УДК 517.977.1, 517.929.2

© ***В. А. Зайцев, С. Н. Попова,*** $\boxed{\textit{Е. Л. Тонков}}$

О СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

Исследовано свойство равномерной полной управляемости (по Калману) линейной управляемой системы с дискретным временем

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\quad t\in\mathbb{N}_0,\quad (x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, то матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}_0$ (т. е. $\sup_{t\in\mathbb{N}_0}(|A(t)|+|A^{-1}(t)|)<+\infty$), а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{N}_0$. Доказано, что система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда при некотором $\vartheta\in\mathbb{N}$ при всех $\tau\in\mathbb{N}_0$ для матриц

$$W_1(t,\tau)\doteq\sum_{s=\tau}^{t-1}X(t,s+1)B(s)B^*(s)X^*(t,s+1),\quad W_2(t,\tau)\doteq\sum_{s=\tau}^{t-1}X(\tau,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau,s+1)$$

выполнены неравенства $\alpha_1 I\leqslant W_1(\tau+\vartheta,\tau)\leqslant\beta_1 I$, $\alpha_2 I\leqslant W_2(\tau+\vartheta,\tau)\leqslant\beta_2 I$ с некоторыми положительными α_i и β_i. На основании этого утверждения доказан критерий равномерной полной управляемости системы (1), аналогичный критерию Тонкова равномерной полной управляемости систем с непрерывным временем: система (1) ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}_0$; матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{N}_0$; существует число $\ell=\ell(\vartheta)>0$ такое, что для любого $\tau\in\mathbb{N}_0$ и для любого $x_1\in\mathbb{R}^n$ существует управление $u(t)$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta)$, которое переводит решение системы (1) из точки $x(\tau)=0$ в точку $x(\tau+\vartheta)=x_1$, при этом выполнено неравенство $|u(t)|\leqslant\ell|x_1|$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta)$.

Ключевые слова: линейная управляемая система, дискретное время, равномерная полная управляемость.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x|=\sqrt{x^*x}$ (звездочка означает операцию транспонирования); $e_1,\ldots,e_n$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел; под промежутком $[t_0,t_1)$, где $t_0,t_1\in\mathbb{N}_0$, $t_0<t_1$, будем понимать множество целочисленных точек $t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1$ (соответственно $[t_0,+\infty)=\{t_0,t_0+1,\ldots\}$); $M_{n,m}$ — пространство вещественных $n\times m$-матриц (если $m=n$, то пишем M_n) со спектральной нормой $|A|=\max\limits_{|x|=1}|Ax|$; $I=[e_1,\ldots,e_n]\in M_n$ — единичная матрица; $\operatorname{Sp}A$ — след квадратной матрицы A. Квадратичную форму $V(x)=x^*Qx$, $x\in\mathbb{R}^n$, отождествляем с симметрической матрицей $Q=Q^*\in M_n$, ее задающей. Неравенства $Q>(\geqslant,<,\leqslant)P$ для симметрических матриц Q,P понимаются в смысле квадратичных форм. Записи $b:=a$ и $a=:b$ означают, что элементу b присваивается значение a.

Приведем некоторые сведения из теории линейных систем с дискретным временем (см., например, [1]).

Рассмотрим сначала линейную однородную систему уравнений

$$x(t+1)=A(t)x(t),\quad t\in\mathbb{N}_0,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Для произвольных $t,\tau\in\mathbb{N}_0$, $t\geqslant\tau$, определим матрицу

$$X(t,\tau)=\begin{cases} A(t-1)\cdot\ldots\cdot A(\tau) & \text{при } t>\tau,\\ I & \text{при } t=\tau.\end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195) и Минобрнауки РФ в рамках базовой части.

Она является решением матричной задачи Коши

$$X(t+1) = A(t)X(t), \quad X(\tau) = I,$$

и удовлетворяет условию $X(t,\tau)X(\tau,s) = X(t,s)$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant s$; $t,\tau,s \in \mathbb{N}_0$. Матрица $X(t,\tau)$ называется *матрицей Коши* системы (1). Для произвольного решения $x(\cdot)$ системы (1) и любых целых $t \geqslant \tau \geqslant 0$ имеет место равенство

$$x(t) = X(t,\tau)x(\tau). \tag{2}$$

Предположим дополнительно, что $\det A(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{N}_0$. Тогда при всяких $t \geqslant \tau \geqslant 0$ матрица $X(t,\tau)$ обратима. Положим

$$X(\tau,t) := X^{-1}(t,\tau), \quad t \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Из (2) получаем

$$x(\tau) = X^{-1}(t,\tau)x(t) = X(\tau,t)x(t), \quad t \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Итак, в случае обратимости матрицы $A(\cdot)$ равенство (2) справедливо при всех $t,\tau \in \mathbb{N}_0$.

