УДК 519.833

© *В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев, А. С. Горбатов*

РАВНОВЕСИЕ ПО БЕРЖУ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО [1]

В работе построено равновесие по Бержу в модели олигополии Курно. Проведено сравнение равновесий по Бержу и по Нэшу. Выявлены условия, при которых выигрыши игроков в ситуации равновесия по Бержу больше, чем их выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу.

Ключевые слова: олигополия Курно, равновесие по Бержу, равновесие по Нэшу, бескоалиционная игра.

Введение

Во многих крупных областях экономики (таких как металлургия, добыча и переработка нефти, электроника) основная конкурентная борьба происходит между несколькими компаниями, доминирующими на рынке. Первые модели таких рынков — олигополий — появились более ста лет назад в статьях Курно [1], Бертрана [2], Хотеллинга [3]. Моделирование олигополий продолжается и в многочисленных современных работах. Более того, в 2014 г. Нобелевскую премию по экономике «за анализ рыночной власти и регулирования в отраслях с несколькими крупными фирмами» получил Жан Тироль — автор одного из лучших современных учебников по теории несовершенной конкуренции «Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности» [4].

Основной идеей во всех публикациях, изучающих поведение олигополий, является то, что *каждая компания в первую очередь заботится о своей прибыли*. Этому подходу полностью отвечает концепция равновесности по Нэшу [5], активно применяемая при моделировании поведения игроков на конкурентном рынке. Полной противоположностью такому «эгоистическому» равновесию является «альтруистическая» концепция равновесия по Бержу. В рамках этого подхода каждый игрок, не заботясь о себе, выбирает действия (стратегии) так, чтобы максимально увеличить прибыли всех остальных участников рынка. Такая концепция, названная равновесием по Бержу, появилась в России в 1994 г. в процессе ознакомления с опубликованной в 1957 г. во Франции монографией Клода Бержа [6]. Первые работы по концепции равновесности по Бержу принадлежат К.С. Вайсману и В.И. Жуковскому [7–9]. Попав за пределы России, понятие «равновесие по Бержу» постепенно набирает популярность. К настоящему времени количество публикаций, связанных с таким равновесием, уже измеряется десятками. Однако все эти статьи ограничиваются либо чисто теоретическими вопросами, либо приложениями (в основном) к психологии [11]. Работ, посвященных исследованию равновесия по Бержу в экономических задачах, до сих пор не было. Видимо, все это — следствие надолго «напугавшей» экономистов острой рецензии Мартина Шубика [10] на книгу [6] («. . . никакого внимания не уделено приложению к экономике. . . . книга мало интересна для экономистов»). Однако не все так однозначно. В настоящей статье исследовано равновесие по Бержу в олигополии Курно, изучена его связь с равновесием по Нэшу. Выявлены случаи, в которых придерживаться концепции равновесия по Бержу игрокам более выгодно, чем следовать стратегии, диктуемой концепцией равновесия по Нэшу.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14–01–90408 Укр_а) и НАН Украины (грант № 03–01–14).

§ 1. Основные обозначения и определения

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц, которую будем отождествлять с кортежем

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{1.1}$$

Здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots,N\}$, считаем $N>1$; каждый из N игроков, не объединяясь с другими в коалицию, выбирает свою стратегию (действие) $x_i \in \mathbf{X}_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (символ $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$, здесь и далее обозначает k-мерное евклидово действительное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой); в результате такого выбора образуется *ситуация*

$$x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbf{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{X}_i \subseteq \mathbb{R}^n \ \ (n = \sum_{i\in\mathbb{N}} n_i);$$

на множестве $\mathbf{X}$ определена функция выигрыша $f_i(x)$, численно оценивающая качество функционирования i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$); далее $(x\|z_i) = (x_1,\ldots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_N)$ и $f = (f_1,\ldots,f_N)$.

