

УДК 519.65

© А. С. Караваев, С. П. Копысов, И. М. Кузьмин

**МЕТОД КОНСЕРВАТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
НА НЕСТЫКУЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТКАХ¹**

Рассматривается задача консервативной интерполяции расчетных параметров между нестыкующимися поверхностными сетками. Разработан метод интерполяции на основе воксельного представления расчетной сетки с последующей оценкой площади пересечения каждого вокселя с ячейками сетки. Представление массы ячеек результирующей сетки осуществляется через линейную комбинацию известных масс ячеек базовой сетки. Метод позволяет рассматривать задачи интерполяции на криволинейных поверхностях, когда определение геометрического пересечения ячеек сеток является невозможным. Рассмотрены примеры интерполяции данных на основе различных функций на нестыкующихся сетках, описывающих плоские и криволинейные поверхности. Представлены результаты сравнения работы метода воксельной интерполяции с алгоритмом интерполяции на основе функций радиального базиса различных классов гладкости.

Ключевые слова: консервативная интерполяция, сетка вокселей, нестыкующиеся поверхностные сетки.

Введение

При решении сопряженных задач взаимодействия потока газа и деформируемой конструкции (тела) согласование получаемых решений на границах подобластей является неотъемлемым и весьма важным этапом, существенно влияющим на адекватность получаемых результатов. Под согласованием понимается прежде всего совокупность операций по обмену результатами вычислений между соответствующими решениями подзадач, интерполяции значений функций между узлами несогласованных расчетных сеток и, возможно, реализация семейства итерационных процедур при жестком связывании.

Рассмотрим задачу интерполяции решения с одной расчетной сетки на другую, каждая из которых может содержать произвольные пространственные ячейки. Пусть функция $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, определена на всей области задачи $\Omega \subset R^3$. Будем рассматривать ρ как функцию плотности, которая задается ее средним значением в каждой ячейке t^a базовой сетки \mathcal{T}^a :

$$\bar{\rho}^{t^a} = \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV / V^{t^a} = m^{t^a} / V^{t^a},$$

где V^{t^a} и $m^{t^a} = \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV$ — объем и масса t^a . Масса всей сетки \mathcal{T}^a вычисляется как

$$M_I^{\mathcal{T}^a} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV = \sum_{t^a} \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV = \sum_{t^a} m^{t^a} = \sum_{t^a} \bar{\rho}^{t^a} V^{t^a}.$$

Задача интерполяции значений функции ρ с базовой сетки \mathcal{T}^a на результирующую сетку \mathcal{T}^b (далее — $\mathcal{T}^a(\rho) \rightarrow \mathcal{T}^b$) заключается в нахождении аппроксимации масс новых ячеек $\tilde{m}^{t^b} \approx m^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV$, где m^{t^b} — неизвестная масса новой ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$ [1, 2]. Среднее значение плотности новых ячеек определяется как $\tilde{\rho}^{t^b} = \tilde{m}^{t^b} / V^{t^b}$. В случае когда ρ является кусочно-линейной функцией $\rho(\mathbf{r}) = a + bx + cy + dz$, процесс интерполяции значений плотности является

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00055-а, 14-08-00064-а).

точным, $\tilde{m}^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV$, и определяется как сохранение линейности интерполяции. Также необходимым условием является консервативность:

$$M_I^{T^a} = \sum_{t^a} m^{t^a} = \sum_{t^b} \tilde{m}^{t^b} = \tilde{M}_I^{T^b},$$

то есть сохранение общей массы после интерполяции. Другим важным требованием является локальное сохранение экстремальных значений плотности:

$$\bar{\rho}_{\max}^{t^{ab}} \geq \tilde{\rho}^{t^b} \geq \bar{\rho}_{\min}^{t^{ab}}, \quad \bar{\rho}_{\max}^{t^{ab}} = \max_{t^a \in O_\varepsilon(t^b)} \bar{\rho}^{t^a}, \quad \bar{\rho}_{\min}^{t^{ab}} = \min_{t^a \in O_\varepsilon(t^b)} \bar{\rho}^{t^a},$$

в некоторой окрестности $O_\varepsilon(t^b)$ ячейки t^b [1, 2].

Выделим лишь основополагающие работы [1–5], содержащие алгоритмы, удовлетворяющие некоторым из перечисленных требований. В [3] предложен метод решения задачи консервативной интерполяции интегральных параметров сеток, состоящих из криволинейных ячеек четырехугольной формы, как задачи об отыскании массы ячеек результирующей сетки по известной массе ячеек базовой сетки. Его обобщение на трехмерный случай, по мнению авторов, не представляет значительных трудностей. Другой подход основан на переносе интерполируемых параметров через предварительно построенную «суперсетку», состоящую из узлов и пересечений ребер базовой и результирующей сеток [4]. В данном подходе также не очевидно использование трехмерных несогласованных сеток. В [5] рассмотрен метод консервативной интерполяции физических величин с одной разностной регулярной сетки на другую для трехмерных гексаэдральных сеток.

В основе предлагаемого метода консервативной интерполяции расчетных параметров VCI (Voxel based Conservative Interpolation), заданных на поверхностной сетке, лежит идея воксельного представления расчетной сетки [6] с последующей оценкой площади пересечения каждого вокселя с ячейками сетки. Представление массы ячеек результирующей сетки осуществляется через линейную комбинацию известных масс ячеек базовой сетки. Этот метод позволяет рассматривать задачи интерполяции на криволинейных поверхностях, когда определение геометрического пересечения ячеек сеток является невозможным.

Разработанный на основе этого метода алгоритм состоит из четырех основных этапов, последовательно описанных в следующих разделах статьи. В первом разделе описывается механизм построения декартовой сетки вокселей интерполируемых сеток. Процедура вычисления площадей пересечений вокселей с ячейками сеток описана в параграфе 2. Вычисление массы и постобработка ячеек результирующей сетки рассматриваются в параграфах 3 и 4 соответственно. В параграфе 5 приведены численные результаты работы алгоритма, сравнение результатов с методом на основе функций радиального базиса.

§ 1. Построение декартовой сетки вокселей

Декартова сетка вокселей \mathcal{V} представляет собой трехмерный массив кубических элементов (вокселей) в пространстве размерности $\dim \mathcal{V} = \dim_z \times \dim_y \times \dim_x$. Такой массив задает приближение объекта с точностью, определяемой разрешением массива. Обобщим свойства воксельных представлений в приложении к поставленной задаче: простота и регулярная структура, большой объем данных и необходимость использования специальных многомасштабных структур для работы со сложными протяженными поверхностями.

Построение декартовой сетки \mathcal{V} начинается с определения шага воксельной решетки h , который выбирается как половина длины минимального ребра сеток: $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b, h = \min(L_{\min}^{\mathcal{T}^a}, L_{\min}^{\mathcal{T}^b})/2$. В этом случае каждый воксель содержит лишь одну вершину для каждой из сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$.