Теперь рассмотрим линейную неоднородную систему

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для произвольного решения этой системы справедлива формула Коши [1, с. 20]

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} X(t,s+1)f(s), \quad t > t_0 \geqslant 0. \tag{3}$$

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему с дискретным временем

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{4}$$

Пусть $X(t,\tau)$, $t \geqslant \tau$, $t,\tau \in \mathbb{N}_0$ — это матрица Коши соответствующей свободной системы (1), то есть системы (4) с $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{N}_0$. Построим при $t > \tau$ матрицу

$$W_1(t,\tau) = \sum_{s=\tau}^{t-1} X(t,s+1)B(s)B^*(s)X^*(t,s+1). \tag{5}$$

Заметим, что

$$W_1(t,\tau) = W_1^*(t,\tau), \quad W_1(t,\tau) \geqslant 0, \quad t > \tau, \quad t,\tau \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Определение 1 (см. [2, с. 70, 524], [1, с. 217]). Система (4) называется *вполне управляемой* на промежутке $[\tau,\tau+\vartheta)$, $\tau \in \mathbb{N}_0$, $\vartheta \in \mathbb{N}$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ существует управление $u(t)$, $t \in [\tau,\tau+\vartheta)$, которое переводит решение системы (4) из точки $x(\tau) = x_0$ в точку $x(\tau+\vartheta) = x_1$.

В определении 1 без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$ [1, с. 218]. Заметим, что из полной управляемости системы (4) на $[\tau,\tau+\vartheta)$, в отличие от управляемых систем с непрерывным временем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

вообще говоря, не следует полная управляемость на $[\tau,\tau+\vartheta_1)$, где $\vartheta_1 > \vartheta$; см. пример 1 (однако если полная управляемость *равномерная*, то следует: см. далее предложение 5 и следствие 1).

Пример 1. $n = m = 1$, $\tau = 0$, $\vartheta = 1$, $\vartheta_1 = 2$, $A(t) \equiv 0$, $B(0) = 1$, $B(1) = 0$.

Отметим также, что свойство полной управляемости системы (4) на $[\tau, \tau+\vartheta)$ (в отличие от свойства *равномерной* полной управляемости, см. далее) не влечет невырожденность матрицы $A(t)$; см. пример 1.

Теорема 1 (см. [2, теорема 6.7], [1, теорема 16.1]). *Система* (4) *вполне управляема на промежутке* $[\tau, \tau+\vartheta)$ *тогда и только тогда, когда матрица* $W_1(\tau+\vartheta, \tau)$ *невырожденна.*

Условие невырожденности матрицы $W_1(\tau+\vartheta, \tau)$ эквивалентно ее положительной определенности в силу (6).

Определение 2 (см. [2, с. 525]). Система (4) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* ($\vartheta \in \mathbb{N}$), если существуют $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered} W_1(\tau+\vartheta, \tau) > 0, \\ 0 < \alpha_1 I \leqslant W_1^{-1}(\tau+\vartheta, \tau) \leqslant \alpha_2 I, \\ 0 < \alpha_3 I \leqslant X^*(\tau+\vartheta, \tau) W_1^{-1}(\tau+\vartheta, \tau) X(\tau+\vartheta, \tau) \leqslant \alpha_4 I. \end{gathered} \tag{7}$$

Система (4) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (4) ϑ-равномерно вполне управляемая.

Определение 2 равномерной полной управляемости системы (4) восходит к определению Калмана [3], сформулированному им для систем с непрерывным временем. Отметим, что в определении 2, вообще говоря, не требуется обратимость матрицы $A(\cdot)$. В действительности ее обратимость с необходимостью вытекает из определения 2.

Предложение 1. *Если система* (4) *равномерно вполне управляема, то матрица* $A(t)$ *обратима при всех* $t \in \mathbb{N}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть $\det A(\tau) = 0$ при некотором целом неотрицательном τ. Тогда $\det X(\tau+\vartheta, \tau) = 0$. Следовательно, существует вектор $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $|z_0| = 1$, такой, что $X(\tau+\vartheta, \tau) z_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда из (7) получим

$$0 < \alpha_3 = \alpha_3 z_0^* z_0 \leqslant z_0^* X^*(\tau+\vartheta, \tau) W_1^{-1}(\tau+\vartheta, \tau) X(\tau+\vartheta, \tau) z_0 = 0.$$

Полученное противоречие доказывает предложение. □

Предположим, что система (4) равномерно вполне управляема. Тогда $A(t)$ обратима при всех $t \in \mathbb{N}_0$, поэтому матрица Коши $X(t, \tau)$ определена для всех $t, \tau \in \mathbb{N}_0$. Построим матрицу

$$W_2(t, \tau) = \sum_{s=\tau}^{t-1} X(\tau, s+1) B(s) B^*(s) X^*(\tau, s+1) \quad t > \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Заметим, что $W_2(t, \tau)$ симметрическая неотрицательно определенная и матрицы (5) и (8) связаны равенством

$$W_1(t, \tau) = X(t, \tau) W_2(t, \tau) X^*(t, \tau), \qquad t > \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{N}_0.$$