Определение 1. Пара $(x^e, f^e) = ((x_1^e,\ldots,x_N^e),(f_1(x^e),\ldots,f_N(x^e))) \in \mathbf{X}\times\mathbb{R}^N$ называется *равновесием по Нэшу* в игре (1.1), если

$$\max_{x_i\in\mathbf{X}_i} f_i(x^e\|x_i) = f_i(x^e) \quad (i\in\mathbb{N}); \tag{1.2}$$

ниже x^e называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в игре (1.1).

Определение 2. Пара $(x^B, f^B) = \big((x_1^B,\ldots,x_N^B),(f_1(x^B),\ldots,f_N(x^B))\big) \in \mathbf{X}\times\mathbb{R}^N$ называется *равновесием по Бержу* в игре (1.1), если

$$\max_{x\in\mathbf{X}} f_i(x\|x_i^B) = f_i(x^B) \quad (i\in\mathbb{N}); \tag{1.3}$$

далее x^B называется *ситуацией равновесия по Бержу* в игре (1.1).

§ 2. Олигополия Курно и равновесные стратегии

В 1838 г. в работе [1] Курно рассмотрел рынок, на котором доминирует несколько крупных игроков, производящих один и тот же товар. В [1] постулируется, что участники рынка конкурируют за счет количества поставляемого на рынок товара. Цена же на него устанавливается в результате уравновешивания спроса и предложения. Такая модель впоследствии была названа *олигополией Курно*.

Итак, полностью придерживаясь этой модели ценообразования, рассмотрим олигополию Курно. А именно, рынок однородного продукта, на котором взаимодействуют N игроков — производителей. Будем считать, что всем им присвоены порядковые номера от 1 до N. Множество игроков $\{1,2,\ldots,N\}$ обозначим через $\mathbb{N}$. Объем выпущенной i-ым производителем ($i\in\mathbb{N}$) за некоторый (заданный априори) промежуток времени продукции обозначим через q_i. При этом каждый из игроков не может поставить на рынок товар в количестве меньшем, чем $\alpha > 0$, и большем, чем β, то есть выполнены неравенства

$$\alpha \leqslant q_i \leqslant \beta \quad (i = 1,\ldots,N). \tag{2.1}$$

Правое неравенство в (2.1) просто означает тот факт, что производственные мощности каждого из производителей физически ограничены. Здесь для простоты считаем, что все эти мощности одинаковы. Суть левого неравенства из (2.1) в том, что в модели присутствует некий арбитр (например, государство на рынке электроэнергии). Этот арбитр допускает на рынок только достаточно крупных игроков. А именно, тех, кто гарантирует, независимо от сложившейся на рынке цены, поставку товара в размере не менее заранее определенной величины α.

Издержки производства i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$) предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной им продукции q_i и могут быть представлены в виде cq_i+d, здесь c и d соответственно средние переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным — аренда помещений, земли, станков, лицензий и т. п.).

На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от общего количества $\bar{q} = q_1+q_2+\ldots+q_N$ поступившего на продажу товара. Считаем, что цена p товара линейно зависит от предложения, а именно, представляем ее в виде

$$p(\bar{q}) = a - b\bar{q}, \tag{2.2}$$

где $a = \text{const} > 0$ — начальная цена товара, а постоянный положительный коэффициент эластичности $b > 0$ показывает, насколько «падает» цена при поступлении в продажу единицы продукции.

Предположим, что цена определяется так, чтобы уравновесить спрос и предложение. Это означает, что каждый из производителей продает все, что производит. Выручка i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$) при этом составляет

$$p(\bar{q})q_i = (a - b\bar{q})q_i = \Big[a - b\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\Big]q_i,$$

а его *прибыль* (выручка за вычетом издержек) будет

$$\pi_i(q_i,\ldots,q_N) = \Big[a - b\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\Big]q_i - (cq_i + d). \tag{2.3}$$

Предполагается также, что, определяя свой объем производства, руководство каждой фирмы-производителя ориентируется на «рациональное» поведение своих конкурентов.