Поиск вокселей, пересекающих треугольные ячейки сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$, осуществляется алгоритмом полного перебора всех значений «Brute Force» [7]. Воксели, имеющие в качестве пересечения с треугольной ячейкой некоторый многоугольник, определяются как «помеченные»

(см. рис. 1, *a*, *б*, *в*) и формируют список $\Upsilon \subset \mathcal{V}$ «помеченных» вокселей. Воксели, не пересекающиеся с треугольными ячейками, а также имеющие в качестве пересечения точки и отрезки, пропускаются алгоритмом (см. рис. 1, *г*).

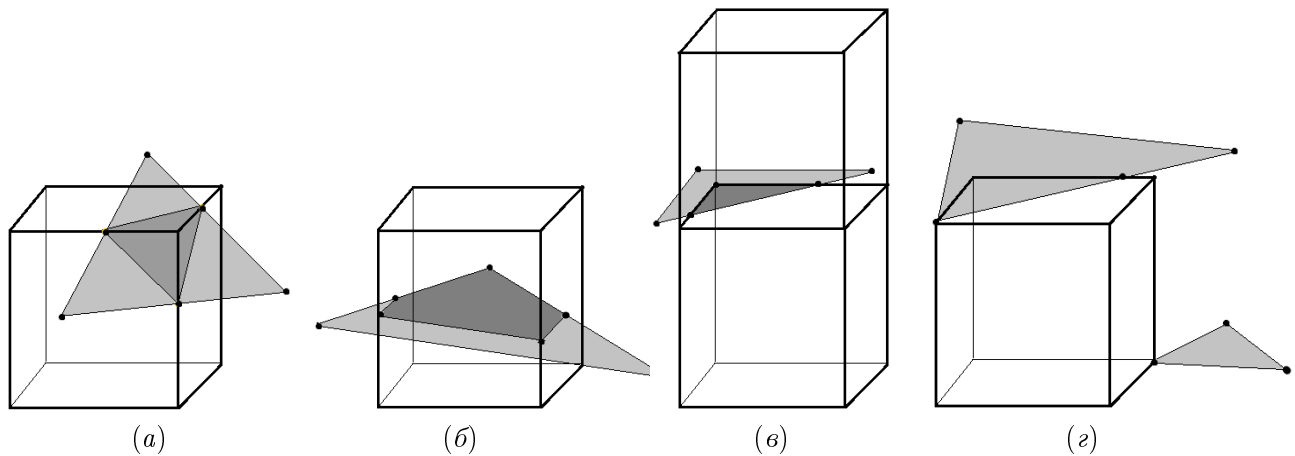


Рис. 1. Варианты пересечения: (*a*, *б*, *в*) определение «помеченных» вокселей; (*г*) ячейки, пропускаемые алгоритмом

Особым является случай, когда треугольник лежит в одной плоскости с гранью вокселя и пересекает эту грань (см. рис. 1, *в* — треугольник пересекает «верхний» и «нижний» воксели). В этом случае один воксель определится как «помеченный», а другой пропустится. Например, «помечается» воксель, имеющий минимальную координату по оси $X'X$. Если минимальные координаты по оси абсцисс равны, проверяются минимальные координаты по остальным осям. Так, на рисунке 1, *в* «помеченным» будет определен «нижний» воксель, имеющий минимальную координату по оси аппликат.

§ 2. Вычисление площадей пересечений вокселей с ячейками сеток

Процедура вычисления площади пересечения вокселя ν и треугольника t состоит из двух шагов: формирование списка Λ всех возможных точек пересечения вокселя и треугольника и построения на точках пересечения треугольной сетки с последующим суммированием площади каждого треугольника.

После добавления в список Λ всех возможных точек пересечения возникает задача вычисления площади области пересечения, ограниченной этими точками. На рисунке 2, *a* изображены треугольник t и воксель ν . В этом случае список Λ состоит из шести точек p_i , $i = 1, \dots, 6$, которые получены из пересечения ребер треугольника с гранями вокселя. Определим точку p_0 как геометрический центр точек p_i , $p_0 = (\sum_i p_i)/6$ (см. рис. 2, *б*).

Задача определения площади пересечения (более темная область, выделенная на рисунках 2, *a*, *б*) сводится к сложению площадей треугольников $p_0p_1p_2$, $p_0p_2p_3$, $p_0p_3p_4$, $p_0p_4p_5$, $p_0p_5p_6$, $p_0p_1p_6$, изображенных на рисунке 2, *б*. Следовательно, любой «помеченный» воксель $\nu \in \Upsilon$ имеет некоторые площади пересечения S_ν^a , S_ν^b с ячейками сеток \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b соответственно. При этом $S_\nu^a = \sum_{i=1}^l S_\nu^{t_i^a}$, где $S_\nu^{t_i^a}$ — площадь пересечения i -той ячейки сетки \mathcal{T}^a с вокселем ν , здесь l — число таких ячеек. Величина S_ν^b вычисляется аналогично.

§ 3. Вычисление массы ячеек результирующей сетки

В VCI-интерполяции задача нахождения массы ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$ сводится к поиску площади S^{t^b} через вклады площадей ячеек сетки \mathcal{T}^a , пересекающих t^b . Определим ячейки $t_i^a \in \mathcal{T}^a$, $t_i^a \cap t^b \neq \emptyset$, и коэффициенты $\alpha_i \in R^+$ так, что $S^{t^b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i S^{t_i^a}$, где $S^{t_i^a}$ — площадь t_i^a . Тогда

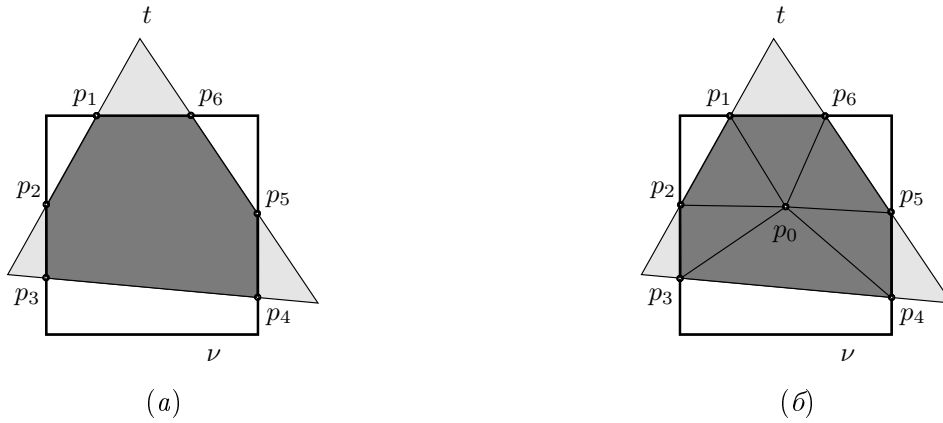


Рис. 2. Вычисление площади пересечения треугольника t и вокселя ν : (а) определения точек пересечения; (б) построение треугольной сетки в области пересечения (выделена темным цветом)

масса ячейки t^b вычисляется как $\tilde{m}^{t^b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\rho}^{t_i^a} S^{t_i^a}$, где $\bar{\rho}^{t_i^a}$ — среднее значение плотности t_i^a . Необходимым условием решения задачи VCI является существование хотя бы одного «помеченного» вокселя, пересекающего как ячейку t^b , так и ячейки t_i^a , то есть для всякого t_i^a должен найтись ν такой, что $t_i^a \cap \nu \neq \emptyset$ и $t^b \cap \nu \neq \emptyset$. Отметим, что геометрическое пересечение ячеек t_i^a и t^b заменяется на условие пересечения каждой из них с «помеченным» вокселем, то есть эталонный «геометрический» вариант пересечения заменяется на «воксельный».