Ниже будут получены различные необходимые и достаточные условия равномерной полной управляемости системы (4). Для их доказательства мы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1. *Пусть* $W \in M_n$ — *симметрическая положительно определенная матрица и* $0 < \mu_1 I \leqslant W \leqslant \mu_2 I$. *Тогда* $W^{-1} \in M_n$ *также симметрическая положительно определенная матрица и*

$$0 < \mu_2^{-1} I \leqslant W^{-1} \leqslant \mu_1^{-1} I. \tag{9}$$

Доказательство. Если W симметрическая положительно определенная, то матрица W^{-1} также симметрическая [4, с. 203] и положительно определенная [4, с. 471]. Пусть $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1$ — собственные значения матрицы W. Так как $W \geqslant \mu_1 I$, то $(W - \mu_1 I) \geqslant 0$. Отсюда следует [4, с. 478], что собственные значения матрицы $W - \mu_1 I$ неотрицательны. Матрица $W - \mu_1 I$ имеет собственные значения $\lambda_n - \mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 - \mu_1$. Следовательно, $\lambda_1 \geqslant \mu_1$. Аналогично доказывается неравенство $\mu_2 \geqslant \lambda_n$. Тогда имеют место неравенства

$$0 < \mu_2^{-1} \leqslant \lambda_n^{-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1^{-1} \leqslant \mu_1^{-1}. \tag{10}$$

Числа $\lambda_n^{-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1^{-1}$ являются собственными значениями матрицы W^{-1} (это вытекает, например, из [5, теорема 5.3.4]). Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, проведенные в обратном порядке, показывают, что неравенства (10) равносильны неравенствам (9). $\square$

Лемма 2. *Пусть W — симметрическая неотрицательно определенная матрица. Тогда неравенство $|W| \leqslant \alpha$ равносильно неравенству $W \leqslant \alpha I$.*

Доказательство. Пусть $|W| \leqslant \alpha$. Тогда

$$0 \leqslant x^* W x = |x^* W x| \leqslant |x^*| \cdot |W| \cdot |x| \leqslant \alpha |x^*| \cdot |x| = x^*(\alpha I)x.$$

Следовательно, $W \leqslant \alpha I$.

Обратно. Пусть $W \leqslant \alpha I$. В силу теоремы о спектральном разложении [4, с. 205] существует ортогональная матрица S такая, что $W = S^* D S$, где $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения матрицы W. Докажем, что

$$\lambda_n \leqslant \alpha. \tag{11}$$

Действительно, предположим, что $\lambda_n > \alpha$. Рассмотрим вектор $x_0 = S^* e_n$. Поскольку $|e_n| = 1$ и матрица S ортогональная, то $|x_0| = 1$. Имеем

$$x_0^* W x_0 = e_n^* S S^* D S S^* e_n = e_n^* D e_n = \lambda_n > \alpha = x_0^*(\alpha I) x_0.$$

Это противоречит неравенству $W \leqslant \alpha I$.

Так как $W^* W = W^2$, то собственные значения матрицы $W^* W$ — это числа $\lambda_1^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^2$. В силу свойств спектральной нормы [4, с. 357, 376] $|W|$ совпадает с корнем из наибольшего собственного значения матрицы $W^* W$. Следовательно, $|W| = \lambda_n$. С учетом неравенства (11) получаем требуемое неравенство $|W| \leqslant \alpha$. $\square$

Теорема 2. *Система (4) ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 5, 6, 7, 8$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства*

$$0 < \alpha_5 I \leqslant W_1(\tau + \vartheta, \tau) \leqslant \alpha_6 I, \tag{12}$$

$$0 < \alpha_7 I \leqslant W_2(\tau + \vartheta, \tau) \leqslant \alpha_8 I. \tag{13}$$

Доказательство в обе стороны вытекает из леммы 1, если положить $\alpha_5 = \alpha_2^{-1}$, $\alpha_6 = \alpha_1^{-1}$, $\alpha_7 = \alpha_4^{-1}$, $\alpha_8 = \alpha_3^{-1}$, поскольку

$$(W_2(\tau + \vartheta, \tau))^{-1} = X^*(\tau + \vartheta, \tau) W_1^{-1}(\tau + \vartheta, \tau) X(\tau + \vartheta, \tau).$$

$\square$

Предложение 2. *Пусть система (4) ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда существуют числа $\delta_i = \delta_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства*

$$|X(\tau + \vartheta, \tau)| \leqslant \delta_1,$$

$$|X(\tau, \tau + \vartheta)| \leqslant \delta_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2, для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства (12), (13). Возьмем произвольное $\tau \in \mathbb{N}_0$. В силу [4, теорема 7.2.7, с. 482] существует матрица $\Gamma = \Gamma(\tau)$, $\Gamma^* = \Gamma$, $\Gamma > 0$, такая, что $W_2(\tau+\vartheta,\tau) = \Gamma\Gamma^*$ (а именно, $\Gamma(\tau) = (W_2(\tau+\vartheta,\tau))^{1/2}$). Из свойств симметрических матриц, неравенств (13) и лемм 1, 2 получаем оценки

$$\sqrt{\alpha_7}I \leqslant \Gamma \leqslant \sqrt{\alpha_8}I, \qquad |\Gamma| \leqslant \sqrt{\alpha_8}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_8}}I \leqslant \Gamma^{-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_7}}I, \qquad |\Gamma^{-1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_7}}. \tag{15}$$