Математическая модель рассмотренного взаимодействия представляет собой бескоалиционную игру N лиц:

$$\langle \mathbb{N}, \{\mathbf{Q}_i = [\alpha;\beta]\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\pi_i(q_1,\ldots,q_N) \div (2.3)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{2.4}$$

Здесь, как и в (1.1), $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots,N\}$ — множество порядковых номеров игроков, $\mathbf{Q}_i = [\alpha;\beta]$ — множество стратегий игрока i ($i \in \mathbb{N}$). Ситуации $q = (q_1,\ldots,q_N) \in \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 \times \ldots \times \mathbf{Q}_N$, а функция выигрыша i-го игрока $\pi_i(q) = \pi_i(q_1,\ldots,q_N)$ определена в (2.3).

Утверждение 1. *Если $a > c$, то ситуацией равновесия по Бержу в* (2.4) *будет $q^B = (q_1^B, q_2^B, \ldots, q_N^B)$, где $q_i^B = \alpha$ ($i \in \mathbb{N}$), а выигрыши игроков при этом —*

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = [a - Nb\alpha]\alpha - (c\alpha + d) = [a-c]\alpha - bN\alpha^2 - d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ситуация равновесия по Бержу в игре (2.4) определяется системой из N неравенств:

$$\pi_i(q\|q_i^B) \leqslant \pi_i(q^B) \quad \forall\, q \in \mathbf{Q} \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{2.5}$$

где, напомним, $(q\|q_i^B) = (q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_i^B, q_{i+1}, \ldots, q_N)$.

В силу (2.3) неравенства (2.5) принимают вид

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\left[a - b\left(q_1^B + q_2 + \ldots + q_N\right)\right] q_1^B - (cq_1^B + d) & \leqslant & \left[a - b\left(q_1^B + q_2^B + \ldots + q_N^B\right)\right] q_1^B - (cq_1^B + d),\\
\left[a - b\left(q_1 + q_2^B + \ldots + q_N\right)\right] q_2^B - (cq_2^B + d) & \leqslant & \left[a - b\left(q_1^B + q_2^B + \ldots + q_N^B\right)\right] q_2^B - (cq_2^B + d),\\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\\
\left[a - b\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_N^B\right)\right] q_N^B - (cq_N^B + d) & \leqslant & \left[a - b\left(q_1^B + q_2^B + \ldots + q_N^B\right)\right] q_N^B - (cq_N^B + d)
\end{array}\right.$$

и остаются справедливыми при всех $q_i \in \mathbf{Q}_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

Легко заметить, что ситуацией равновесия по Бержу в (2.4) будет $q^B = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$, при этом равновесные по Бержу выигрыши π_i^B ($i \in \mathbb{N}$) составят

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = [a - Nb\alpha]\alpha - (c\alpha + d) = [a-c]\alpha - bN\alpha^2 - d.$$

Действительно, максимально сокращая поставку на рынок собственной продукции, каждый i-й игрок ($i \in \mathbb{N}$) тем самым увеличивает прибыль всех остальных участников игры (2.4). $\square$

Перейдем теперь к равновесию по Нэшу в игре (2.4).

Утверждение 2. *Если $a > c$, то ситуацией равновесия по Нэшу в (2.4) будет*

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, \ldots, q_N^e),$$

где для каждого $i \in \mathbb{N}$ равновесная стратегия

$$q_i^e = \begin{cases} \alpha, & \textit{если}\ \dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha, \\ \dfrac{a-c}{b(N+1)}, & \textit{если}\ \alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta, \\ \beta, & \textit{если}\ \dfrac{a-c}{b(N+1)} \geqslant \beta. \end{cases} \tag{2.6}$$