Если $S^{t^b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i S^{t_i^a}$ и $S^{t^b} = \sum_{j=1}^n \alpha'_j S^{t_j^a}$ — «воксельное» и «геометрическое» выражение площади ячейки t^b соответственно, тогда существует j такое, что для всех i $\alpha_i \neq \alpha'_j$ и $S^{t_i^a} \neq S^{t_j^a}$. Таким образом, «воксельное» представление площади ячеек сетки \mathcal{T}^b позволяет проводить расчеты в случаях криволинейных поверхностных сеток в пространстве, когда вычисление геометрического пересечения ячеек затруднено.

Пусть треугольник t^b пересекает воксели ν_j , $j = 1, \dots, k$, тогда площадь ячейки t^b можно записать в виде $S^{t^b} = \sum_{j=1}^k S_{\nu_j}^{t^b}$, где $S_{\nu_j}^{t^b}$ — площадь пересечения треугольника t^b с вокселем ν_j .

Далее для каждого вокселя ν_j можно вычислить долю площади пересечения ω_j^b , которую занимает ячейка t^b в общей площади пересечения $S_{\nu_j}^b$ сетки \mathcal{T}^b с вокселем ν_j , $\omega_j^b = S_{\nu_j}^{t^b} / S_{\nu_j}^b$.

С другой стороны, существует некоторая площадь пересечения вокселя ν_j с ячейками сетки \mathcal{T}^a , $S_{\nu_j}^a = \sum_{i=1}^{l_j} S_{\nu_j}^{t_i^a}$, где $S_{\nu_j}^{t_i^a}$ — площадь пересечения i -той ячейки сетки \mathcal{T}^a с вокселем ν_j .

Принимая общие площади пересечения вокселя ν_j с сетками \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b , равными $S_{\nu_j}^a = S_{\nu_j}^b$, получаем, что $S_{\nu_j}^{t^b} = \omega_j^b S_{\nu_j}^b = \omega_j^b S_{\nu_j}^a = \sum_{i=1}^{l_j} \omega_j^b S_{\nu_j}^{t_i^a}$.

Откуда

$$S^{t^b} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{l_j} \omega_j^b S_{\nu_j}^{t_i^a} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \omega_j^b S_{\nu_j}^{t_i^a}.$$

Величина $\sum_{j=1}^{p_i} \omega_j^b S_{\nu_j}^{t_i^a}$ составляет некоторую часть площади $S^{t_i^a}$ треугольника t_i^a , которая получается сложением площадей пересечений ячейки t_i^a с вокселями ν_j , $j = 1 \dots p_i$. Таким образом, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{p_i} \omega_j^b S_{\nu_j}^{t_i^a} / S^{t_i^a}$ и получаем, что $S^{t^b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i S^{t_i^a}$.

Схематично метод интерполяции VCI на треугольных сетках \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b представлен в виде

Алгоритма 1.

Алгоритм 1. VCI — интерполяция треугольных сеток $\mathcal{T}^a(\rho) \rightarrow \mathcal{T}^b$

1: Построение сетки вокселей \mathcal{V} размерности $\dim V = \dim_z \times \dim_y \times \dim_x$ на расчетной области 2: for $z = 1; z < \dim_z; z++$ do 3: for $y = 1; y < \dim_y; y++$ do 4: for $x = 1; x < \dim_x; x++$ do 5: for all $t^a \in \mathcal{T}^a$ do 6: Вычислить площадь $S_\nu^{t^a}$ пересече- ния треугольника t^a с вокселем $\nu_{(x,y,z)} \in \mathcal{V}$ 7: if $S_\nu^{t^a} > 0$ then 8: Добавить $\nu_{(x,y,z)}$ в список «по- меченных» вокселей Υ 9: end if 10: end for 11: for all $t^b \in \mathcal{T}^b$ do 12: Вычислить площадь $S_\nu^{t^b}$ пересече-	13: 14: 15: 16: 17: 18: 19: 20: 21: 22: 23: 24: 25:	ния треугольника t^b с вокселем $\nu_{(x,y,z)} \in \mathcal{V}$ if $S_\nu^{t^b} > 0$ then Добавить $\nu_{(x,y,z)}$ в список «по- меченных» вокселей Υ end if end for end for end for for all $\nu \in \Upsilon$ do Для ν вычислить величины S_ν^a, S_ν^b end for for all $t^b \in \mathcal{T}^b$ do Для t^b вычислить $\tilde{m}^{t^b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\rho}^i S_i^{t^a}$ end for
---	---	---

Алгоритм 2. Поиск «помеченного» вокселя результирующей сетки

1: Вычисление скалярных произведений век- торов $\mathbf{OZ} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{OY} \cdot \mathbf{n}$ и $\mathbf{OX} \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{OZ} =$ $= (0, 0, 1)$, $\mathbf{OY} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{OX} = (1, 0, 0)$ 2: Определение максимума $\gamma = \max(\mathbf{OZ} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{OY} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{OX} \cdot \mathbf{n})$ 3: if $\gamma = \mathbf{OX} \cdot \mathbf{n}$ then 4: for $i = 1; i < k; i++$ do 5: if $\nu_{(x+i,y,z)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then 6: $\nu' = \nu_{(x+i,y,z)}$ 7: return ν' 8: end if 9: if $\nu_{(x-i,y,z)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then 10: $\nu' = \nu_{(x-i,y,z)}$ 11: return ν' 12: end if 13: end for 14: end if 15: if $\gamma = \mathbf{OY} \cdot \mathbf{n}$ then 16: for $i = 1; i < k; i++$ do 17: if $\nu_{(x,y+i,z)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then 18: $\nu' = \nu_{(x,y+i,z)}$	19: 20: 21: 22: 23: 24: 25: 26: 27: 28: 29: 30: 31: 32: 33: 34: 35: 36: 37: 38:	return ν' end if if $\nu_{(x,y-i,z)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then $\nu' = \nu_{(x,y-i,z)}$ return ν' end if end for end if if $\gamma = \mathbf{OZ} \cdot \mathbf{n}$ then for $i = 1; i < k; i++$ do if $\nu_{(x,y,z+i)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then $\nu' = \nu_{(x,y,z+i)}$ return ν' end if if $\nu_{(x,y,z-i)} \cap \mathcal{T}^b \neq \emptyset$ then $\nu' = \nu_{(x,y,z-i)}$ return ν' end if end for end if
--	--	--