Заметим, что $W_1(\tau+\vartheta,\tau) = X(\tau+\vartheta,\tau)\Gamma\Gamma^*X^*(\tau+\vartheta,\tau)$. Пусть λ_n — наибольшее собственное значение матрицы $W_1(\tau+\vartheta,\tau)$. Из неравенств (12) получаем $\lambda_n \leqslant \alpha_6$. Далее, в силу свойств спектральной нормы, имеем равенства $|X(\tau+\vartheta,\tau)\Gamma| = |(X(\tau+\vartheta,\tau)\Gamma)^*| = \sqrt{\lambda_n}$. Следовательно,

$$|X(\tau+\vartheta,\tau)| = |X(\tau+\vartheta,\tau)\Gamma\Gamma^{-1}| \leqslant |X(\tau+\vartheta,\tau)\Gamma||\Gamma^{-1}| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\alpha_7}} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_6}}{\sqrt{\alpha_7}} =: \delta_1.$$

Представим матрицу $W_1(\tau+\vartheta,\tau)$ в виде $W_1(\tau+\vartheta,\tau) = FF^*$, где $F := (W_1(\tau+\vartheta,\tau))^{1/2}$ — симметрическая положительно определенная матрица. Из свойств симметрических матриц, неравенств (12) и лемм 1, 2 получаем оценки

$$\sqrt{\alpha_5}I \leqslant F \leqslant \sqrt{\alpha_6}I, \qquad |F| \leqslant \sqrt{\alpha_6}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_6}}I \leqslant F^{-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_5}}I, \qquad |F^{-1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_5}}. \tag{17}$$

Имеем $W_2(\tau+\vartheta,\tau) = X(\tau,\tau+\vartheta)FF^*X^*(\tau,\tau+\vartheta)$. Пусть μ_n — наибольшее собственное значение матрицы $W_2(\tau+\vartheta,\tau)$. Тогда из (13) получаем неравенство $\mu_n \leqslant \alpha_8$. Используя свойства спектральной нормы, получаем $|X(\tau,\tau+\vartheta)F| = |(X(\tau,\tau+\vartheta)F)^*| = \sqrt{\mu_n}$. Следовательно,

$$|X(\tau,\tau+\vartheta)| \leqslant |X(\tau,\tau+\vartheta)F||F^{-1}| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_8}}{\sqrt{\alpha_5}} =: \delta_2.$$

Оценки (14)–(17) являются равномерными (по $\tau \in \mathbb{N}_0$), поэтому константы δ_1, δ_2 не зависят от $\tau \in \mathbb{N}_0$. Предложение доказано. □

Предложение 3. *Пусть система* (4) *ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда существуют $b_i = b_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2$, такие, что для любого $\tau \in \mathbb{N}_0$ и для любого $t \in [\tau, \tau+\vartheta)$ выполнены неравенства*

$$|X(\tau+\vartheta, t+1)B(t)| \leqslant b_1, \tag{18}$$

$$|X(\tau, t+1)B(t)| \leqslant b_2. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (4) ϑ-равномерно вполне управляема. Следовательно, имеют место неравенства (12), (13) для некоторых α_i, $i = 5, 6, 7, 8$. Зафиксируем произвольное $\tau \in \mathbb{N}_0$ и любое $t \in [\tau, \tau+\vartheta)$. Положим

$$Q := X(\tau+\vartheta, t+1)B(t)B^*(t)X^*(\tau+\vartheta, t+1),$$
$$P := X(\tau, t+1)B(t)B^*(t)X^*(\tau, t+1).$$

Тогда, в силу определений (5), (8) матриц $W_1(t,\tau)$, $W_2(t,\tau)$, выполнены неравенства

$$Q \leqslant W_1(\tau+\vartheta,\tau), \quad P \leqslant W_2(\tau+\vartheta,\tau).$$

Отсюда и из неравенств (12), (13) следует, что наибольшие собственные значения $\lambda_n(P)$ и $\lambda_n(Q)$ матриц P и Q соответственно удовлетворяют неравенствам $\lambda_n(P) \leqslant \alpha_6$, $\lambda_n(Q) \leqslant \alpha_8$. В силу свойств спектральной нормы получаем неравенства

$$|X(\tau+\vartheta, t+1)B(t)| = \sqrt{\lambda_n(P)} \leqslant \sqrt{\alpha_6} =: b_1,$$
$$|X(\tau, t+1)B(t)| = \sqrt{\lambda_n(Q)} \leqslant \sqrt{\alpha_8} =: b_2.$$

Предложение доказано. □

Предложение 4. *Если система* (4) *равномерно вполне управляема, то*

$$\sup_{t\in\mathbb{N}_0}|B(t)|\leqslant b<+\infty. \tag{20}$$

Доказательство. Выберем любое $\tau\in\mathbb{N}_0$ и положим $t=\tau+\vartheta-1$ в неравенстве (18). Получим, что $|B(\tau+\vartheta-1)|\leqslant b_1$ для любого $\tau\in\mathbb{N}_0$, следовательно, $\sup\limits_{t\geqslant\vartheta-1}|B(t)|\leqslant b_1$. Положим $b_3:=\max\limits_{0\leqslant t<\vartheta-1}|B(t)|$. Тогда $b:=\max\{b_1,b_3\}$ обеспечивает неравенство (20). □