При этом выигрыши игроков ($i \in \mathbb{N}$) равны

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \begin{cases} (a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d, & \text{если}\ \dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha, \\ \dfrac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} - d, & \text{если}\ \alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta, \\ (a-c)\beta - bN\beta^2 - d, & \text{если}\ \dfrac{a-c}{b(N+1)} \geqslant \beta. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ситуация равновесия по Нэшу в (2.4) определяется системой равенств (см. определение 1)

$$\begin{aligned} &\pi_1(q^e) = \max_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \pi_1(q^e \| q_1) = \max_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1 + q_2^e + \ldots + q_N^e)]q_1 - (cq_1 + d)\}, \\ &\pi_2(q^e) = \max_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \pi_2(q^e \| q_2) = \max_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2 + \ldots + q_N^e)]q_2 - (cq_2 + d)\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pi_N(q^e) = \max_{q_N \in [\alpha;\beta]} \pi_N(q^e \| q_N) = \max_{q_N \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2^e + \ldots + q_N)]q_N - (cq_N + d)\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В (2.7), так же как и выше, для любого $i \in \mathbb{N}$ через $(q^e \| q_i)$ обозначена ситуация q^e, в которой стратегия i-го игрока q_i^e заменена на q_i.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ максимум функции $\pi_i(q^e \| q_i)$ по переменной q_i достигается при выполнении двух требований:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial \pi_i(q^e \| q_i)}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_i^e} = \left.\big(a - 2bq_i - b(q_1^e + \ldots + q_{i-1}^e + q_{i+1}^e + \ldots + q_N^e) - c\big)\right|_{q_i = q_i^e} = 0, \\ &\left.\frac{\partial^2 \pi_i(q^e \| q_i)}{\partial q_i^2}\right|_{q_i = q_i^e} = -2b < 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Второе условие из (2.8) имеет место, поскольку коэффициент эластичности $b > 0$, а из первого равенства при каждом $i \in \mathbb{N}$ получаем систему N линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2q_1^e + q_2^e + q_3^e + \ldots + q_N^e = \dfrac{a-c}{b}, \\ q_1^e + 2q_2^e + q_3^e + \ldots + q_N^e = \dfrac{a-c}{b}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1^e + q_2^e + q_3^e + \ldots + 2q_N^e = \dfrac{a-c}{b}, \end{cases}$$

решением которой будет ситуация

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, \dots, q_N^e) = \left(\frac{a-c}{(N+1)b}, \frac{a-c}{(N+1)b}, \dots, \frac{a-c}{(N+1)b}\right).$$

При выполнении условия $\alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta$ найденные q_i^e ($i \in \mathbb{N}$) доставляют максимальное значение функций $\pi_i(q^e \| q_i)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, а следовательно, являются равновесными по Нэшу стратегиями в игре (2.4).

Если же $\dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha$, то, в силу второго неравенства из (2.8), на отрезке $[\alpha; \beta]$ каждая из функций $\pi_i(q^e \| q_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) монотонно убывает. Следовательно, максимумы в (2.7) достигаются при $q_i^e = \alpha$ ($i \in \mathbb{N}$).

В случае когда $\dfrac{a-c}{b(N+1)} \geqslant \beta$, функции $\pi_i(q^e \| q_i)$ при всех $i \in \mathbb{N}$ будут уже монотонно возрастающими на $[\alpha; \beta]$. Соответственно, равенства (2.7) выполняются при $q_i^e = \beta$ ($i \in \mathbb{N}$).

Далее, объединяя все три приведенных случая, видим, что равновесные по Нэшу стратегии в (2.4) определяются формулой (2.6).

Перейдем к построению выигрышей $\pi_i(q^e)$ в найденной ситуации (2.6) ($i \in \mathbb{N}$). Подставив (2.6) в функции выигрыша (2.3), для каждого i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$) получим равновесные по Нэшу выигрыши в игре (2.4). А именно, при $\dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha$ приходим к

$$\pi_i^e = \pi_i(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = [a - bN\alpha]\,\alpha - (c\alpha + d) = (a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d.$$

Если $\dfrac{a-c}{b(N+1)} \geqslant \beta$, то равновесный по Нэшу выигрыш i-го игрока π_i^e будет

$$\pi_i^e = \pi_i(\beta, \beta, \dots, \beta) = [a - bN\beta]\,\beta - (c\beta + d) = (a-c)\beta - bN\beta^2 - d.$$