Отметим, что на практике при интерполяции значений на криволинейных поверхностях возникают ситуации, когда существуют воксели, пересекающие ячейки только базовой сетки, то есть существуют $\nu \in \Upsilon$ и $t^a \in \mathcal{T}^a$ такие, что $\nu \cap \mathcal{T}^b = \emptyset$, $\nu \cap t^a \neq \emptyset$. Одним из таких примеров служит интерполяция (которая будет рассмотрена ниже) с более грубой сетки \mathcal{T}^a на сетку \mathcal{T}^b , которые описывают поверхность сферы. Описание криволинейной границы для сеток \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b

в этом случае выполняются с разной точностью. Тогда для некоторых вокселей невозможно вычислить величину S_ν^b . В этом случае необходимо найти некоторый воксель $\nu' \in \Upsilon$, лежащий в непосредственной близости к ν , который является «помеченным» для сетки \mathcal{T}^b . И далее, при вычислении «воксельной» площади, для сетки \mathcal{T}^b использовать воксель ν' вместо ν . Область пересечения ячеек результирующей сетки $t_i^b \in \mathcal{T}^b$ и ν' не соответствует области пересечения $\nu \cap \mathcal{T}^a$, что влияет на точность представления площадей t_i^b через ячейки базовой сетки.

Поиск вокселя ν' осуществляется итеративно вдоль координатных осей, по направлению оси, имеющей максимальное скалярное произведение с нормалью \mathbf{n} треугольника t^a . Пусть воксель $\nu : \nu \cap \mathcal{T}^b = \emptyset$ имеет индексы (x, y, z) и выполняется k итераций поиска, тогда процедура нахождения ν' для треугольника t^a , $\nu \cap t^a \neq \emptyset$, представляется Алгоритмом 2.

§ 4. Постобработка ячеек результирующей сетки

При интерполяции значений плотности на криволинейных поверхностях имеет место случай изменения локальных экстремальных значений плотности, что связано с расположением ячеек двух сеток в разных плоскостях, отсутствием их геометрического пересечения. В алгоритме VCI применен блок постобработки ячеек результирующей сетки, нарушающих сохранение локальных экстремумов плотности [1]. Суть процедуры постобработки состоит в распределении значения $\tilde{\rho}^{t^b}$ ячейки $t^b \in \mathcal{T}^a$ по соседним треугольникам, если для нее не выполняется соотношение $\tilde{\rho}_{\max}^{t^b} \geq \tilde{\rho}^{t^b} \geq \tilde{\rho}_{\min}^{t^b}$. Работу алгоритма поясним на примере значения $\tilde{\rho}^{t^b}$ меньше допустимого минимума $\tilde{\rho}^{t^b} < \tilde{\rho}_{\min}^{t^b}$, случай для максимума обрабатывается аналогично.

Сначала вычисляется масса $\Delta m^{t^b} = (\tilde{\rho}_{\min}^{t^b} - \tilde{\rho}^{t^b})S^{t^b}$, которую необходимо добавить ячейке t^b , чтобы выполнилось условие $\tilde{\rho}^{t^b} \geq \tilde{\rho}_{\min}^{t^b}$. Недостающая масса Δm^{t^b} берется из ячеек t_i^b , находящихся в непосредственной близости к t^b . Для этого вычисляется общая «свободная» масса Δm , которую можно вычесть из треугольников t_i^b без нарушения значений локальных экстремумов плотности $\Delta m = \sum_i \Delta m^{t_i^b}$, где $\Delta m^{t_i^b} = \max((\tilde{\rho}^{t_i^b} - \tilde{\rho}_{\min}^{t_i^b})S^{t_i^b}, 0)$.

Поиск необходимой массы начинается с соседних треугольников, имеющих с t^b общую вершину или ребро. В случае если «свободной» массы недостаточно, то есть $\Delta m < \Delta m^{t^b}$, круг ячеек для поиска расширяется: в него включаются треугольники, являющиеся соседними к соседним ячейкам t^b и так далее.

После того как необходимая масса $\Delta m \geq \Delta m^{t^b}$ найдена, значение $\tilde{\rho}^{t^b}$ приводится к нижней границе $\tilde{\rho}^{t^b} = \tilde{\rho}_{\min}^{t^b}$, при этом массы соседних ячеек t_i^b пересчитываются следующим образом:

$$\tilde{m}^{t_i^b} = \tilde{m}^{t_i^b} - \frac{\Delta m^{t^b}}{\Delta m} \Delta m^{t_i^b}.$$

§ 5. Численные эксперименты

Рассмотрим примеры интерполяции тестовых функций при интерполяции на несогласованных сетках, построенных на плоских и криволинейных поверхностях.

Для оценки погрешности алгоритма VCI, связанной с выбором шага h декартовой сетки вокселей, рассмотрим условие сохранения линейности интерполяции при переносе значений линейной функции плотности ρ с базовой сетки \mathcal{T}^a на результирующую \mathcal{T}^b . Как уже было отмечено, линейность интерполяции определяется как $\tilde{m}^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV$, $t^b \in \mathcal{T}^b$. Вместе с тем

$$\tilde{m}^{t^b} = \tilde{\rho}^{t^b} V^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV = \tilde{\rho}^{t^b} V^{t^b}, \text{ следовательно, необходимо выполнение условия } \tilde{\rho}^{t^b} = \bar{\rho}^{t^b}.$$

Таким образом, линейность есть равенство среднего значения $\tilde{\rho}^{t^b}$ плотности, полученного алгоритмом интерполяции, и среднего значения $\bar{\rho}^{t^b}$, вычисленного в ячейке t^b с помощью функции ρ . Введем параметр $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b} = \max_{t^b \in \mathcal{T}^b} |\bar{\rho}^{t^b} - \tilde{\rho}^{t^b}|$ для результирующей сетки \mathcal{T}^b , определяемый как максимальная абсолютная разность среднего значения плотности ячейки $\bar{\rho}^{t^b}$, вычисленного по функции плотности ρ , с его средним значением $\tilde{\rho}^{t^b}$, полученным алгоритмом интерполяции VCI. Относительное значение данного параметра обозначим $Q_\rho^{\mathcal{T}^b} = \Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b} / \bar{\rho}^{t^b} \cdot 100\%$. Тогда линейность интерполяции $\mathcal{T}^a(\rho) \rightarrow \mathcal{T}^b$ определяет равенство нулю величины $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$.