Предложение 5. *Пусть система* (4) *ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда система* (4) *$(\vartheta+1)$-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Покажем, что для матриц $W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)$, $W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)$ выполнены неравенства, аналогичные (12), (13), равномерно для всех $\tau\in\mathbb{N}_0$. В силу определения (5) матрицы $W_1(t,\tau)$ имеем равенства

$$\begin{aligned}W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)&=\sum_{s=\tau}^{\tau+\vartheta}X(\tau+\vartheta+1,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau+\vartheta+1,s+1)=\\&=\sum_{s=\tau+1}^{\tau+\vartheta}X(\tau+\vartheta+1,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau+\vartheta+1,s+1)+\\&\quad+X(\tau+\vartheta+1,\tau+1)B(\tau)B^*(\tau)X^*(\tau+\vartheta+1,\tau+1)=\\&=W_1(\tau+\vartheta+1,\tau+1)+X(\tau+\vartheta+1,\tau+1)B(\tau)B^*(\tau)X^*(\tau+\vartheta+1,\tau+1).\end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно,

$$W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)\geqslant W_1(\tau+\vartheta+1,\tau+1)\geqslant\alpha_5I=:\alpha_5'I.$$

Далее, в силу (12) выполнено неравенство $W_1(\tau+\vartheta+1,\tau+1)\leqslant\alpha_6I$. Из предложений 2 и 4 получаем соотношения

$$|X(\tau+\vartheta+1,\tau+1)B(\tau)B^*(\tau)X^*(\tau+\vartheta+1,\tau+1)|\leqslant|X(\tau+\vartheta+1,\tau+1)|^2|B(\tau)|^2\leqslant\delta_1^2b^2.$$

По лемме 2 получим, что $X(\tau+\vartheta+1,\tau+1)B(\tau)B^*(\tau)X^*(\tau+\vartheta+1,\tau+1)\leqslant\delta_1^2b^2I$. Из равенства (21) следует

$$W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)\leqslant(\alpha_6+\delta_1^2b^2)I=:\alpha_6'I.$$

Далее, в силу определения (8) матрицы $W_2(t,\tau)$ имеем

$$W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)=\sum_{s=\tau}^{\tau+\vartheta}X(\tau,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau,s+1)=$$

$$=\sum_{s=\tau}^{\tau+\vartheta-1}X(\tau,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau,s+1)+X(\tau,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)X^*(\tau,\tau+\vartheta+1)=$$

$$=W_2(\tau+\vartheta,\tau)+X(\tau,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)X^*(\tau,\tau+\vartheta+1). \tag{22}$$

Следовательно,

$$W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)\geqslant W_2(\tau+\vartheta,\tau)\geqslant\alpha_7I=:\alpha_7'I.$$

Далее, в силу (13) выполнено неравенство $W_2(\tau+\vartheta,\tau)\leqslant\alpha_8I$. Далее, используя предложение 2 и неравенство (19), в котором вместо τ и вместо t стоит $\tau+\vartheta$, получим

$$\begin{aligned}&|X(\tau,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)X^*(\tau,\tau+\vartheta+1)|=\\&=|X(\tau,\tau+\vartheta)X(\tau+\vartheta,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)X^*(\tau+\vartheta,\tau+\vartheta+1)X^*(\tau,\tau+\vartheta)|\leqslant\\&\leqslant|X(\tau,\tau+\vartheta)|^2|X(\tau+\vartheta,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)|^2\leqslant\delta_2^2b_2^2.\end{aligned}$$

По лемме 2 получим, что $X(\tau,\tau+\vartheta+1)B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)X^*(\tau,\tau+\vartheta+1)\leqslant\delta_2^2b_2^2I$. Из равенства (22) следует

$$W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)\leqslant(\alpha_8+\delta_2^2b_2^2)I=:\alpha_8'I.$$

Предложение доказано. □

Следствие 1. *Пусть система* (4) *ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда для любого $\vartheta_1\geqslant\vartheta$ система* (4) *ϑ_1-равномерно вполне управляема.*

Следствие 1 вытекает из предложения 5.

Определение 3 (см. [6]). Матрица $A(t)$, $t\in\mathbb{N}_0$, называется *вполне ограниченной*, если она невырожденная для всех $t\in\mathbb{N}_0$, и выполнены условия

$$M=\sup_{t\in\mathbb{N}_0}|A(t)|<\infty,\qquad m=\sup_{t\in\mathbb{N}_0}|A^{-1}(t)|<\infty.$$

Теорема 3. *Если система* (4) *равномерно вполне управляема, то матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vartheta\in\mathbb{N}$ — число, обеспечивающее ϑ-равномерную полную управляемость системы (4). В силу определений (5) и (8) матриц $W_1(t,\tau)$ и $W_2(t,\tau)$ для всякого $\tau\in\mathbb{N}_0$ имеем равенства

$$W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)=A(\tau+\vartheta)W_1(\tau+\vartheta,\tau)A^*(\tau+\vartheta)+B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta),\tag{23}$$

$$W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)=A^{-1}(\tau)\Big(W_2(\tau+\vartheta+1,\tau+1)+B(\tau)B^*(\tau)\Big)(A^{-1}(\tau))^*.\tag{24}$$