Наконец, в случае $\alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta$ он составит

$$\pi_i^e = \pi_i\left(\frac{a-c}{(N+1)b}, \frac{a-c}{(N+1)b}, \dots, \frac{a-c}{(N+1)b}\right) = \left[a - bN\frac{a-c}{(N+1)b}\right]\frac{a-c}{(N+1)b} - \left(c\frac{a-c}{(N+1)b} + d\right) =$$

$$= \frac{(a-c)^2}{(N+1)b} - \frac{(a-c)^2}{(N+1)b} \cdot \frac{N}{N+1} - d = \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} - d.$$

Таким образом, выигрыш i-го игрока в ситуации равновесия по Нэшу имеет вид

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \begin{cases} (a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d, & \text{если } \dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha, \\ \dfrac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} - d, & \text{если } \alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta, \\ (a-c)\beta - bN\beta^2 - d, & \text{если } \dfrac{a-c}{b(N+1)} \geqslant \beta. \end{cases}$$

□

§ 3. Сравнение равновесных по Бержу выигрышей с равновесными по Нэшу

В этом параграфе проведем сравнение выигрышей, которые получат игроки, воспользовавшись ситуацией равновесия по Бержу, с теми выигрышами, которые ожидают их в ситуации равновесия по Нэшу. Для этого опять-таки рассмотрим три случая.

Случай I. При $\dfrac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha$ равновесные по Нэшу стратегии x_i^e, определенные в (2.6), совпадают с их равновесными по Бержу стратегиями $x_i^B = \alpha$ ($i \in \mathbb{N}$). Следовательно, игроки, придерживаясь ситуации равновесия по Нэшу, получат такие же выигрыши, какие они получили бы, придерживаясь ситуации равновесия по Бержу, а именно:

$$\pi_i^e = \pi_i^B \quad \text{при} \quad \frac{a-c}{b(N+1)} \leqslant \alpha. \tag{3.1}$$

Случай II. Если выполнено неравенство $\alpha < \dfrac{a-c}{b(N+1)} < \beta$, то выигрыш i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$) в ситуации равновесия по Нэшу будет

$$\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} - d,$$

а равновесный по Бержу выигрыш составит

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = \alpha[a-c-Nb\alpha] - d.$$

Их разность

$$\pi_i^e - \pi_i^B = \left(\frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} - d\right) - \big((a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d\big) =$$

$$= bN\alpha^2 - (a-c)\alpha + \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} = bN \cdot \left(\alpha - \frac{a-c}{(N+1)b}\right) \cdot \left(\alpha - \frac{a-c}{N(N+1)b}\right).$$

Поскольку число игроков $N > 1$ и $a - c > 0$, то

$$\frac{a-c}{N(N+1)b} < \frac{a-c}{(N+1)b}.$$

А в силу того, что $\alpha > 0$ и коэффициент эластичности $b > 0$, то разность $\pi_i^e - \pi_i^B$ положительна при

$$0 < \alpha < \frac{a-c}{N(N+1)b},$$

отрицательна при

$$\frac{a-c}{N(N+1)b} < \alpha < \frac{a-c}{(N+1)b}$$

и равна нулю, если

$$\alpha = \frac{a-c}{N(N+1)b}.$$

Таким образом, для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \pi_i^e > \pi_i^B, & \text{если } \alpha < \dfrac{a-c}{N(N+1)b} \text{ и } \dfrac{a-c}{(N+1)b} < \beta, \\ \pi_i^e = \pi_i^B, & \text{если } \alpha = \dfrac{a-c}{N(N+1)b} \text{ и } \dfrac{a-c}{(N+1)b} < \beta, \\ \pi_i^e < \pi_i^B, & \text{если } \dfrac{a-c}{N(N+1)b} < \alpha < \dfrac{a-c}{(N+1)b} < \beta. \end{cases} \tag{3.2}$$

Наконец, рассмотрим последний случай.