Построим интерполяцию значений функции $\rho_1(\mathbf{r}) = 3x + y + 2z + 1$, заданной кусочно-линейно на плоской поверхности куба, с грубой сетки \mathcal{T}_1^a , содержащей $M_{\mathcal{T}_1^a} = 72$ ячеек, на более мелкую \mathcal{T}_1^b с числом ячеек $M_{\mathcal{T}_1^b} = 384$ (см. рис. 3). Значение величины $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ результирующей сетки \mathcal{T}_1^b в зависимости от шага h декартовой сетки вокселей представлено в таблице 1, где $L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}} = \min(L_{\min}^{\mathcal{T}^a}, L_{\min}^{\mathcal{T}^b})$ вычисляется как минимальная длина ребра \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b . С уменьшением шага h сетки вокселей параметр $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ также уменьшается, при $h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/2$ значение составляет 0.01, при $h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/4$ имеем $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b} = 0.003$ и т.д. Также в таблице 1 показано изменение $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ при интерполяции функцией ρ_1 , заданной на той же области, с более мелкой сетки \mathcal{T}_2^a , $M_{\mathcal{T}_2^a} = 3574$, на грубую \mathcal{T}_1^b . Отметим, что уже на шаге $h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/2$ для $\mathcal{T}_1^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$ и $\mathcal{T}_2^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$ параметр $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ не превышает 0.01, что в относительном значении составляет около 1%. Таким образом, при интерполяции значений глобальной линейной функции, заданной на плоских трехмерных поверхностях, выполняется условие $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

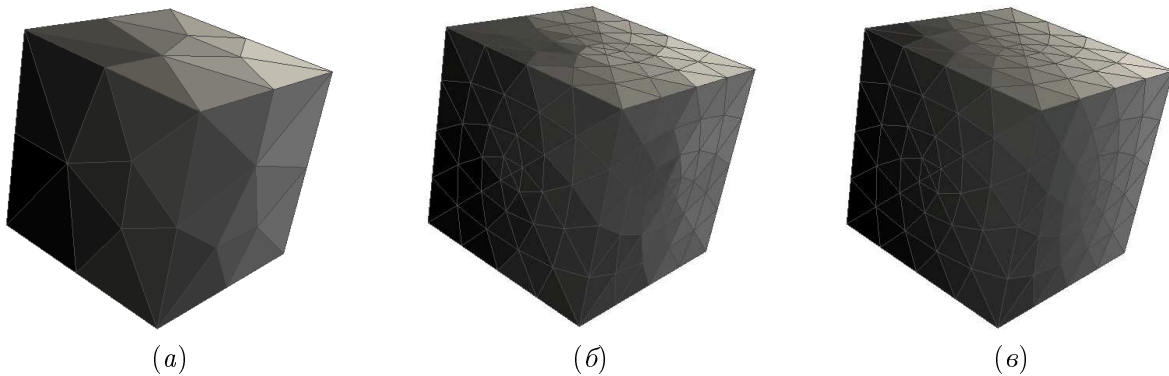


Рис. 3. Распределение плотностей для интерполяции $\mathcal{T}_1^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$: (а) базовой сетки; (б) результирующей с использованием VCI; (в) результирующей с использованием RBF

Для случая интерполяции кусочно-линейной функции ρ_1 , заданной на криволинейной поверхности сферы, с более мелкой базовой сетки \mathcal{T}_3^a , $M_{\mathcal{T}_3^a} = 440$ (см. рис. 5, а), на более грубую \mathcal{T}_3^b , $M_{\mathcal{T}_3^b} = 80$ (см. рис. 5, б), видно (см. таблицу 1), что с увеличением шага h величина $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ возрастает и для $h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/16$ равняется 7.52, что составляет $Q_\rho^{\mathcal{T}^b} = 25\%$ от среднего значения плотности, вычисленной по ρ_1 . При переносе значений ρ_1 с сетки \mathcal{T}_3^a на сетку $\mathcal{T}_3^{a'}$, полученную из \mathcal{T}_3^a поворотом на 45° вокруг оси OZ , соотношение $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b} \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ также не выполняется (см. таблицу 1).

Для рассмотренных примеров сохранялась консервативность интерполяции. В худших случаях относительная разность значений массы сеток до и после переноса составляла не более $M^{\mathcal{T}^{ab}} = (M^{\mathcal{T}^a} - M^{\mathcal{T}^b})/M^{\mathcal{T}^a} \cdot 100\% = 0.4\%$, что не связано с шагом h сетки вокселей и является следствием погрешности вычислений на ЭВМ.

Таблица 1. Значение параметра $\Delta Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ результирующей сетки в зависимости от шага h сетки вокселей

Интерполяция	$h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/2$	$h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/4$	$h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/8$	$h = L_{\min}^{\mathcal{T}^{ab}}/16$
$\mathcal{T}_1^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$	0.01	0.003	0.0007	0.0001
$\mathcal{T}_2^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$	0.003	0.0007	0.0002	$7 \cdot 10^{-5}$
$\mathcal{T}_3^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_3^b$	6.4	6.46	7.26	7.52
$\mathcal{T}_3^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_3^{a'}$	1.06	0.87	0.69	0.9

Сравним результаты работы метода VCI с алгоритмом интерполяции на основе функций

радиального базиса (RBF), то есть функций, значение которых зависит только от нормы аргумента и имеющих различные классы гладкости. В таблице 2 приведен список функций, используемых в тестах методом RBF [8, 9]. Отметим, что в сравнениях приводятся только результаты для функций, показавших наилучший результат при интерполяции. Функция плотности в следующих примерах задавалась кусочно-постоянной на ячейках сетки.

Таблица 2. Функции радиального базиса

Функция	Обозначения	Вид
Вендланда	RBF 1	$(1 - \ \mathbf{x}\)^2$
Ву	RBF 2	$(1 - \ \mathbf{x}\)^3 \cdot (1 + 3 \cdot \ \mathbf{x}\)$
Ву	RBF 3	$1 - \ \mathbf{x}\ $
	RBF 4	$e^{-\ \mathbf{x}\ }$
Гауссиан	RBF 5	$e^{-\ \mathbf{x}\ ^2}$
Мультиквадратичная	RBF 4	$\sqrt{1 + \ \mathbf{x}\ ^2}$
Обратная	RBF 6	$1/(\sqrt{1 + \ \mathbf{x}\ ^2})$
мультиквадратичная		
Сплайн тонкой пластины	RBF 7	$\ \mathbf{x}\ ^2 \log \ \mathbf{x}\ $
Ву	RBF 8	$(1 - \ \mathbf{x}\)^5 \cdot (1 + 5 \cdot \ \mathbf{x}\ + 9 \cdot \ \mathbf{x}\ ^2 + 5 \cdot \ \mathbf{x}\ ^3 + \ \mathbf{x}\ ^4)$

Оценим консервативность переноса массы и сохранения локальных экстремальных значений плотности ячеек результирующей сетки \mathcal{T}^b для рассматриваемых алгоритмов. Консервативность массы определим через параметр $M^{\mathcal{T}^{ab}}$, второй критерий выполняется при

$$\bar{\rho}_{\max}^{tab} \geq \tilde{\rho}^{tb} \geq \bar{\rho}_{\min}^{tab}, \quad \bar{\rho}_{\max}^{tab} = \max_{t^a \in O_\varepsilon(t^b)} \bar{\rho}^{ta}, \quad \bar{\rho}_{\min}^{tab} = \min_{t^a \in O_\varepsilon(t^b)} \bar{\rho}^{ta},$$

в некоторой окрестности $O_\varepsilon(t^b)$ любой ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$. В данной работе под окрестностью $O_\varepsilon(t^b)$ ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$ понимается множество ячеек сетки \mathcal{T}^a , имеющих «воксельное» пересечение с t^b , то есть $t^a \in O_\varepsilon(t^b)$, если $t^a \cap t^b \neq \emptyset$ в «воксельном» смысле.