В силу предложения 5 система (4) является $(\vartheta+1)$-равномерно вполне управляемой. Следовательно, существуют $\alpha_i'=\alpha_i'(\vartheta)>0$, $i=5,6,7,8$, такие, что для всех $\tau\in\mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$0<\alpha_5'I\leqslant W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)\leqslant\alpha_6'I,\tag{25}$$

$$0<\alpha_7'I\leqslant W_2(\tau+\vartheta+1,\tau)\leqslant\alpha_8'I.\tag{26}$$

В силу [4, теорема 7.2.7, с. 482] (см. доказательство предложения 2) существует матрица $F=F(\tau)$, $F=F^*$, $F>0$, такая, что $W_1(\tau+\vartheta,\tau)=FF^*$. Для F выполнены неравенства (16), (17). Рассмотрим матрицу $V_1=A(\tau+\vartheta)W_1(\tau+\vartheta,\tau)A^*(\tau+\vartheta)$, входящую как слагаемое в (23). Заметим, что V_1 — симметрическая неотрицательно определенная матрица. Так как

$$V_1=W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)-B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta),$$

то

$$|V_1|\leqslant|W_1(\tau+\vartheta+1,\tau)|+|B(\tau+\vartheta)B^*(\tau+\vartheta)|\leqslant\alpha_6'+b^2=:c_1$$

в силу (25), леммы 2 и предложения 4. Из леммы 2 отсюда следует, что $V_1\leqslant c_1I$, то есть для любого $x\in\mathbb{R}^n$ такого, что $|x|=1$, выполнено неравенство $x^*V_1x\leqslant c_1$. Следовательно, $\sqrt{x^*V_1x}\leqslant\sqrt{c_1}$. Таким образом,

$$|A(\tau+\vartheta)F|=|F^*A^*(\tau+\vartheta)|=\max_{|x|=1}|F^*A^*(\tau+\vartheta)x|=$$
$$=\max_{|x|=1}\sqrt{x^*A(\tau+\vartheta)FF^*A^*(\tau+\vartheta)x}=\max_{|x|=1}\sqrt{x^*V_1x}\leqslant\sqrt{c_1}.$$

Следовательно,

$$|A(\tau+\vartheta)|=|A(\tau+\vartheta)FF^{-1}|\leqslant|A(\tau+\vartheta)F|\cdot|F^{-1}|\leqslant\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\alpha_5}}=:c_2$$

для любого $\tau \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, $\sup\limits_{t \geqslant \vartheta} |A(t)| \leqslant c_2$. Полагая

$$c := \max\{|A(0)|, |A(1)|, \ldots, |A(\vartheta - 1)|, c_2\},$$

получаем, что неравенство $|A(t)| \leqslant c$ выполнено для всех $t \in \mathbb{N}_0$.

Далее (см. доказательство предложения 2), существует матрица $\Gamma = \Gamma(\tau)$, $\Gamma^* = \Gamma$, $\Gamma > 0$, такая, что $W_2(\tau + \vartheta + 1, \tau + 1) = \Gamma\Gamma^*$. Для Γ выполнены неравенства (14), (15). Рассмотрим матрицу $V_2 = A^{-1}(\tau) W_2(\tau + \vartheta + 1, \tau + 1)(A^{-1}(\tau))^*$, входящую как слагаемое в (24). Имеем $V_2^* = V_2$ и $V_2 \geqslant 0$. Так как

$$V_2 = W_2(\tau + \vartheta + 1, \tau) - X(\tau, \tau + 1) B(\tau) B^*(\tau) X^*(\tau, \tau + 1),$$

то

$$|V_2| \leqslant |W_2(\tau + \vartheta + 1, \tau)| + |X(\tau, \tau + 1) B(\tau) B^*(\tau) X^*(\tau, \tau + 1)| \leqslant \alpha_8' + b_2^2 =: d_1$$

в силу (26), леммы 2 и (19). Из леммы 2 отсюда следует, что $V_2 \leqslant d_1 I$, то есть для любого $x \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|x| = 1$, выполнено неравенство $x^* V_2 x \leqslant d_1$. Следовательно, $\sqrt{x^* V_2 x} \leqslant \sqrt{d_1}$. Таким образом,

$$|A^{-1}(\tau)\Gamma| = |\Gamma^*(A^{-1}(\tau))^*| := \max_{|x|=1} |\Gamma^*(A^{-1}(\tau))^* x| =$$
$$= \max_{|x|=1} \sqrt{x^* A^{-1}(\tau)\Gamma\Gamma^*(A^{-1}(\tau))^* x} = \max_{|x|=1} \sqrt{x^* V_2 x} \leqslant \sqrt{d_1}.$$

Следовательно,

$$|A^{-1}(\tau)| = |A^{-1}(\tau)\Gamma\Gamma^{-1}| \leqslant |A^{-1}(\tau)\Gamma| \cdot |\Gamma^{-1}| \leqslant \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{\alpha_7}} =: d$$

для любого $\tau \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена. Теорема доказана. □

Докажем критерий равномерной полной управляемости системы (4), аналогичный критерию Тонкова равномерной полной управляемости системы с непрерывным временем [7].