Случай III. При $\alpha < \beta \leqslant \dfrac{a-c}{(N+1)b}$ равновесной по Нэшу стратегией i-го производителя будет поставка на рынок максимально возможного количества товара, то есть $x_i^e = \beta$ ($i \in \mathbb{N}$). А его прибыль в ситуации равновесия по Нэшу составит

$$\pi_i^e = (a-c)\beta - bN\beta^2 - d.$$

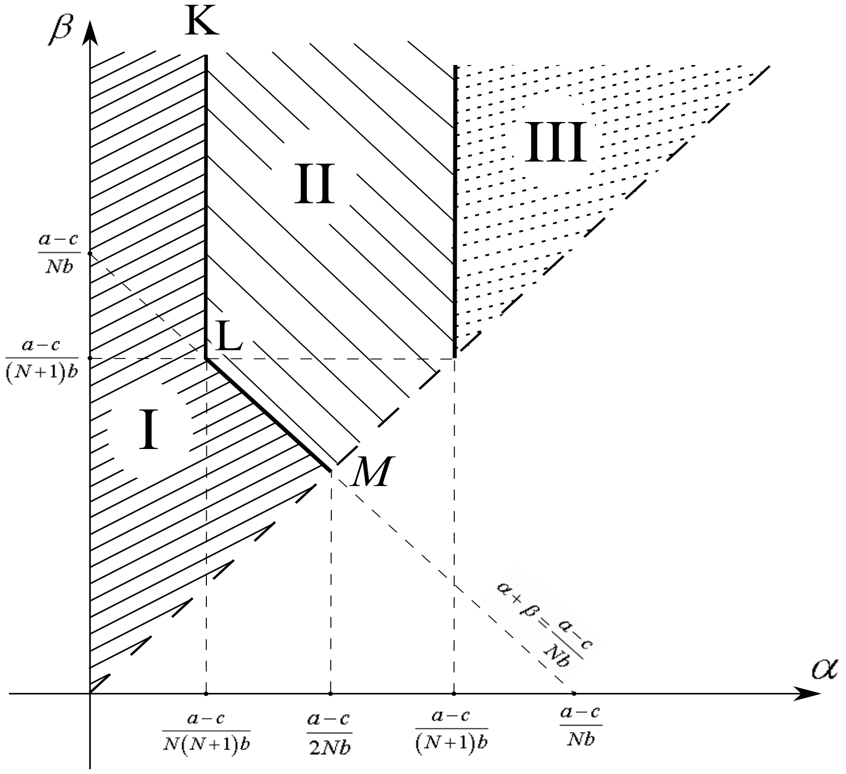

Рис. 1. Сравнение выигрышей в ситуациях равновесия по Бержу и по Нэшу

В ситуации равновесия по Бержу игрок должен снизить поставку продукта до минимально разрешенного, а именно $x_i^B = \alpha$ ($i \in \mathbb{N}$). Его равновесный по Бержу выигрыш при этом будет

$$\pi_i^B = (a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d.$$

Рассмотрим разность в выигрышах, которую получат участники олигополии (2.4) в ситуациях равновесия по Нэшу и по Бержу. Так, для игрока i ($i \in \mathbb{N}$) она составит

$$\pi_i^e - \pi_i^B = (a-c)\beta - bN\beta^2 - d - \big[(a-c)\alpha - bN\alpha^2 - d\big] =$$
$$= (a-c)(\beta-\alpha) - bN(\beta^2-\alpha^2) = (\beta-\alpha)\cdot[a-c-bN(\beta+\alpha)].$$

Так как $\beta > \alpha$, то знак приведенной разности совпадает со знаком убывающей линейной функции

$$a - c - bN(\alpha+\beta).$$

Эта функция меняет знак при $\alpha+\beta = \dfrac{a-c}{bN}$. Значит, разность $\pi_i^e - \pi_i^B$ равна нулю при $\alpha+\beta = \dfrac{a-c}{bN}$ (отрезок LM на рис. 1). При $\alpha+\beta < \dfrac{a-c}{bN}$ разность $\pi_i^e - \pi_i^B$ положительна, а в случае $\alpha+\beta > \dfrac{a-c}{bN}$ она будет отрицательной.