Введем параметры минимума и максимума локальных разностей плотностей ячеек при интерполяции значений с \mathcal{T}^a на \mathcal{T}^b следующим образом:

$$Q_{\rho_{\min}}^{tab} = \begin{cases} \min_{t^b \in \mathcal{T}^b} (\tilde{\rho}^{tb} - \bar{\rho}_{\min}^{tab}), & \exists t^b \in \mathcal{T}^b, \tilde{\rho}^{tb} - \bar{\rho}_{\min}^{tab} < 0, t^a \in O_\varepsilon(t^b); \\ \max_{t^b \in \mathcal{T}^b} (\tilde{\rho}^{tb} - \bar{\rho}_{\min}^{tab}), & \forall t^b \in \mathcal{T}^b, \tilde{\rho}^{tb} - \bar{\rho}_{\min}^{tab} \geq 0, t^a \in O_\varepsilon(t^b); \end{cases}$$

$$Q_{\rho_{\max}}^{tab} = \begin{cases} \min_{t^b \in \mathcal{T}^b} (\bar{\rho}_{\max}^{tab} - \tilde{\rho}^{tb}), & \exists t^b \in \mathcal{T}^b, \bar{\rho}_{\max}^{tab} - \tilde{\rho}^{tb} < 0, t^a \in O_\varepsilon(t^b); \\ \max_{t^b \in \mathcal{T}^b} (\bar{\rho}_{\max}^{tab} - \tilde{\rho}^{tb}), & \forall t^b \in \mathcal{T}^b, \bar{\rho}_{\max}^{tab} - \tilde{\rho}^{tb} \geq 0, t^a \in O_\varepsilon(t^b). \end{cases}$$

Следовательно, для локального сохранения экстремальных значений плотности необходима неотрицательность значений $Q_{\rho_{\min}}^{tab}, Q_{\rho_{\max}}^{tab}$.

Для случая плоских поверхностей построим интерполяцию значений функции ρ_1 , заданной кусочно-постоянно на плоской поверхности куба, с более грубой сетки \mathcal{T}_1^a на более мелкую \mathcal{T}_1^b (см. рис. 3). Результаты сравнения сведены в таблицу 3. Алгоритм VCI консервативен ($M_I^{\mathcal{T}^{ab}} \approx 0$) и сохраняет локальные экстремальные значения плотности, параметры $Q_{\rho_{\min}}^{tab}$ и $Q_{\rho_{\max}}^{tab}$ положительны. Для метода RBF консервативность также выполняется, однако минимальные и максимальные значения плотности изменяются: $Q_{\rho_{\min}}^{tab} = -0.28, Q_{\rho_{\max}}^{tab} = -0.27$. Погрешность интерполяции функции ρ_1 с грубой сетки на мелкую составляет $Q_\rho^{\mathcal{T}^b} = 0.6\%$ для метода RBF и 16% — для VCI.

При интерполяции значений функции ρ_1 , заданной на той же области, с более мелкой сетки \mathcal{T}_2^a на \mathcal{T}_1^b для обоих алгоритмов соблюдаются условия консервативности и сохранения локальных экстремальных значений плотности, значение параметра $Q_\rho^{\mathcal{T}^b}$ не превышает 0.1% .

Таблица 3. Параметры интерполяции сеток на плоских поверхностях

Параметр	$\mathcal{T}_1^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$		$\mathcal{T}_2^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_1^b$		$\mathcal{T}_4^a(\rho_2) \rightarrow \mathcal{T}_4^b$	
	VCI	RBF 5	VCI	RBF 4	VCI	RBF 2
$M_I^{\mathcal{T}^{ab}}, \%$	10^{-7}	0.03	10^{-4}	10^{-3}	0	-0.04
$Q_{\rho_{\min}}^{t^{ab}}$	1.83	-0.28	1.21	1.21	0	-0.25
$Q_{\rho_{\max}}^{t^{ab}}$	1.94	-0.27	1.24	1.24	0	-0.22
$Q_{\rho}^{\mathcal{T}^b}, \%$	16	0.6	0.1	0.02	0	25

Таким образом, при интерполяции функций на плоских поверхностях с более мелкой базовой сетки можно говорить о сохранении линейности интерполяции для случая кусочно-постоянной функции плотности.

На рисунке 4 изображено распределение плотностей базовой и результирующей сеток при интерполяции значений разрывной функции

$$\rho_2(x, y, z) = \begin{cases} 1, & x \in [0.25, 0.75] \wedge y \in [0.25, 0.75] \wedge z \in [0.25, 0.75]; \\ 0 & \text{— иначе,} \end{cases}$$

заданной на поверхности единичного куба, расположенного в первом октанте, с сетки \mathcal{T}_4^a , содержащей $M_{\mathcal{T}_4^a} = 768$ ячеек, на \mathcal{T}_4^b с $M_{\mathcal{T}_4^b} = 1728$ (см. таблицу 3). Для алгоритма RBF сохраняется консервативность, но не соблюдаются условия локальных экстремумов, что означает наличие ячеек результирующей сетки \mathcal{T}_4^b с плотностью, отличной от нуля и единицы.

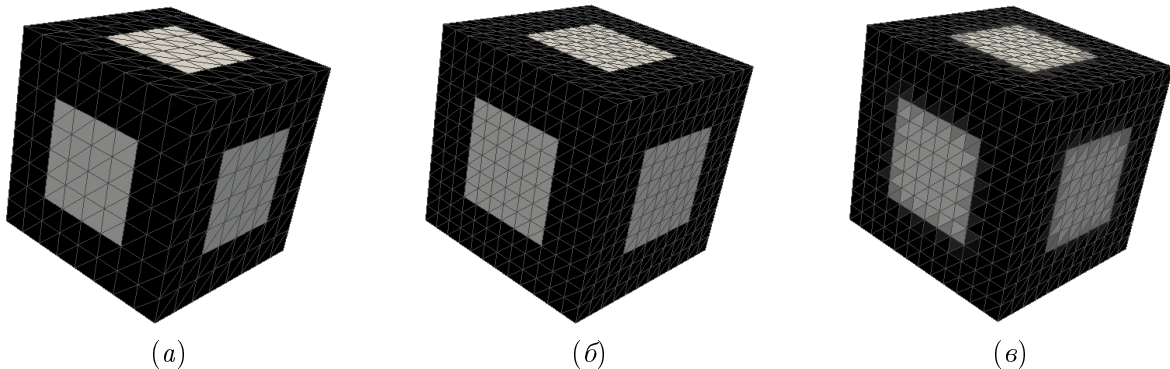


Рис. 4. Распределение плотностей для интерполяции $\mathcal{T}_4^a(\rho_2) \rightarrow \mathcal{T}_4^b$: (а) базовой сетки; (б) результирующей с использованием VCI; (в) результирующей с использованием RBF

Практически важным случаем является межсеточная интерполяция на криволинейных поверхностях. Пусть задана кусочно-линейная функция на ячейках мелкой сетки \mathcal{T}_3^a , описывающей поверхность сферы, и необходимо интерполировать функцию на более грубую сетку \mathcal{T}_3^b (см. рис. 5). Отметим, что алгоритм VCI сохраняет консервативность (см. таблицу 4), при этом для получения экстремальных величин плотности в пределах допустимых значений потребовалось применение блока постобработки, описанного в параграфе 4. При RBF-интерполяции консервативность не выполняется: $M_I^{\mathcal{T}^{ab}} = 9\%$, что связано с различием в площадях базовой и результирующей сеток: $S^{\mathcal{T}^{ab}} = (S^{\mathcal{T}^a} - S^{\mathcal{T}^b})/S^{\mathcal{T}^a} \cdot 100\% = 6\%$. Сохраняются локальные экстремумы, отклонение среднего значения плотности меньше, чем в VCI, и составляет $Q_{\rho}^{\mathcal{T}^b} = 3\%$.

Тестовые примеры включали и случай, когда сетки достаточно подробно аппроксимируют границу и относительная разность площадей двух сеток незначительна, $S^{\mathcal{T}^{ab}} = 0.2\%$. Рассматривалась интерполяция линейной ρ_1 и разрывной функций: $\rho_3(x, y, z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0.25; \\ 0, & z < 0.25. \end{cases}$

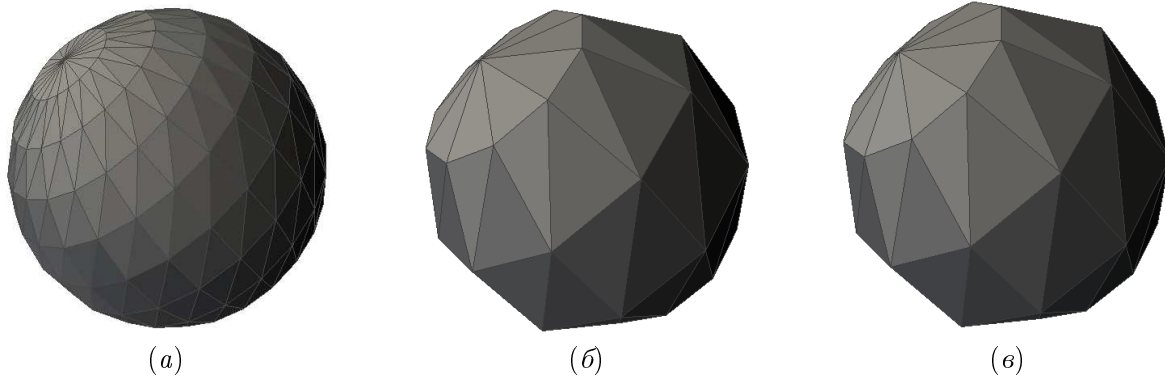


Рис. 5. Распределение плотностей для интерполяции $\mathcal{T}_3^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_3^b$: (а) базовой сетки; (б) результирующей с использованием VCI; (в) результирующей с использованием RBF

Интерполяция производилась с неструктурированной сетки \mathcal{T}_5^a , $M_{\mathcal{T}_5^a} = 2350$, на сетку \mathcal{T}_5^b , $M_{\mathcal{T}_5^b} = 1008$ (см. рис. 6), построенную на поверхности единичной полусферы.

В случае RBF-интерполяции экстремальные значения плотности ячеек на результирующей сетке не сохраняются. При незначительном отличии площадей сеток условие консервативности выполняется приближенно, при интерполяции радиальными базисными функциями (см. таблицу 4).

Для выбранных функций алгоритм VCI-интерполяции обладает консервативностью. Применение постобработки для VCI-интерполяции позволило установить значения интерполируемой функции в допустимых пределах. Отрицательность параметра $Q_{\rho_{\max}}^{tab} = -0.009$ связана с особенностью определения разрывной функции ρ_3 и погрешностью выполнения арифметических операций при вычислении областей пересечений ячеек базовой и результирующей сеток.

В таблице 4 приведен еще один тестовый вариант интерполяции функции ρ_1 , заданной на поверхности единичной полусферы, с сетки \mathcal{T}_5^a на сетку $\mathcal{T}_5^{a'}$, полученную из \mathcal{T}_5^a поворотом на 30° по оси Z . В этом случае предлагаемый алгоритм интерполяции показал наилучшее значение параметра $Q_{\rho}^{T^b} \approx 2\%$ для всех случаев интерполяции с криволинейными границами. Отклонения экстремальных значений плотности были незначительны и составляли менее 1% массы ячеек $\mathcal{T}_5^{a'}$.

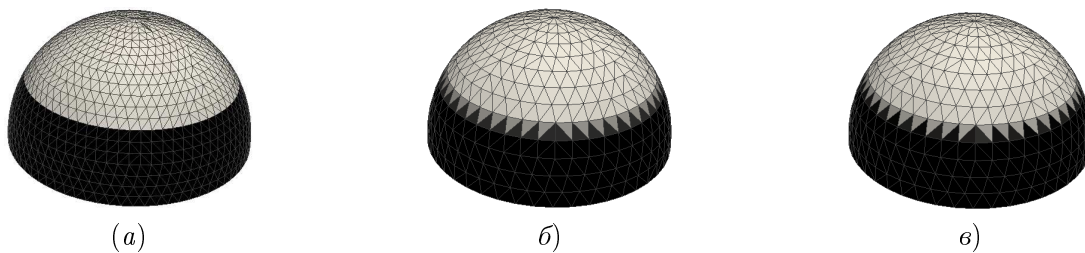


Рис. 6. Распределение плотностей для интерполяции $\mathcal{T}_5^a(\rho_3) \rightarrow \mathcal{T}_5^b$: (а) базовой сетки; (б) результирующей с использованием VBI; (в) результирующей с использованием RBF