Теорема 4. *Система* (4) *ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) *матрица $A(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, вполне ограничена;*

(2) *матрица $B(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, ограничена;*

(3) *существует число $\ell = \ell(\vartheta) > 0$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{N}_0$ и для любого $x_1 \in \mathbb{R}^n$ существует управление $u(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta)$, которое переводит решение системы* (4) *из точки $x(\tau) = 0$ в точку $x(\tau + \vartheta) = x_1$, при этом выполнено неравенство $|u(t)| \leqslant \ell |x_1|$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta)$.*

Доказательство. Необходимость. Полная ограниченность матрицы $A(\cdot)$ и ограниченность матрицы $B(\cdot)$ установлены в теореме 3 и в предложении 4 соответственно.

Для произвольных $\tau \in \mathbb{N}_0$ и $x_1 \in \mathbb{R}^n$ выберем в качестве искомого управления $u(\cdot)$ функцию

$$u(t) := B^*(t) X^*(\tau + \vartheta, t + 1) W_1^{-1}(\tau + \vartheta, \tau) x_1, \quad t \in [\tau, \tau + \vartheta).$$

Подставляя это управление в систему (4) и применяя формулу Коши (3), получаем, что решение $x(\cdot)$ системы (4), удовлетворяющее начальному условию $x(\tau) = 0$, попадает в точку x_1 в момент времени $\tau + \vartheta$.

В силу (18) для всех $t \in [\tau, \tau + \vartheta)$ выполнено неравенство

$$|B^*(t) X^*(\tau + \vartheta, t + 1)| = |X(\tau + \vartheta, t + 1) B(t)| \leqslant b_1,$$

где b_1 не зависит от τ. Из леммы 2 получаем оценку $|W_1^{-1}(\tau + \vartheta, \tau)| \leqslant \alpha_2$. Следовательно,

$$|u(t)| \leqslant b_1 \alpha_2 |x_1| =: \ell |x_1|, \quad t \in [\tau, \tau + \vartheta).$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.

Из полной ограниченности матрицы $A(\cdot)$ и ограниченности матрицы $B(\cdot)$ вытекает оценка $|W_1(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \alpha_6$, равномерная по $\tau \in \mathbb{N}_0$. Тогда, в силу леммы 2, $W_1(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \alpha_6 I$ при всех $\tau \in \mathbb{N}_0$.

Докажем, что при некотором $\alpha_5 > 0$ и всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство $W_1(\tau+\vartheta,\tau) \geqslant \alpha_5 I$. Предположим противное, пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие $\tau_k \in \mathbb{N}_0$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, $|\xi_k| = 1$, что

$$\xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\xi_k < \frac{1}{k}.$$

Пусть $\widehat{\xi}$, $|\widehat{\xi}| = 1$, — предельная точка последовательности $\{\xi_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\xi_k\}$ имеет предел $\widehat{\xi}$. Для квадратичной формы $\xi^* W_1(\tau+\vartheta,\tau)\xi$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&|\xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\xi_k - \widehat{\xi}^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi}| \leqslant \\
&\leqslant |\xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)(\xi_k-\widehat{\xi})| + |(\xi_k^*-\widehat{\xi}^*)W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi}| \leqslant \\
&\leqslant |\xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)||\xi_k-\widehat{\xi}| + |\xi_k^*-\widehat{\xi}^*||W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi}| \leqslant \\
&\leqslant 2|W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)||\xi_k^*-\widehat{\xi}^*|.
\end{aligned}$$

Поскольку матрица $W_1(\tau+\vartheta,\tau)$ равномерно ограничена на $\mathbb{N}_0$, отсюда следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k \geqslant K_\varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \widehat{\xi}^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi} \leqslant \\
&\leqslant \xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\xi_k + |\xi_k^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\xi_k - \widehat{\xi}^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi}| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

При каждом $k \in \mathbb{N}$ на $[\tau_k, \tau_k+\vartheta)$ определено управление $u_k(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $|u_k(t)| \leqslant \ell|\widehat{\xi}| = \ell$ и такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (4) с управлением $u = u_k(\cdot)$ и начальным условием $x(\tau_k) = 0$ удовлетворяет равенству $x(\tau_k+\vartheta) = \widehat{\xi}$. Тогда

$$\sum_{s=\tau_k}^{\tau_k+\vartheta-1} X(\tau_k+\vartheta,s+1)B(s)u_k(s) = \widehat{\xi},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
1 = \widehat{\xi}^*\widehat{\xi} = |\widehat{\xi}^* &\sum_{s=\tau_k}^{\tau_k+\vartheta-1} X(\tau_k+\vartheta,s+1)B(s)u_k(s)| \leqslant \\
\leqslant \sum_{s=\tau_k}^{\tau_k+\vartheta-1} &|\widehat{\xi}^* X(\tau_k+\vartheta,s+1)B(s)|\cdot|u_k(s)| \leqslant \ell \sum_{s=\tau_k}^{\tau_k+\vartheta-1} |\widehat{\xi}^* X(\tau_k+\vartheta,s+1)B(s)| \leqslant \\
\leqslant \ell\Big(\vartheta &\sum_{s=\tau_k}^{\tau_k+\vartheta-1} |\widehat{\xi}^* X(\tau_k+\vartheta,s+1)B(s)|^2\Big)^{1/2} = \ell\big(\vartheta\cdot\widehat{\xi}^* W_1(\tau_k+\vartheta,\tau_k)\widehat{\xi}\big)^{1/2} < \ell\sqrt{\vartheta\varepsilon}.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon < \dfrac{1}{\ell^2\vartheta}$ получаем противоречие.