Следовательно, при $\alpha < \beta \leqslant \dfrac{a-c}{(N+1)b}$ для выигрышей i-го игрока в ситуации равновесия по Бержу π_i^B и в ситуации равновесия по Нэшу π_i^e имеет место соотношение

$$\begin{cases} \pi_i^e > \pi_i^B, & \text{если } \alpha+\beta < \dfrac{a-c}{Nb} \text{ и } \alpha<\beta, \\ \pi_i^e = \pi_i^B, & \text{если } \alpha+\beta = \dfrac{a-c}{Nb} \text{ и } \alpha<\beta, \\ \pi_i^e < \pi_i^B, & \text{если } \alpha+\beta > \dfrac{a-c}{Nb} \text{ и } \alpha<\beta. \end{cases} \tag{3.3}$$

Далее, объединяя все три случая, из формул (3.1), (3.2) и (3.3) получим полное сравнение равновесных по Бержу и по Нэшу выигрышей для i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$) в игре (2.4) (см. рис. 1). В области I, изображенной на рис. 1, его выигрыш π_i^e в ситуации равновесия по Нэшу будет больше, чем выигрыш π_i^B, равновесный по Бержу.

В области II, наоборот, равновесие по Бержу доставляет игроку i ($i \in \mathbb{N}$) выигрыш больший, чем выигрыш в ситуации равновесия по Нэшу.

В области III и на ломанной KLM выигрыши игроков в ситуациях равновесия по Бержу и по Нэшу будут одинаковы.

Замечание 1. Утверждения 1, 2 и § 3 обосновывают следующий практический прием выбора решения (набора стратегий игроков) в модели олигополии Курно.

I этап. Используя постоянные a, b, c и N, найти 4 числа:

$$\frac{a-c}{N(N+1)b}, \quad \frac{a-c}{2Nb}, \quad \frac{a-c}{(N+1)b}, \quad \frac{a-c}{Nb}.$$

II этап. С помощью этих чисел построить рисунок 1, где выделить области I, II, III.

III этап. Выяснить значения α^* и β^*, образующие «коридор поставок» q_i.

IV этап. Найти точку (α^*, β^*) на построенном рисунке 1. Затем выяснить, в какой из трех областей расположена точка (α^*, β^*).

Наконец, с помощью утверждений 1, 2 и из § 3 выписать явный вид равновесного решения, то есть равновесную ситуацию и выигрыши игроков в ней.

Заключение

В заключение отметим еще раз: данная работа «ломает» «навязанный» Мартином Шубиком стереотип о том, что «альтруистическая» концепция равновесия по Бержу не применима в задачах экономики. Мы надеемся, что эта работа, впервые показавшая, что равновесие по Бержу в экономических моделях может быть более эффективным, чем равновесие по Нэшу, не долго будет оставаться единственным приложением концепции равновесия по Бержу к экономике. А само равновесие по Бержу займет в экономике достойное место, такое же, какое оно уже занимает психологии и социологии (см., например, обзор [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cournot A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris: Hachette, 1838.
2. Bertrand J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses // Journal des Savants. 1883. Vol. 67. P. 499–508.
3. Hotelling H. Stability in competition // Economic Journal. 1929. Vol. 39. P. 41–57.
4. Tirole J. The theory of industrial organization. Cambridge: MIT press, 1988. 479 p.
5. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. Vol. 36. P. 48–49.
6. Berge C. Théorie générale des jeux á n personnes games. Paris: Gauthier–Villars, 1957. 114 p.
7. Вайсман К.С. Равновесие по Бержу: автореферат дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. СПбГУ, 1995. 15 с.
8. Vaisman K.S. The Berge equilibrium for linear-quadratic differential game // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts of the Third International Workshop. Orekhovo-Zuevo. Russia. 1994. P. 96.
9. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 319 с.
10. Shubik M. Review of C. Berge «General theory of n-person games» // Econometrica. 1961. Vol. 29. № 4. P. 821.
11. Colman A.M., Körner T.W., Musy O., Tazdait T. Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria // Journal of Mathematical Psychology. 2011. Vol. 55. № 2. P. 166–175.