Предлагаемый метод консервативной интерполяции обладает следующими основными чертами: выполняется свойство сохранения линейности при интерполяции линейных функций на плоских поверхностях, при этом точность интерполяции увеличивается с уменьшением шага h декартовой сетки вокселей; минимальный шаг выбирается из условия $h \leq L_{\min}^{Tab}/2$, когда воксели содержат не более одной вершины каждой из сеток; при интерполяции функции плотности, заданной кусочно-постоянно на ячейках сетки, сохраняется консервативность переноса массы VCI-интерполяции; для плоских поверхностей сохраняются локальные экстремальные значения плотности при интерполяции как с сетки с более мелкими ячейками на сетку с грубыми

Таблица 4. Параметры интерполяции сеток на криволинейных поверхностях

Параметр	$\mathcal{T}_3^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_3^b$		$\mathcal{T}_5^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_5^b$		$\mathcal{T}_5^a(\rho_3) \rightarrow \mathcal{T}_5^b$		$\mathcal{T}_5^a(\rho_1) \rightarrow \mathcal{T}_5^{a'}$	
	VCI	RBF 3	VCI	RBF 8	VCI	RBF 3	VCI	RBF 3
$S^{\mathcal{T}^{ab}}, \%$	6	6	0.2	0.2	0.2	0.2	0	0
$M_I^{\mathcal{T}^{ab}}, \%$	10^{-6}	9	10^{-4}	0.2	10^{-4}	0.8	10^{-6}	10^{-4}
$Q_{\rho_{\min}}^{t^{ab}}$	19.43	19.50	25.19	-0.27	1.008	-0.032	21.07	21.03
$Q_{\rho_{\max}}^{t^{ab}}$	19.27	19.54	21.05	-0.19	-0.009	-0.037	21.06	-0.0005
$Q_{\rho}^{\mathcal{T}^b}, \%$	19	3	3	5	59	61	2	1

ячейками, так и наоборот; в случае криволинейных поверхностей для сохранения локальных экстремальных значений плотности необходимо использовать блок постобработки ячеек результирующей сетки; основные операции рассматриваемого алгоритма интерполяции эффективно распараллеливаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garimella R., Kucharik M., Shashkov M. An efficient linearity and bound preserving conservative interpolation (remapping) on polyhedral meshes // *Computers and Fluids*. 2007. Vol. 36. Issue 2. P. 224–237.
2. Berndt M., Breil J., Galera S., Kucharik M., Maire P., Shashkov M. Two-step hybrid conservative remapping for multimaterial arbitrary Lagrangian–Eulerian methods // *Journal of Computational Physics*. 2011. Vol. 230. № 17. P. 6664–6687.
3. Аганин А.А., Кузнецов В.Б. Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток // *Динамика оболочек в потоке*. Казань: Казанский физико-технический институт АН СССР. 1985. № 18. С. 144–160.
4. Farrell P.E., Piggott M.D., Pain C.C., Gorman G.J., Wilson C.R. Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009. Vol. 198. № 8. P. 2632–2642.
5. Азаренок Б.Н. Об одном методе консервативной интерполяции на гексаэдральных сетках // *Математическое моделирование*. 2008. Т. 20. № 2. С. 59–75.
6. Караваев А.С., Копысов С.П. Метод построения неструктурированных шестигранных сеток из объемных данных // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. Т. 5. № 1. С. 11–24.
7. Paar C., Pelzl J., Preneel B. *Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners*. Heidelberg–Dordrecht–London–New York: Springer, 2011. 372 p.
8. Buhmann M.D. *Radial basis functions: theory and implementations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 257 p.
9. Копысов С.П., Кузьмин И.М., Тонков Л.Е. Методы деформирования сеток в сопряженных задачах // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. Т. 14. № 3. С. 269–278.

Поступила в редакцию 01.11.2014

Караваев Александр Сергеевич, аспирант, Институт механики УрО РАН,
426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Копысов Сергей Петрович, д. ф.-м. н., профессор, Институт механики УрО РАН,
426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Кузьмин Игорь Михайлович, научный сотрудник, Институт механики УрО РАН,
426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: imkuzmin@gmail.com

A. S. Karavaev, S. P. Kopysov, I. M. Kuz'min

Conservative interpolation method between non-matching surface meshes

Keywords: conservative interpolation, voxel mesh, non-matching surface mesh.

MSC: 65D05

In this paper, we consider a problem of conservative interpolation data between non-matching surface meshes. We develop a new interpolation method based on voxel representation of the mesh followed by the evaluation of intersection area of each voxel with mesh cells. The mass of cells of the resulting mesh is represented through a linear combination of the known mass of parent cells. The method allows us to consider the problem of interpolation on curved surfaces when it is impossible to define the grid cells geometric intersection. The method was validated by numerical simulation of data interpolation based on various functions for the non-matching meshes describing plane and curved surfaces. The method of voxel interpolation was compared to the interpolation algorithm based on radial basis functions of different smoothness degree.

REFERENCES

1. Garimella R., Kucharik M., Shashkov M. An efficient linearity and bound preserving conservative interpolation (remapping) on polyhedral meshes, *Computers and Fluids*, 2007, vol. 36, issue 2, pp. 224–237.
2. Berndt M., Breil J., Galera S., Kucharik M., Maire P., Shashkov M. Two-step hybrid conservative remapping for multimaterial arbitrary Lagrangian–Eulerian methods, *Journal of Computational Physics*, 2011, vol. 230, issue 17, pp. 6664–6687.
3. Aganin A.A., Kuznetsov V.B. Method of conservative interpolation for integral parameters of cells for arbitrary meshes, *Dinamika obolochek v potoke*, Kazan Physical Technical Institute of the Academy of Sciences of USSR, 1985, no. 18, pp. 144–160 (in Russian).
4. Farrell P.E., Piggott M.D., Pain C.C., Gorman G.J., Wilson C.R. Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, vol. 198, no. 8, pp. 2632–2642.
5. Azarenok B.N. A method for conservative remapping on hexahedral meshes, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, vol. 1, issue 1, pp. 51–63.
6. Karavaev A.S., Kopysov S.P. The method of unstructured hexahedral mesh generation from volumetric data, *Komp. Issled. Model.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 11–24 (in Russian).
7. Paar C., Pelzl J., Preneel B. *Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners*, Heidelberg–Dordrecht–London–New York: Springer, 2011, 372 p.
8. Buhmann M.D. *Radial basis functions: theory and implementations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 257 p.
9. Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Tonkov L.E. Methods of mesh deformation for FSI problems, *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie*, 2013, vol. 14, no. 3, pp. 269–278 (in Russian).

Received 01.11.2014

Karavaev Aleksandr Sergeevich, post-graduate student, Institute of the Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of the Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: s.kopysov@gmail.com

Kuz'min Igor' Mikhailovich, Researcher, Institute of the Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.

E-mail: imkuzmin@gmail.com