_i=\beta_j^i$. Таким образом, можно добиться того, чтобы векторы $z_l(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_l(t_i+\gamma_i)$ стали линейно независимыми.

Если $(z_l(t_i), \dot z_l(t_i)) \neq -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot z_l(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i=0$.

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$. Но из-за возможности сближения с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, управление убегающего E примет вид $v(s)=u_l(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty}[t_j, t_j+\tau_j)$.

Убегание на $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ доказывается подобно п. 1. Для доказательства достаточно вместо момента t_i, где по предположению п. 1 выполняется соотношение (2.1), подставить момент $t_i+\gamma_i$, в котором мы только что добились выполнения такого условия.

Осталось показать, что убегающий не покидает множества D. Для доказательства воспользуемся той же цепочкой рассуждений, что и в п. 1. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i+\tau_i]=\emptyset$, тогда на любом полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Такое предположение можно сделать, так как при маневрах, позволяющих убежать от остальных $k-1$ преследователей, встречающихся на $[t_i, t_i+\tau_i)$, траектория убегающего будет столь мало отличаться от основной траектории, что не повлияет на то, пересечет убегающий границу множества D или нет.

По условию $y_0 \in D$. Докажем по индукции, что $(y(t), q_j) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ и $j=1,\ldots,m$. База индукции: пусть $\overline{k}=1$, $t \in [0, t_1]$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}_m$ выполнено $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 \leqslant 0$, так как y^0, $\dot y^0$, $\ddot y^0$ и $\dddot y^0 \in D$.

Если $t \in (t_1, t_1+\gamma_1]$, то $(y(t), q_j) < 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}_m$ в силу выбора числа ϵ_1. Если $t \in (t_1+\gamma_1, t_1+\tau_1]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 + \left(\dfrac{\delta}{8}\right)^4 \dfrac{1}{4!} < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$.

Индукционное предположение: пусть при $\overline{k}=i-1$ справедливо неравенство $(y(t), q_j) < 0$ для любых $t \in [t_{i-2}+\tau_{i-2}, t_{i-1}+\tau_{i-1}]$ и $j \in \mathbb{N}_m$. Докажем для $\overline{k}=i$. Пусть $t \in [t_{i-1}+\tau_{i-1}, t_i]$, тогда $(y(t), q_j)=(y(t_{i-1}+\tau_{i-1}), q_j) < -\delta_i^2 < 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}_m$ в силу индукционного предположения. При $t \in (t_i, t_i+\gamma_i]$ неравенство $(y(t), q_j) < 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}_m$ выполняется в силу выбора числа ϵ_i. При $t \in (t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2 + \left(\dfrac{\delta_i}{2^{i+1}}\right)^4 \dfrac{1}{4!} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$.

3. Подведем итог. Стратегия уклонения от преследователей $P_1,\ldots,P_k$ формируется следующим образом: $v(s)=0$, $s \in [0,+\infty) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i+\tau_i)$.

Если выполнено (2.8), то на $[t_i, t_i+\gamma_i)$ управление $v(s)$ задается так, как показано в п. 2.

Иначе $v(s)=u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty}[t_j, t_j+\tau_j)$, на $[t_j, t_j+\tau_j)$ управление $v(s)$ выбирается так, как показано в п. 1.

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Одна дифференциальная игра убегания // ДАН УССР. Серия А. 1989. № 1. С. 71–74.
4. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 998–1004.
5. Петров Н.Н. К нестационарой задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 74–83.

6. Банников А.С. Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 3–10.
7. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов в конусе // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2000. Вып. 2 (19). С. 59–72.
8. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 45–53.
9. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов в игре четвертого порядка // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. Вып. 2. С. 58–102.
10. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 50–59.
11. Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. Вып. 1. С. 3–46.
12. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск. 2009. 266 с.

Поступила в редакцию 18.10.2015

Чиркова Любовь Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: lmvstk@yandex.ru

L. S. Chirkova
Evasion from “soft capture” in a cone in a fourth order game

Keywords: differential game, group pursuit, state constraints, evasion in a cone.

MSC: 49N70, 49N75

A problem of conflict interaction of one evader with a group of pursuers is considered. All players have equal dynamic capabilities. The motion of each player is defined by a fourth order differential equation. An evader has full information, and pursuers know positions of all players only. A capture is defined as equality of accelerations, velocities and positions of players. It is assumed that initial position, velocity and acceleration of an evader are inside of the given cone. It is also assumed that a third order derivative, defining evader’s path, is initially inside of this cone too. It is proved that if the number of pursuers is less than the space dimension, then runaway occurs.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
2. Chernous’ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 11–20.
3. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A differential evasion game, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A*, 1989, no. 1, pp. 71–74 (in Russian).
4. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Group evasion problem for inertial objects of the same type, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 924–929.
5. Petrov N.N. To a nonstationary group pursuit problem with phase constraints, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 75, no. 8, pp. 1525–1531.
6. Bannikov A.S. Evasion from group of non-stationary inertial objects, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 3–10 (in Russian).
7. Chirkova L.S. Evasion from a group of inertial objects in a cone, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2000, no. 2 (19), pp. 59–72 (in Russian).
8. Chirkova L.S. Evasion from a group of inertial objects, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 3, pp. 377–385.
9. Chirkova L.S. Evasion from a group of inertial objects in fourth order game, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2013, no. 2, pp. 58–102 (in Russian).

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 4

10. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 50–59 (in Russian).
11. Bannikov A.S. Some non-stationary problems of group pursuit, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2010, no. 1, pp. 3–46 (in Russian).
12. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

Received 18.10.2015

Chirkova Lyubov' Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: lmvstk@yandex.ru