Поступила в редакцию 18.05.2015

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Кудрявцев Константин Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
E-mail: kudrkn@gmail.com

Горбатов Антон Сергеевич, аспирант, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: gorbatovanton@gmail.com

V. I. Zhukovskii, K. N. Kudryavtsev, A. S. Gorbatov

The Berge equilibrium in Cournot's model of oligopoly

Keywords: Cournot's oligopoly, Berge equilibrium, Nash equilibrium, non-cooperative game.

MSC: 91A10, 91B26

In many large areas of the economy (such as metallurgy, oil production and refining, electronics), the main competition takes place among several companies that dominate the market. The first models of such markets — oligopolies were described more than a hundred years ago in articles by Cournot, Bertrand, Hotelling. Modeling of oligopolies continues in many modern works. Moreover, in 2014 Nobel Prize in Economics "for his analysis of market power and regulation in sectors with few large companies" was received by Jean Tirole — the author of one of the best modern textbooks on the theory of imperfect competition "The Theory of Industrial Organization".

The main idea of all these publications, studying the behavior of oligopolies, is that *every company is primarily concerned with its profits.* This approach meets the concept of Nash equilibrium and is actively used in modeling the behavior of players in a competitive market. The exact opposite of such "selfish" equilibrium is "altruistic" concept of Berge equilibrium. In this approach, each player, without having to worry about himself, choose his actions (strategies) trying to maximize the profits of all other market participants. This concept called Berge equilibrium appeared in Russia in 1994 in reference to the France Claude Berge monograph published in 1957. The first works on the concept of Berge equilibrium belong to K. S. Vaisman and V. I. Zhukovskii. Once outside Russia, the concept of "Berge equilibrium" is slowly gaining popularity. To day, the number of publications related to this balance is already measured in tens. However, all of these items are limited to purely theoretical issues, or, in general, to psychology applications. Works devoted to the study of Berge equilibrium in economic problems, were not seen until now. It's probably a consequence of Martin Shubik's review ("...no attention is paid to the application to the economy. ...the book is of little interest for economists") of the Berge's book, it "scared" economists for a long time. However, it is not so simple. In this article, Berge equilibrium is considered in Cournot oligopoly, its relation to Nash equilibrium is studied. Cases are revealed in which players gain more profit by following the concept of Berge equilibrium, than by using strategies dictated by Nash equilibrium.

REFERENCES

1. Cournot A. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette, 1838, 198 p.
2. Bertrand J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses, *Journal des Savants*, 1883, vol. 67, pp. 499–508.
3. Hotelling H. Stability in competition, *Economic Journal*, 1929, vol. 39, pp. 41–57.
4. Tirole J. *The theory of industrial organization*, Cambridge: MIT press, 1988, 479 p.
5. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games, *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*, 1950, vol. 36, pp. 48–49.
6. Berge C. *Théorie générale des jeux á n personnes games*, Paris: Gauthier–Villars, 1957, 114 p.
7. Vaisman K.S. The Berge equilibrium, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, St. Petersburg, 1995, 15 p (in Russian).

8. Vaisman K.S. The Berge equilibrium for linear-quadratic differential game, *Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts of the Third International Workshop, Orekhovo-Zuevo, Russia*, 1994, p. 96.
9. Zhukovskii V.I., Chikrii A.A. *Lineino-kvadratichnye differentsial'nye igry* (Linear-quadratic differential games), Kiev: Naukova Dumka, 1994, 319 p.
10. Shubik M. Review of C. Berge "General theory of n-person games", *Econometrica*, 1961, vol. 29, no. 4, p. 821.
11. Colman A.M., Körner T.W., Musy O., Tazdait T. Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria, *Journal of Mathematical Psychology*, 2011, vol. 55, no. 2, pp. 166–175.

Received 18.05.2015

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Kudryavtsev Konstantin Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.
E-mail: kudrkn@gmail.com

Gorbatov Anton Sergeevich, Post-Graduate Student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: gorbatovanton@gmail.com