Итак, существуют такие положительные α_5 и α_6, что при всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства (12). Для доказательства (13) воспользуемся равенством

$$W_2(\tau+\vartheta,\tau) = X(\tau,\tau+\vartheta)W_1(\tau+\vartheta,\tau)X^*(\tau,\tau+\vartheta), \tag{27}$$

вытекающим из определения матриц $W_1(t,\tau)$ и $W_2(t,\tau)$. Из полной ограниченности матрицы $A(\cdot)$ следует ограниченность матрицы $X(t,t+\vartheta)$, $t \in \mathbb{N}_0$. Отсюда, из равенства (27) и неравенства $|W_1(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \alpha_6$ (вытекающего из (12) и леммы 2) следует, что найдется такое $\alpha_8 > 0$, что

$$|W_2(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \alpha_8, \quad \tau \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда из леммы 2 вытекает неравенство $W_2(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \alpha_8 I$.

Далее, из равенства (27) следует, что

$$W_2^{-1}(\tau+\vartheta,\tau) = X^*(\tau+\vartheta,\tau)W_1^{-1}(\tau+\vartheta,\tau)X(\tau+\vartheta,\tau). \tag{28}$$

Из полной ограниченности матрицы $A(\cdot)$ следует ограниченность матрицы $X(t+\vartheta,t)$, $t \in \mathbb{N}_0$. Отсюда, из равенства (28) и неравенства $|W_1^{-1}(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \alpha_5^{-1}$ (вытекающего из (12) и лемм 1 и 2) следует, что найдется такое $\beta_7 > 0$, что

$$|W_2^{-1}(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \beta_7, \quad \tau \in \mathbb{N}_0.$$

Полагая $\alpha_7 := 1/\beta_7$ и применяя леммы 2 и 1, отсюда получаем неравенство $\alpha_7 I \leqslant W_2(\tau+\vartheta,\tau)$. Таким образом, неравенства (13) выполнены. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
3. Kalman R.E. Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
5. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
6. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

Поступила в редакцию 15.08.2014

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ps@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: eltonkov@udm.ru

V. A. Zaitsev, S. N. Popova, E. L. Tonkov

On the property of uniform complete controllability of a discrete-time linear control system

Keywords: linear control system, discrete time, uniform complete controllability.

MSC: 93B05, 93C05, 93C55

We study the property of uniform complete controllability (according to Kalman) for a discrete-time linear control system

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

We prove that if the system (1) is uniformly completely controllable, then the matrix $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{N}_0$ (i. e. $\sup_{t\in\mathbb{N}_0}(|A(t)|+|A^{-1}(t)|) < +\infty$) and the matrix $B(\cdot)$ is bounded on $\mathbb{N}_0$. We prove that

the system (1) is uniformly completely controllable if and only if there exists a $\vartheta \in \mathbb{N}$ such that for all $\tau \in \mathbb{N}_0$ the inequalities $\alpha_1 I \leqslant W_1(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \beta_1 I$, $\alpha_2 I \leqslant W_2(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \beta_2 I$ hold for some positive α_i and β_i, where

$$W_1(t,\tau) \doteq \sum_{s=\tau}^{t-1} X(t,s+1)B(s)B^*(s)X^*(t,s+1), \quad W_2(t,\tau) \doteq \sum_{s=\tau}^{t-1} X(\tau,s+1)B(s)B^*(s)X^*(\tau,s+1).$$

On the basis of this statement, we prove the following criterion for uniform complete controllability of the system (1), which is similar to the Tonkov criterion of uniform complete controllability for continuous-time systems: the system (1) is ϑ-uniformly completely controllable if and only if the matrix $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{N}_0$; the matrix $B(\cdot)$ is bounded on $\mathbb{N}_0$; there exists an $\ell = \ell(\vartheta) > 0$ such that for every $\tau \in \mathbb{N}_0$ and for any $x_1 \in \mathbb{R}^n$ there exists a control function $u(t)$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta)$, which transfers the solution of the system (1) from the state $x(\tau) = 0$ to the state $x(\tau+\vartheta) = x_1$, and the inequality $|u(t)| \leqslant \ell |x_1|$ holds for all $t \in [\tau, \tau+\vartheta)$.

REFERENCES

1. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.

2. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems*, New York–London–Sydney–Toronto: Wiley–Interscience, 1972. Translated under the title *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya*, Moscow: Mir, 1977, 650 p.

3. Kalman R.E. Contributions to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.

4. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.

5. Lancaster P. *Theory of matrices*, New York–London: Academic Press, 1969. Translated under the title *Teoriya matrits*, Moscow: Nauka, 1978, 280 p.

6. Demidovich V.B. On a criterion of stability for difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).

7. Tonkov E.L. A criterion for uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).

Received 15.08.2014

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru