УДК 519.6

© *А. А. Петунин, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов*

ЛОКАЛЬНЫЕ ВСТАВКИ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

Рассматривается процедура встраивания оптимизируемых фрагментов маршрутных решений в глобальные решения «большой» задачи, определяемые эвристическими алгоритмами. Постановка задачи маршрутизации учитывает некоторые особенности инженерной задачи о последовательной резке деталей, имеющих каждая один внешний и, возможно, несколько внутренних контуров. Последние должны подвергаться резке раньше внешнего, что приводит к большому числу условий предшествования. Данные условия активно используются в интересах снижения сложности вычислений. Тем не менее размерность задачи остается достаточно большой, что, в частности, не позволяет применять «глобальное» динамическое программирование и вынуждает к использованию эвристических алгоритмов (исследуемая задача относится к числу труднорешаемых в традиционном понимании). Поэтому представляет интерес разработка методов коррекции решений, получаемых на основе упомянутых алгоритмов. В настоящей работе такая коррекция реализуется посредством замены фрагментов (упомянутых решений), имеющих умеренную размерность, оптимальными «блоками», конструируемыми на основе динамического программирования с локальными условиями предшествования, которые согласуются с ограничениями исходной «большой» задачи. Предлагаемая замена не ухудшает, а, в типичных случаях, улучшает качество исходного «эвристического» решения, что подтверждается вычислительным экспериментом на многоядерной ПЭВМ.

Предложенный алгоритм реализован в итерационном режиме: полученное после первой вставки на основе динамического программирования решение в виде пары «маршрут–трасса» принимается за исходное, для которого вновь конструируется вставка. При этом начало этой новой вставки выбирается случайно в пределах, определяемых возможностями формирования скользящего «окна» ощутимой, но все же достаточной для применения экономичной версии динамического программирования размерности. Далее процедура повторяется. Работа итерационного алгоритма иллюстрируется решением модельных задач, включая варианты с достаточно плотной «упаковкой» заготовок деталей на листе, что типично для машиностроительного производства.

Ключевые слова: маршрутная задача, условия предшествования.

Введение

Известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК) [1–3] является прототипом многих задач дискретной оптимизации, включающих элементы, обусловленные инженерными приложениями (в [1] указан целый ряд содержательных задач такого рода). В упомянутых постановках обычно присутствуют ограничения, существенно влияющие на процесс решения и приводящие к иным, в сравнении с ЗК, трудностям. Одна из прикладных задач, возникающая в машиностроении, связана с маршрутизацией резки деталей [4, 5], достаточно плотно «упакованных» на листе; предполагается, что резка осуществляется на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ). Размерность упомянутой конкретной задачи достаточно велика, что вынуждает к использованию эвристических алгоритмов. В то же время после нахождения решений на основе упомянутых алгоритмов может возникать естественная потребность в исправлении отдельных неудачных фрагментов, замены «кусков» глобального решения улучшенными компонентами. Для построения последних применяются оптимизационные процедуры, восходящие к [6].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13–04–00847, 14–08–00419, 13–08–00643, 13–01–96022 РФФИ-Урал) и Российского научного фонда (грант № 14–11–00109).

§ 1. Общие обозначения и определения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки); $\triangleq$ обозначает равенство по определению, а def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Как правило, будем говорить в этом случае о семействе подмножеств (п/м) того или иного заданного априори множества. Через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$ обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества H; $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для любых двух объектов α, β через $\{\alpha; \beta\}$ обозначаем множество, содержащее α и β и не содержащее никаких других элементов; $\{\alpha; \beta\}$ — неупорядоченная пара объектов α, β. Если y — объект, то $\{y\} \triangleq \{y; y\}$ есть одноэлементное множество (синглетон), содержащее y. Каждое множество — объект. С учетом этого, следуя [7, с. 67], полагаем для любых двух объектов p и q, что $(p, q) \triangleq \big\{\{p\}; \{p; q\}\big\}$, получая упорядоченную пару (УП) объектов p, q. При этом p есть первый, а q — второй элементы УП (p, q). Иногда удобно обозначать УП одной буквой, а затем (если это потребуется) восстанавливать ее элементы: если z есть УП, то есть $z = (u, v)$ для некоторых объектов u и v, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z, для которых $\mathrm{pr}_1(z) = u$ и $\mathrm{pr}_2(z) = v$. Если $z \in A \times B$, где A и B — множества, то $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. Если α, β и γ — объекты, то $(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq \big((\alpha, \beta), \gamma\big)$. Для любых трех множеств A, B и C, как обычно [8, с. 17], $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Используем индексную форму записи функций (см. [9]). Если P и Q — непустые множества, то $(\mathrm{Bi})[P; Q]$ есть def множество всех биекций [10, с. 87] P на Q (оно может оказаться пустым). Если $\lambda \in (\mathrm{Bi})[P; Q]$, то определена биекция $\lambda^{-1} \in (\mathrm{Bi})[Q; P]$, обратная к λ, для которой

$$\Big(\lambda\big(\lambda^{-1}(q)\big) = q \quad \forall\, q \in Q\Big) \,\&\, \Big(\lambda^{-1}\big(\lambda(p)\big) = p \quad \forall\, p \in P\Big).$$

Перестановкой непустого множества A называется [10, с. 87] биекция A на себя; итак, $(\mathrm{Bi})[A; A]$ есть множество всех перестановок A.

Как обычно, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$; пусть также $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ и, кроме того, $\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant i) \;\&\; (i \leqslant q)\} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, q \in \mathbb{N}_0$. Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и полагаем $(\mathrm{bi})[K] \triangleq (\mathrm{Bi})[\overline{1, |K|}; K]$; полагаем также, что $|\varnothing| \triangleq 0$.

Напомним, что отношением называется п/м декартова произведения двух множеств; каждое отношение состоит из УП. В дальнейшем $\circ$ используется для обозначения композиции отображений: если A, B и C — непустые множества, $g : A \to B$ и $h : B \to C$, то $h \circ g \triangleq \Big(h\big(g(x)\big)\Big)_{x \in A}$ действует из A в C, то есть $h \circ g : A \to C$.

Если S — непустое множество, то через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций из S в $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая.

§ 2. Оптимизационная задача маршрутизации и метод динамического программирования

В настоящем разделе рассматривается вариант общей постановки [11]. Целью данных построений является конструирование некоторого «экстремального блока» с целью улучшения маршрутных решений задач большой размерности. Рассматриваемая здесь задача маршрутизации аналогична «большой» задаче и задается набором параметров, позволяющих осуществлять нужное встраивание полученных (локальных) оптимальных решений с соблюдением ограничений упомянутой «большой» задачи.

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X и полагаем, что все рассматриваемые далее процессы осуществляются в его пределах. В конкретной задаче маршрутизации, связанной с резкой деталей из листа (после осуществления раскроя последнего), в качестве X можно использовать плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ либо достаточно большой прямоугольник на плоскости.

Имея в виду построение упомянутого «экстремального блока», фиксируем в настоящем и последующем разделах точку $x^0 \in X$, играющую роль базы (локального) процесса, число $N \in \mathbb{N}$ со свойством $2 \leqslant N$, множества $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$, именуемые ниже мегаполисами, а также отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \quad \ldots, \quad \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{2.1}$$

При $j \in \overline{1,N}$ отношение $\mathbb{M}_j$ определяет набор возможных вариантов выполнения работ в мегаполисе M_j; при $z \in \mathbb{M}_j$ имеем «город» $\mathrm{pr}_1(z) \in M_j$ начала работы и «город» $\mathrm{pr}_2(z) \in M_j$ окончания работы.

Замечание 1. Обсудим простейший вариант, связанный с резкой детали. Эта деталь есть плоское множество, имеющее один внешний и, возможно, несколько внутренних контуров. Возле каждого из этих (граничных) контуров выделена некоторая эквидистанта, определяющая резку по контуру с некоторым запасом и представляющая собой замкнутую кривую. Возле эквидистанты с внешней (по отношению к «настоящему» контуру) стороны намечены точки, образующие в совокупности соответствующий мегаполис M_j. Эти точки могут группироваться в УП z, у каждой из которых $\mathrm{pr}_1(z)$ отвечает точке врезки, а $\mathrm{pr}_2(z)$ — точке выключения инструмента. Две эти точки близки и могут в ряде случаев совпадать. Так или иначе, имеем УП, совокупность которых рассматриваем в качестве отношения $\mathbb{M}_j$. В наиболее простом случае совпадения каждой точки врезки с отвечающей ей точкой выключения инструмента в качестве $\mathbb{M}_j$ уместно рассматривать диагональ: $\mathbb{M}_j = \{(y,y) : y \in M_j\}$. Здесь совпадения $\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z), z \in \mathbb{M}_j$, имеют ясный смысл: контур детали должен быть вырезан полностью по соответствующей ему эквидистанте. В более общем случае мы будем (позднее) допускать следующую возможность: точки врезки и выключения инструмента можно менять местами, изменяя при этом направление резки. Отметим, что хотя две упомянутые точки близки к эквидистанте, они отвечают режиму перемещения в металле, а стало быть, и ощутимым затратам времени.

Мы полагаем в дальнейшем выполненными следующие условия:

$$\left(x^0 \notin M_j \quad \forall\, j \in \overline{1,N}\ \right) \ \& \ \left(M_p \cap M_q = \varnothing \quad \forall\, p \in \overline{1,N} \quad \forall\, q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}\right). \tag{2.2}$$

Заметим, что при встраивании «экстремального блока» в процедуру решения «большой» задачи условия (2.2) наследуются обычно от аналогичных условий «большой» задачи. Пусть теперь

$$\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \quad \forall\, j \in \overline{1,N} \tag{2.3}$$

(в исследуемом варианте задачи листовой резки типична ситуация $\mathbf{M}_j = M_j$, но мы всё же будем рассматривать более общий вариант (2.3)). По смыслу (2.3) определяет множество всех возможных вариантов окончания работ в соответствующем мегаполисе. Разумеется,

$$\mathbf{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1), \quad \ldots, \quad \mathbf{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N).$$

Удобно ввести также следующие два непустых конечных множества:

$$\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\right), \quad \mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\right) \tag{2.4}$$

(вводя (2.3), (2.4), мы действуем в соответствии с более общей конструкцией [11]). Первое из множеств (2.4) характеризует возможные системы перемещений вида

$$x^0 \to \left(x_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}\right) \to \ldots \to \left(x_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}\right), \tag{2.5}$$

для которых должны выполняться условия $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \ldots, \left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}\right) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$, где α — перестановка $\overline{1,N}$. В (2.5) прямые стрелки соответствуют внешним перемещениям, а волнистые — перемещениям при выполнении внутренних работ, связанных с мегаполисами. Выбор α может быть стеснен условиями предшествования.

В этой связи фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$; УП $z \in \mathbf{K}$ называем адресными, рассматривая всякий раз $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ как своеобразного отправителя, а $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$ — как получателя; посещение отправителя должно предшествовать посещению получателя (в задаче о резке деталей на станках с ЧПУ содержательный смысл элементов УП иной: $\mathrm{pr}_1(z)$ связывается с более ранней резкой какого-то внутреннего контура в сравнении с $\mathrm{pr}_2(z)$, соответствующим резке внешнего контура). Отсылаем к [6, ч. 2] в связи с обсуждением вопросов, связанных с предшествованием; отметим только, что при $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ (здесь и ниже)

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall\, z \in \mathbf{K}\right\} \tag{2.6}$$

есть множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию. Предполагается, что

$$\forall\, \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \exists\, z_0 \in \mathbf{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{K}_0. \tag{2.7}$$

Как показано в [6, ч. 2] (при условии (2.7)), $\mathbf{A} \neq \varnothing$. Отметим, что $\mathbf{K}$ определяет условия предшествования «экстремального блока»; они должны извлекаться из аналогичных условий «большой» задачи, что и будет сделано ниже. Заметим, кстати, что из (2.7), в частности, следует, что $\forall\, z \in \mathbf{K} : \mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z)$.

Через $\widetilde{\mathbb{Z}}$ обозначим множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Следуя в идейном отношении схеме (2.5), имеем при $\alpha \in \mathbb{P}$, что

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \widetilde{\mathbb{Z}} \mid \big(z_0 = (x^0, x^0)\big) \ \&\ \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall\, t \in \overline{1,N}\big)\Big\} \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathbb{Z}}). \tag{2.8}$$

В частности, $\mathcal{Z}_\alpha$ определено при $\alpha \in \mathbf{A}$. Если $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то УП $\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big)$ называем допустимым решением (ДР). Разумеется, здесь идет речь о ДР в задаче «экстремального блока». Множество всех таких ДР непусто и конечно.

Функции стоимости. Фиксируем сейчас функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], \quad \ldots, \quad c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}] \tag{2.9}$$

(при встраивании «экстремального блока» в «большую» задачу эти функции будут должным образом конкретизироваться), полагаемые максимально продолженными; при этом по смыслу $\mathbf{c}$ будет использоваться при оценивании внешних перемещений (из x^0 в мегаполисы, а также между мегаполисами), $c_1, \ldots, c_N$ — для оценивания внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния. Продолжение существенных в содержательном отношении фрагментов функций (2.9) на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $\mathbb{X}$ соответственно может быть произвольным. Ниже используется аддитивное агрегирование затрат, определяемых посредством функций (2.9). Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \widetilde{\mathbb{Z}}$, то полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}(z_t) + \\ + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{P} \quad \forall\, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \widetilde{\mathbb{Z}}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Для наших целей (2.10) существенно при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Итак, посредством (2.10) определяется (аддитивный) критерий. Получаем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \to \min, \qquad \alpha \in \mathbf{A},\ (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha, \tag{2.11}$$

являющуюся вариантом рассматриваемой в [11]. Через V обозначаем экстремум (2.11), то есть наименьшее из чисел $\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}], \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Оптимальным называем ДР $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\big)$, где $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ и $(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0}$, для которого $\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] = V$.

Расширение оптимизационной задачи маршрутизации. Рассмотрим частичные (укороченные) задачи маршрутизации, полагая для краткости $\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Множества из $\mathfrak{N}$ (то есть непустые п/м $\overline{1,N}$) называем списками (заданий). Следуя [6, ч. 2], введем оператор $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, определяемый правилом: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathbf{I}(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\},$$

где $\Xi[K] = \{z \in \mathbf{K} | \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \& \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\}$; отметим, что $\mathbf{I}(\{s\}) = \{s\} \quad \forall s \in \overline{1,N}$. Если $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}$, то [6, ч. 2]

$$\begin{gathered}(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\mathbb{K}] \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in (\mathrm{bi})[\mathbb{K}] |\, \alpha(m) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, |\mathbb{K}|}\}\big) \quad \forall m \in \overline{1,\mathbb{K}}\} = \\ = \{\alpha \in (\mathrm{bi})[\mathbb{K}] \,|\, \alpha(m) \in \mathbf{I}\big(\mathbb{K} \setminus \{\alpha(t) : t \in \overline{1, m-1}\}\big) \quad \forall m \in \overline{1, |\mathbb{K}|}\} \in \mathcal{P}'\big((\mathrm{bi})[\mathbb{K}]\big)\end{gathered} \tag{2.12}$$

(учитываем, что $\overline{1,0} = \varnothing$). При этом [6, ч. 2], в частности,

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}] = \big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}\big(\overline{1,N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1,m-1}\}\big) \quad \forall m \in \overline{1,N}\big\} = \\ = \Big\{\alpha \in \mathbb{P} \,|\, \big(\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1,N})\big) \;\&\; \Big(\alpha(m) \in \mathbf{I}\big(\overline{1,N} \setminus \{\alpha(i) : i \in \overline{1,m-1}\}\big) \quad \forall m \in \overline{2,N}\Big)\Big\}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

В (2.12) определены частичные маршруты со свойством допустимости «по вычеркиванию» (заданий из списка); (2.13) показывает, что для полных маршрутов допустимость по предшествованию и допустимость по вычеркиванию тождественны.

Введем в рассмотрение частичные трассы. Для этого сначала определим для каждого $K \in \mathfrak{N}$ множество $\mathbb{Z}_K$ всех кортежей

$$(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$$

(напомним, что все множества из $\mathfrak{N}$ непусты и конечны; при этом $|\mathbb{K}| \in \overline{1,N} \quad \forall \mathbb{K} \in \mathfrak{N}$). Если $x \in \mathbf{X},\ K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то [11]

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \overset{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K \mid \big(z_0 = (x,x)\big) \;\&\; \Big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,|K|}\Big)\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K). \tag{2.14}$$

Таким образом (см. (2.12)), при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ мы в виде совокупности всех УП

$$\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big), \quad \alpha \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K],\ (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha),$$

имеем непустое конечное множество, элементы которого играют роль ДР соответствующей частичной задачи. Если $K \in \mathfrak{N}, \alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K$, то полагаем

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} |\, K] \overset{\triangle}{=} \sum_{t=0}^{|K|-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(z_t) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_{|K|})\big); \tag{2.15}$$

для наших целей (2.15) существенно в случае, когда $\alpha \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$, где $x \in \mathbf{X}$. С учетом этого при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ определяем задачу

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} |\, K] \to \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K],\ (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha); \tag{2.16}$$

с данной задачей связываем ее экстремум $v(x, K) \in [0, \infty[$ (наименьшее из чисел (2.15) при переборе всех $\alpha \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$). Таким образом определяются величины $v(x, K), x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$. В частности, имеем $v(x^0, \overline{1,N}) \in [0, \infty[$. Легко видеть (см. [11]), что

$$V = v(x^0, \overline{1,N}). \tag{2.17}$$

Мы полагаем также, что $v(x,\varnothing) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$. Таким образом, определена функция $v \in \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})]$, являющаяся объективно функцией Беллмана (см. в этой связи (2.17)). Из общих результатов [11] следует, что

$$v(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\big] \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{2.18}$$

Тем самым определено уравнение Беллмана. Заметим, в частности, что из (2.17), (2.18) вытекает, что

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}\big)\big]. \tag{2.19}$$

§ 3. Динамическое программирование (экономичная версия)

В настоящем разделе напомним вариант реализации ДП, приведенный в [6, § 4.9]. В то же время данный вариант можно рассматривать как конкретизацию соответствующей процедуры [11]; полагаем

$$\mathcal{G} \stackrel{\triangle}{=} \big\{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \ \ \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \Longrightarrow \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\big\} \tag{3.1}$$

и рассматриваем п/м (3.1): $\mathcal{G}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1,N}$. Ясно, что $(\mathcal{G}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ есть разбиение $\mathcal{G}$ (3.1); $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ и $\mathcal{G}_1 = \big\{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\big\}$, где $\mathbf{K}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Кроме того [11],

$$\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{t\} : \ K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\big\} \quad \forall s \in \overline{2,N}. \tag{3.2}$$

Итак, (3.2) определяет рекуррентную процедуру, доставляющую кортеж $(\mathcal{G}_i)_{i \in \overline{1,N}} : \mathcal{G}_N$ известно, а далее «включается» (3.2); $\mathcal{G}_t \neq \varnothing \quad \forall t \in \overline{1,N}$. Условимся, кроме того, при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ относительно обозначения $\mathcal{J}_s(K)$,

$$\mathcal{J}_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \big\{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\big\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,N} \setminus K), \tag{3.3}$$

и конструируем (непустое) множество $\mathcal{M}_s[K]$ в виде объединения всех множеств $\mathbf{M}_j, j \in \mathcal{J}_s(K)$; затем определяем клетку пространства позиций $\mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x,K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}$. В терминах клеток конструируются [11] слои пространства позиций: если $s \in \overline{1, N-1}$, то

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s). \tag{3.4}$$

Итак, по единому правилу (3.4) конструируются слои $D_1, \ldots, D_{N-1}$. Мы «добавляем» к ним два непустых слоя, определяемых специальным образом: $D_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(x,\varnothing) : x \in \mathfrak{M}\}$, где $\mathfrak{M}$ есть def объединение всех множеств $\mathbf{M}_j, j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$, и $D_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x^0, \overline{1,N})\}$ (синглетон, отвечающий УП $(x^0, \overline{1,N})$). Получаем кортеж $(D_s)_{s \in \overline{0,N}}$ слоев пространства позиций, причем [6, § 4.9]

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in \mathbf{M}_k. \tag{3.5}$$

Отметим, что по способу построения слоев $D_1, \ldots, D_N$ имеем, что $K \in \mathcal{G}_s \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall (x,K) \in \in D_s$. Поэтому из (3.5) получаем свойство (слабой инвариантности) слоев:

$$\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{k\}\big) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall (x,K) \in D_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in \mathbb{M}_k. \tag{3.6}$$

Слои функции Беллмана. Если $s \in \overline{0,N}$, то полагаем, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяется правилом

$$v_s(x,K) \stackrel{\triangle}{=} v(x,K) \quad \forall (x,K) \in D_s. \tag{3.7}$$

Итак, посредством (3.7) определена система $(v_0, v_1, \ldots, v_N)$ сужений v на слои пространства позиций; ясно, что $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ удовлетворяет условиям $v_0(x,\varnothing) = f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{M}$ (здесь мы учли принятый в разделе 2 способ доопределения v). Отметим, что согласно (3.6), (3.7) у нас при $s \in \overline{1,N}$, $(x,K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$ определено значение $v_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)$. Из общих построений [11] легко извлекается

Предложение 1. *Если $s \in \overline{1,N}$, то преобразование v_{s-1} в v_s осуществляется по правилу*

$$v_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\big].$$

Данное положение можно получить и непосредственно, комбинируя (2.18) и (3.7). Предложение 1 определяет рекуррентную процедуру $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N$ построения сужений функции Беллмана (см. (3.7)), именуемых далее слоями этой функции. В частности, будет найдено значение

$$V = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}\big)\big]. \tag{3.8}$$

Система $(v_1, \ldots, v_N)$ позволяет построить оптимальное решение задачи (2.11). В самом деле, пусть $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$. Используя (3.8), выбираем $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_1}$ из условия

$$V = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)})\big) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big). \tag{3.9}$$

С учетом (3.6) получаем, в частности, что $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) \in D_{N-1}$, а потому согласно предложению 4.1 имеем равенство

$$\begin{gathered} v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})} \ \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\}\big)\big]. \end{gathered} \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) выбираем $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_2}$ из условия

$$\begin{gathered} v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) = \\ = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)})\big) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big). \end{gathered} \tag{3.11}$$

При этом согласно (3.6) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big) \in D_{N-2}$ и в силу (3.9), (3.11) справедливо равенство

$$\begin{gathered} V = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)})\big) + \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)})\big) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + \\ + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big). \end{gathered} \tag{3.12}$$

Дальнейшие построения аналогичны процедурам выбора типа (3.9), (3.11) и приводят к ДР $\big(\eta, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}}\big), \eta = (\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta$, которое оптимально в задаче (2.11): $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}}] = V$ (если $N = 2$, то упомянутая оптимальность вытекает из (3.12)). Заметим, что при проверке допустимости η имеет смысл использовать (2.13).

§ 4. Локальные вставки на основе динамического программирования

Процедура поиска оптимального решения задачи маршрутизации может быть задействована для целей улучшения результата, достигаемого тем или иным эвристическим алгоритмом. Применение этих алгоритмов является практически неизбежным при решении задач большой размерности. Использование «беллмановских» вставок можно рассматривать как элемент апостериорного анализа эвристических решений. Заметим, кстати, что в задаче маршрутизации резки деталей на станках с ЧПУ реальная размерность оказывается достаточно большой, что вынуждает к применению эвристик; в частности, последние можно связывать с жадными алгоритмами.

По-прежнему будем рассматривать перемещения в множестве X раздела 2, фиксируя $\mathbf{x}_0 \in X$, число $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ со свойством $5 \leqslant \mathbf{n}$, а также множества $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, \mathbf{L}_\mathbf{n} \in \mathrm{Fin}(X)$, именуемые (см. раздел 2) мегаполисами. По аналогии с (2.2) полагаем, что

$$(\mathbf{x}_0 \notin \mathbf{L}_j \quad \forall\, j \in \overline{1,\mathbf{n}})\ \&\ (\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q = \varnothing \quad \forall\, p \in \overline{1,\mathbf{n}} \quad \forall\, q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}). \tag{4.1}$$

Далее (по аналогии с (2.1)) фиксируем отношения

$$\mathbb{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1), \quad \ldots, \quad \mathbb{L}_\mathbf{n} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_\mathbf{n} \times \mathbf{L}_\mathbf{n}); \tag{4.2}$$

роль отношений (4.1) аналогична той роли, которую играли отношения (2.1) в разделе 2. Мы рассматриваем ниже «большую» задачу, связанную с организацией перемещений

$$\mathbf{x}_0 \to \big(x_{1,1} \in \mathbf{L}_{\beta(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{L}_{\beta(1)}\big) \to \cdots \to \big(x_{\mathbf{n},1} \in \mathbf{L}_{\beta(\mathbf{n})} \rightsquigarrow x_{\mathbf{n},2} \in \mathbf{L}_{\beta(\mathbf{n})}\big)\,, \tag{4.3}$$

для которых должны выполняться условия $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{1})}, \ldots, (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{n},2}) \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{n})}$; в (4.3) β — перестановка множества $\overline{1,\mathbf{n}}$, то есть маршрут, на выбор которого могут накладываться ограничения в виде условий предшествования. Итак, мы полагаем, что $\mathbf{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$, и фиксируем множество $\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}})$. Постулируем «обычное» условие, исключающее зацикливание маршрутов, полагая в дальнейшем, что

$$\forall\, \mathfrak{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K})\ \exists\, z_0 \in \mathfrak{K}_0 :\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K}_0. \tag{4.4}$$

Тогда [6, ч. 2] имеем непустое множество $\mathfrak{K}$-допустимых маршрутов:

$$\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} \big\{\alpha \in \mathbf{P} \mid \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K}\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P}). \tag{4.5}$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\mathfrak{X} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{x}_0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{L}_i\Big); \tag{4.6}$$

через $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} : \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}.$$

Действуя по аналогии с (2.8), полагаем, что

$$\mathfrak{Z}_\beta \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}} \mid \big(z_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)\big)\ \&\ (z_t \in \mathbb{L}_{\beta(t)} \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}})\Big\}. \tag{4.7}$$

Ясно, что $\mathfrak{Z}_\beta \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathfrak{Z}}) \quad \forall\, \beta \in \mathbf{P}$. В качестве ДР «большой» задачи рассматриваем УП

$$\big(\beta, (z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big), \quad \beta \in \mathcal{A}, \quad (z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta.$$

По аналогии с (2.9) определяем функции стоимости в «большой» задаче: фиксируем функции

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}], \quad c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}], \quad \cdots, \quad c_\mathbf{n}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}], \quad f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}], \tag{4.8}$$

считая их «максимально продолженными». В терминах функций (4.8) определяем аддитивный критерий. Для этого полагаем сначала при $\beta \in \mathbf{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$, что

$$\mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=0}^{\mathbf{n}-1} \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} c_{\beta(t)}^\natural(z_t) + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{n})\big). \tag{4.9}$$

В самой постановке «большой» задачи мы используем (4.9) при $\beta \in \mathcal{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$. Иными словами (4.9), используем для оценивания качества ДР «большой» задачи, которая, следовательно, имеет вид

$$\mathfrak{C}^\natural_\beta[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \to \min, \quad \beta \in \mathcal{A},\ (z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta. \tag{4.10}$$

Разумеется, задача (4.10) подобна (2.11). Мы полагаем, однако, что число $\mathbf{n}$ достаточно велико и точное решение данной задачи (4.10) получить не удается, в связи с чем используется тот или иной эвристический алгоритм; например, в качестве последнего может быть применима надлежащая модификация жадного алгоритма работы [12].

Полагаем, что тем или иным способом уже найдено некоторое ДР задачи (4.10): мы располагаем УП $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$, где $\lambda \in \mathcal{A}$ и $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\lambda$. При этом $\lambda \in \mathbf{P}$ и

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K}; \tag{4.11}$$

$(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} : \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, причем $\mathbf{h}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ и, кроме того,

$$\mathbf{h}_t \in \mathbb{L}_{\lambda(t)} \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{4.12}$$

Из (4.12) следует, конечно, что $\mathbf{h}_t \in \mathbf{L}_{\lambda(t)} \times \mathbf{L}_{\lambda(t)}$ при $t \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Определено (см. (4.9)) значение

$$\mathfrak{C}^\natural_\lambda[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=0}^{\mathbf{n}-1} \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} c^\natural_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t) + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\mathbf{n})\big) \in [0,\infty[, \tag{4.13}$$

характеризующее качество ДР $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$. Располагая данным ДР, мы поставим своей целью улучшение результата (то есть величины (4.13)) посредством изменения фрагмента ДР. Предполагается, что данный фрагмент должен быть существенным, что, в свою очередь, требует преодоления трудностей вычислительного характера на этапе улучшения маршрута и трассы. Данное улучшение связываем с конструкцией на основе ДП, задействуя условия предшествования «в положительном направлении», что и позволяет оптимизировать ощутимый фрагмент исходного ДР. Возникает, однако, вопрос определения соответствующей локализации условий предшествования «большой» задачи (см. (4.10)). Его решение приведено далее с использованием оптимальной процедуры разделов 2, 3; мы рассматриваем здесь «внутреннюю» вставку, суть которой излагается ниже.

Фиксируем индекс $\nu \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Более того, будем полагать, что $\nu < \mathbf{n}-2$, считая, что ν определяет некоторую среднюю позицию на маршруте λ; мы располагаем, следовательно, индексом $\lambda(\nu) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и УП $\mathbf{h}_\nu \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$; в частности, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu) \in X$.

С учетом этого построим вариант процедуры разделов 2, 3, для чего прежде всего конкретизируем параметры данной процедуры. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$x^0 = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu); \tag{4.14}$$

x^0 в (4.14) рассматриваем в качестве базы локального процесса. Далее, как и в разделе 2, выбираем $N \in \mathbb{N}$ так, что $2 \leqslant N$; при этом, однако, дополнительно требуем, чтобы $N < \mathbf{n} - (\nu + 1)$; при этом $\nu + N + 1 < \mathbf{n}$. Полагаем, конечно, что число $\mathbf{n}$ достаточно велико и упомянутые выше соглашения осуществимы, что вполне соответствует смыслу локального улучшения решения «большой» задачи. Получили, что при $s \in \overline{1,N}$ $\nu+s \in \overline{2,\mathbf{n}-2}$ и $\lambda(\nu+s) \in \overline{1,\mathbf{n}}$. С учетом этого принимаем соглашение: мегаполисы раздела 2 имеют вид

$$M_s = \mathbf{L}_{\lambda(\nu+s)} \quad \forall\, s \in \overline{1,N}. \tag{4.15}$$

Итак, мы выделяем для последующих построений часть мегаполисов «большой» задачи. Кроме того, полагаем, что

$$\mathbb{M}_s = \mathbb{L}_{\lambda(\nu+s)} \quad \forall\, s \in \overline{1,N}. \tag{4.16}$$

Тогда с учетом (4.2), (4.15) и (4.16) получаем, что

$$\mathbb{M}_s \in \mathcal{P}'(M_s \times M_s) \quad \forall\, s \in \overline{1,N}; \tag{4.17}$$

(4.17) согласуется (в условиях (4.15), (4.16)) с (2.1). Пусть теперь

$$\Lambda :\ \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}$$

определяется условиями $\Lambda(s) \stackrel{\triangle}{=} \lambda(\nu + s) \quad \forall\, s \in \overline{1,N}$. Тогда из (4.15) и (4.16) получаем, что $\forall\, s \in \overline{1,N}$

$$(M_s = \mathbf{L}_{\Lambda(s)})\ \&\ (\mathbb{M}_s = \mathbb{L}_{\Lambda(s)}). \tag{4.18}$$

Кроме того, введем в рассмотрение множество

$$\Gamma \stackrel{\triangle}{=} \{\Lambda(s) :\ s \in \overline{1,N}\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}}). \tag{4.19}$$

Тогда, как легко видеть, $\Gamma \in \mathrm{Fin}(\overline{1,\mathbf{n}}), |\Gamma| = N$ и при этом

$$\Lambda \in (\mathrm{bi})[\Gamma]. \tag{4.20}$$

Для построения оптимизационной модели выделим «часть» множества $\mathfrak{K}$, полагая

$$Q \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathfrak{K} \mid \big(\mathrm{pr}_1(z) \in \Gamma\big)\ \&\ \big(\mathrm{pr}_2(z) \in \Gamma\big)\} \tag{4.21}$$

(случай $Q = \varnothing$ не исключается). Используя (4.20), формируем на основе (4.21) множество $\mathbf{K}$ раздела 2, полагая в дальнейшем, что

$$\mathbf{K} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big), \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big) :\ z \in Q\Big\}; \tag{4.22}$$

разумеется, $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$. Иными словами, $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$. Мы будем использовать конкретизацию (4.22) в построениях раздела 2 и, в частности, при определении множества $\mathbf{A}$ (2.6). Во всяком случае для данной конкретизации

$$\alpha^{-1}\big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)\big) < \alpha^{-1}\big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\big) \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \quad \forall\, z \in Q. \tag{4.23}$$

В связи с (4.23) полезно отметить, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ композиция

$$\Lambda \circ \alpha :\ \overline{1,N} \to \Gamma$$

есть биекция $\overline{1,N}$ на Γ, то есть $\Lambda \circ \alpha \in (\mathrm{bi})[\Gamma]$. Тогда (4.23) преобразуется к виду

$$(\Lambda \circ \alpha)^{-1}\,(\mathrm{pr}_1(z)) < (\Lambda \circ \alpha)^{-1}\,(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \quad \forall\, z \in Q. \tag{4.24}$$

Легко видеть, что для множества $\mathbf{K}$ (4.22) условие (2.7) выполнено, а потому $\mathbf{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$. Заметим также, что в силу (4.1), (4.14) и биективности λ выполнены также условия (2.2), в силу (4.18) имеем непустые отношения (2.1), для которых определяем множества (2.3): в нашем случае

$$\mathbf{M}_j = \{\mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \mathbb{L}_{\Lambda(j)}\} \in \mathcal{P}'(M_j). \tag{4.25}$$

В терминах множеств (4.25) определяем конкретный вариант $\mathbf{X}$ (2.4). Из (4.6) и (4.25) имеем, конечно, свойство $\mathbf{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})$. Аналогичным образом конкретизируется множество $\mathbb{X}$ (2.4). С учетом (4.6) и (4.18) получаем, что

$$\mathbf{X} \subset \mathbb{X} \subset \mathfrak{X} \tag{4.26}$$

(все множества в (4.26) непусты и конечны); с учетом (4.18) и (4.25) имеем, что

$$\mathbb{M}_j \subset \mathbb{X} \times \mathbf{X} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \quad \forall\, j \in \overline{1,N}.$$

В соответствии с (2.8) определены непустые конечные множества $\mathcal{Z}_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, элементами которых являются кортежи со значениями в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$ и, в частности, в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

С учетом (4.26) можно в терминах сужений определить функции стоимости $\mathbf{c}$, $c_1, \ldots, c_N, f$. Итак, полагаем далее, что

$$\begin{gathered}\Big(\mathbf{c}(z) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}^\natural(z) \ \ \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}\Big) \ \& \ \Big(c_j(z) \stackrel{\triangle}{=} c^\natural_{\Lambda(j)}(z) \ \ \forall\, j \in \overline{1, N} \ \ \forall\, z \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}\Big) \ \& \\ \& \ \Big(f(x) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}^\natural\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1})\big) + c^\natural_{\lambda(\nu+N+1)}(\mathbf{h}_{\nu+N+1}) \ \ \forall\, x \in \mathbb{X}\Big),\end{gathered} \tag{4.27}$$

получая вариант (2.9). В этих терминах можно ввести зависимость (2.10), в которой $\widetilde{\mathbb{Z}}$ определяется в соответствии с разделом 2. В частности, определены значения

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}], \quad \alpha \in \mathbf{A}, \ (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha, \tag{4.28}$$

отвечающие выбранной конкретизации «экстремального блока» раздела 2. Как следствие, получаем нужный вариант задачи (2.11), которую в дальнейшем рассматриваем только в соответствующем наборам (4.27), (4.28) варианте.

Пусть $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}\big)$ есть оптимальное ДР задачи (2.11) в конкретизации настоящего раздела. Это означает, что $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ и $(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0}$; при этом

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}] \leqslant \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \ \ \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \ \ \forall\, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{4.29}$$

Заметим, что данное (оптимальное) ДР может быть найдено посредством процедуры на основе ДП, которая была изложена в разделе 3. Рассмотрим вопрос об улучшении «глобального» ДР $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ посредством встраивания $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}\big)$. Упомянутое встраивание осуществляется «покомпонентно»: α^0 встраивается в маршрут λ, изменяя фрагмент последнего, а $(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}$ заменяет соответствующий фрагмент трассы $(\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}$. Для этих целей выбираем (непустой) «временной» промежуток

$$\overline{\nu+1, \nu+N} = \{t \in \mathbb{N} \mid (\nu+1 \leqslant t) \ \& \ (t \leqslant \nu+N)\}, \tag{4.30}$$

для которого имеет место вложение $\overline{\nu+1, \nu+N} \subset \overline{1, \mathbf{n}}$. Ясно, что при $t \in \overline{\nu+1, \nu+N}$ для индекса $t - \nu \in \overline{1, N}$ определены образ $\alpha^0(t-\nu) \in \overline{1, N}$ и, как следствие, индекс

$$(\Lambda \circ \alpha^0)(t - \nu) = \lambda\big(\nu + \alpha^0(t-\nu)\big) \in \Gamma. \tag{4.31}$$

Выше уже отмечалось важное свойство биективности:

$$\Lambda \circ \alpha^0 \in (\mathrm{bi})[\Gamma]. \tag{4.32}$$

В частности, $\Lambda \circ \alpha^0 : \overline{1, N} \stackrel{\text{на}}{\longrightarrow} \Gamma$. Отметим также, что непустые множества

$$\overline{1, \nu}, \ \overline{\nu+1, \nu+N}, \ \overline{\nu+N+1, \mathbf{n}}$$

образуют разбиение $\overline{1, \mathbf{n}}$. С учетом этого введем (см. (4.19)) отображение

$$\eta : \overline{1, \mathbf{n}} \to \overline{1, \mathbf{n}}$$

посредством следующего правила, использующего (4.31):

$$\begin{gathered}\big(\eta(j) \stackrel{\triangle}{=} \lambda(j) \ \ \forall\, j \in \overline{1, \nu}\big) \ \& \ \big(\eta(j) \stackrel{\triangle}{=} (\Lambda \circ \alpha^0)(j - \nu) \ \ \forall\, j \in \overline{\nu+1, \nu+N}\big) \ \& \\ \& \ \big(\eta(j) \stackrel{\triangle}{=} \lambda(j) \ \ \forall\, j \in \overline{\nu+N+1, \mathbf{n}}\big).\end{gathered} \tag{4.33}$$

Предложение 2. *Отображение η есть маршрут, допустимый по предшествованию в «большой» задаче: $\eta \in \mathcal{A}$.*

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Из определения следует, что $\{\eta(j) : j \in \overline{1,\mathbf{n}}\} \subset \overline{1,\mathbf{n}}$ (см. (4.19), (4.33)). Пусть $\mu \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Тогда (см. (4.19))

$$(\mu \in \Gamma) \vee (\mu \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \Gamma). \tag{4.34}$$

Рассмотрим отдельно оба случая в (4.34).

Если $\mu \in \Gamma$, то (см. (4.32))

$$t_\mu \stackrel{\triangle}{=} (\Lambda \circ \alpha^0)^{-1}(\mu) \in \overline{1,N}$$

и, согласно (4.33), $\eta(\nu + t_\mu) = (\Lambda \circ \alpha^0)(t_\mu) = \mu$. Итак, при $\mu \in \Gamma$ имеем $\mu = \eta(j)$ для некоторого $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$.

Если же $\mu \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \Gamma$, то $t'_\mu \stackrel{\triangle}{=} \lambda^{-1}(\mu) \in \overline{1,\mathbf{n}}$, причем, как легко видеть, $t'_\mu \notin \overline{\nu+1,\nu+N}$ и $\eta(t'_\mu) = \lambda(t'_\mu) = \mu$. Стало быть, и при $\mu \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \Gamma$ имеем $\mu = \eta(j)$, где $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$.

Тем самым установлено (поскольку выбор μ был произвольным), что $\overline{1,\mathbf{n}} \subset \{\eta(j) : j \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ и, как следствие, $\overline{1,\mathbf{n}} = \{\eta(j) : j \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$. Сюръективность η установлена.

Пусть $\gamma \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\kappa \in \overline{1,\mathbf{n}}$ реализуют равенство $\eta(\gamma) = \eta(\kappa)$. Тогда

$$\big((\gamma \in \overline{\nu+1,\nu+N}) \ \&\ (\kappa \in \overline{\nu+1,\nu+N})\big) \vee (\gamma \notin \overline{\nu+1,\nu+N}) \ \vee\ (\kappa \notin \overline{\nu+1,\nu+N}). \tag{4.35}$$

В первом (из упомянутых в (4.35)) случае имеем, согласно (4.33), равенство

$$(\Lambda \circ \alpha^0)(\gamma - \nu) = (\Lambda \circ \alpha^0)(\kappa - \nu),$$

откуда с учетом (4.32) получаем равенство $\gamma = \kappa$. Итак,

$$\big((\gamma \in \overline{\nu+1,\nu+N}) \ \&\ (\kappa \in \overline{\nu+1,\nu+N})\big) \Longrightarrow (\gamma = \kappa). \tag{4.36}$$

Пусть $\gamma \notin \overline{\nu+1,\nu+N}$. Тогда $\eta(\gamma) = \lambda(\gamma)$ согласно (4.33). При этом (см. (4.20)) $\lambda(\gamma) \neq \neq \Lambda(t)\ \forall t \in \overline{1,N}$. Как следствие, $\eta(\gamma) \notin \Gamma$ (см. (4.19)), а тогда и $\eta(\kappa) \notin \Gamma$. С учетом этого легко проверяется, что $\kappa \notin \overline{\nu+1,\nu+N}$ и, как следствие, $\eta(\kappa) = \lambda(\kappa)$ (см. (4.33)). С учетом инъективности λ получаем равенство $\gamma = \kappa$. Итак,

$$(\gamma \notin \overline{\nu+1,\nu+N}) \Longrightarrow (\gamma = \kappa). \tag{4.37}$$

Подобными рассуждениями устанавливается импликация

$$(\kappa \notin \overline{\nu+1,\nu+N}) \Longrightarrow (\gamma = \kappa).$$

С учетом (4.36) и (4.37) имеем теперь, что $\gamma = \kappa$ во всех возможных случаях; итак, $\big(\eta(\gamma) = = \eta(\kappa)\big) \Rightarrow (\gamma = \kappa)$. Поскольку выбор γ и κ был произвольным, инъективность η установлена. Следовательно, $\eta \in \mathbf{P}$.

Покажем, что η есть $\mathfrak{K}$-допустимый маршрут. Пусть $\theta \in \mathfrak{K}$. Тогда в терминах $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ имеем следующее неравенство:

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{4.38}$$

При этом $(\theta \in Q) \vee (\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q)$. В случае $\theta \in Q$ имеем $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma$ и $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$, а тогда по свойствам α^0

$$(\Lambda \circ \alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < (\Lambda \circ \alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$$

и, следовательно, $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$. Итак,

$$(\theta \in Q) \Longrightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{4.39}$$

Случай $\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q$ распадается на два: $\big(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma\big) \vee \big(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma\big)$. Ограничимся обсуждением возможности $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$ (возможность $\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma$ исследуется аналогично); тогда $(\Lambda \circ \alpha^0)(s) \neq$

$\neq \mathrm{pr}_1(\theta)$ при $s \in \overline{1,N}$ и (с учетом (4.33)) имеем, что $\eta(j) \neq \mathrm{pr}_1(\theta) \quad \forall\, j \in \overline{\nu+1,\nu+N}$. Тогда $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) \notin \overline{\nu+1,\nu+N}$ и, как следствие,

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) = \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{4.40}$$

С учетом (4.38) и (4.40) легко устанавливается, что

$$(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma) \Longrightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{4.41}$$

Если же $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$ (при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$), то $s_\theta \stackrel{\triangle}{=} \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) \in \overline{1,N}$ и, как легко видеть, $\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \nu + s_\theta$; согласно (4.40)

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \nu + s_\theta \leqslant \nu + N,$$

что (в рассматриваемом случае $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$) означает справедливость включения $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) \in \in \overline{1,\nu}$. С другой стороны, для $s^{(\theta)} \stackrel{\triangle}{=} (\Lambda \circ \alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$ имеем равенство $\eta(\nu + s^{(\theta)}) = \mathrm{pr}_2(\theta)$ и, стало быть,

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \nu + s^{(\theta)} \in \overline{\nu+1,\nu+N},$$

откуда имеем неравенство $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$ и при $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$. Следовательно, при $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$ истинна импликация

$$\big(\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma\big) \Longrightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big), \tag{4.42}$$

а потому с учетом (4.41) имеем требуемое неравенство во всех возможных, при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \notin \Gamma$, случаях. Получили импликацию

$$\big(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma\big) \Longrightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{4.43}$$

Как уже отмечалось, аналогичными рассуждениями устанавливается, в общем случае $\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q$, импликация (4.42). С учетом (4.43) получаем, что во всех возможных при условии $\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q$ случаях справедливо неравенство $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$, то есть

$$(\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q) \Longrightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big).$$

С учетом (4.39) имеем теперь, что упомянутое неравенство справедливо всегда, и, коль скоро выбор θ был произвольным, установлено, что

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall\, z \in \mathfrak{K},$$

что и означает $\mathfrak{K}$-допустимость маршрута η, то есть $\eta \in \mathcal{A}$. □

Заметим, что согласно (2.10) справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}] = \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t^0), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}^0)\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha^0(t)}(z_t^0) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N^0)\big). \tag{4.44}$$

С другой стороны, качество ДР $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ «большой» задачи оценивается величиной

$$\mathfrak{C}_\lambda^\natural[(\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3, \tag{4.45}$$

где слагаемые в правой части имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_1 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=0}^{\nu-1} \mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\nu} c_{\lambda(t)}^\natural(\mathbf{h}_t),$$

$$\mathbf{S}_2 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=\nu}^{\nu+N} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=\nu+1}^{\nu+N+1} c^{\natural}_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t) =$$

$$= \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+t}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+t+1})\big) + \sum_{t=1}^{N} c^{\natural}_{\Lambda(t)}(\mathbf{h}_{t+\nu}) + f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N})\big),$$

$$\mathbf{S}_3 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}} c^{\natural}_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big).$$

Для дальнейшего преобразования $\mathbf{S}_2$ введем кортеж $(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ посредством условий

$$\Big(\tilde{\mathbf{h}}_0 \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0)\Big) \ \& \ \Big(\tilde{\mathbf{h}}_t \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h}_{\nu+t} \ \ \forall\, t \in \overline{1,N}\Big).$$

С учетом этого получаем представление $\mathbf{S}_2 = \mathfrak{C}_{\mathbf{i}}[(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}]$, где $\mathbf{i} \in \mathbb{P}$ есть тождественная перестановка множества $\overline{1,N}$ ($\mathbf{i}(s) \stackrel{\triangle}{=} s \ \ \forall\, s \in \overline{1,N}$), а $(\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{i}}$. Более того, как легко видеть, $\mathbf{i} \in \mathbf{A}$, а тогда $\big(\mathbf{i}, (\tilde{\mathbf{h}}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ есть ДР задачи (2.11) и, согласно (4.29),

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] \leqslant \mathbf{S}_2. \tag{4.46}$$

Возвращаясь к (4.44), отметим, что $z^0_{t-\nu} \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ \ \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}$. С учетом этого определяем кортеж

$$(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} : \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \tag{4.47}$$

посредством условий

$$\Big(\hat{\mathbf{h}}_t \stackrel{\triangle}{=} z^0_{t-\nu} \ \ \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}\Big) \ \& \ \Big(\hat{\mathbf{h}}_t \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h}_t \ \ \forall\, t \in \overline{0,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N}\Big). \tag{4.48}$$

Предложение 3. *Кортеж* (4.47) *есть трасса, согласованная с маршрутом* η, *то есть* $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\eta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что кортеж (4.47) есть элемент $\widetilde{\mathfrak{Z}}$. Из (4.12), (4.33) и (4.48) следует, что

$$\hat{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{L}_{\eta(t)} \ \ \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N}.$$

С другой стороны, из (4.33) и (4.48) вытекает, что $\hat{\mathbf{h}}_t = z^0_{t-\nu} \in \mathbb{L}_{\eta(t)} \ \ \forall\, t \in \overline{\nu+1, \nu+N}$. В итоге установлено, что

$$\hat{\mathbf{h}}_t \in \mathbb{L}_{\eta(t)} \ \ \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}}.$$

Наконец, $\hat{\mathbf{h}}_0 = \mathbf{h}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$, чем и завершается доказательство. □

Из предложений 2 и 3 следует, что $\big(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ есть ДР «большой» задачи; это решение оценивается значением

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\eta}[\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \widehat{\mathbf{S}}_1 + \widehat{\mathbf{S}}_2 + \widehat{\mathbf{S}}_3,$$

где величины $\widehat{\mathbf{S}}_1, \widehat{\mathbf{S}}_2$ и $\widehat{\mathbf{S}}_3$ определяются соотношениями

$$\widehat{\mathbf{S}}_1 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=0}^{\nu-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\nu} c^{\natural}_{\eta(t)}(\hat{\mathbf{h}}_t),$$

$$\widehat{\mathbf{S}}_2 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=\nu}^{\nu+N} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big) + \sum_{t=\nu+1}^{\nu+N+1} c^{\natural}_{\eta(t)}(\hat{\mathbf{h}}_t),$$

$$\widehat{\mathbf{S}}_3 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t), \mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big) + \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}} c^{\natural}_{\eta(t)}(\hat{\mathbf{h}}_t) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\big).$$

Легко видеть (см. (4.33), (4.48)), что $\widehat{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{S}_1$ и $\widehat{\mathbf{S}}_3 = \mathbf{S}_3$. Кроме того, справедливо равенство $\widehat{\mathbf{S}}_2 = \mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}]$ (см. (4.33), (4.44), (4.48)). С учетом (4.46) получаем неравенство $\widehat{\mathbf{S}}_2 \leqslant \mathbf{S}_2$, а тогда

$$\mathfrak{C}_\eta^\natural[(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \widehat{\mathbf{S}}_1 + \widehat{\mathbf{S}}_2 + \widehat{\mathbf{S}}_3 \leqslant \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = \mathfrak{C}_\lambda^\natural[\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}].$$

Итак, ДР $\big(\eta, (\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ является улучшающим в сравнении с $\big(\lambda, (\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$.

В связи с преобразованием задач маршрутизации посредством возмущения маршрута при использовании вставки, добавления или замены одного «города» отметим исследование [13]. Подход, излагаемый в настоящем разделе, в не столь общем виде был предложен в [14].

§ 5. Вычислительный эксперимент

В данном разделе рассматривается модель задачи маршрутизации инструмента машин листовой резки; в основе данной модели находятся конструкции, приводящие к ОЗМ.

Пусть на плоскости $X \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ имеется n непустых компактных (ограниченных и замкнутых) телесных подмножеств $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $2 \leqslant n$. Сопоставим каждому из этих множеств границу, получая множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Если $j \in \overline{1,n}$, то полагаем, что Γ_j получается (конечным) объединением попарно непересекающихся компактных подмножеств $\Gamma_{j,1}, \ldots, \Gamma_{j,\mathbf{n}_j}$, где $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}$. Эти подмножества являются замкнутыми кривыми и соответствуют внешнему и, возможно, внутренним контурам, ограничивающим «деталь» $\mathbf{D}_j$, а точнее заготовку соответствующей детали. Возле каждого контура $\Gamma_{j,k}$, где $j \in \overline{1,n}$ и $k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}$, имеется (с внешней стороны) замкнутая кривая $\Omega_{j,k}$, именуемая эквидистантой; предполагается, что $\Gamma_{j,k}$ и $\Omega_{j,k}$ расположены достаточно близко. При этом

$$\Omega_{j,k} \cap \mathbf{D}_j = \varnothing \;\; \forall j \in \overline{1,n} \;\; \forall k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}. \tag{5.1}$$

Можно рассматривать (5.1) как условие, обеспечивающее последующую резку с некоторым запасом.

Полагаем, что при $j \in \overline{1,n}$ и $k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}$ плоское множество $\Omega_{j,k}$ непусто и компактно (ограничено и замкнуто). Пусть теперь

$$\mathbf{n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{n}_j, \tag{5.2}$$

а каждый мегаполис будем связывать со «своей» эквидистантой. Таким образом, мы «перестаем воспринимать» сами детали и оставляем для рассмотрения только получившиеся эквидистанты, с каждой из которых связываем «свой» мегаполис. Итак, нумеруя подряд $\Omega_{1,1}, \ldots, \Omega_{1,\mathbf{n}_1}, \ldots, \Omega_{n,1}, \ldots, \Omega_{n,\mathbf{n}_n}$, получаем $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(\mathbf{n})}$ (см. (5.2)). Возле каждого множества $\Omega^{(k)}, k \in \overline{1,\mathbf{n}}$, располагаем свой набор «парных» точек. Упомянутые наборы используем в качестве мегаполисов. Таким образом, каждый мегаполис $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_\mathbf{n}$ получается объединением двухэлементных множеств (неупорядоченных пар), составленных (каждая) из точки врезки и точки выключения инструмента. В соответствии с содержательным смыслом задачи формируем отношения $\mathbb{L}_1, \ldots, \mathbb{L}_\mathbf{n}$: если $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, то $\mathbb{L}_j$ есть множество всех УП, имеющих каждая первым элементом плоский вектор, определяющий точку врезки, а вторым соответствующий этой точке врезки (плоский) вектор, определяющий точку выключения инструмента; не исключается совпадение двух упомянутых векторов.

Рассмотрим функции стоимости $(\mathbf{c}^\natural, c_1^\natural, \ldots, c_\mathbf{n}^\natural, f^\natural)$. Полагаем $\mathbf{c}^\natural(x,y)$ совпадающим с евклидовым расстоянием $\rho(x,y)$ между плоскими векторами x и y.

В целях определения функций $c_1^\natural, \ldots, c_\mathbf{n}^\natural$ вводим в рассмотрение число $\Theta \in \mathbb{R}, \Theta > 1$. Каждой УП $z \in \mathbb{L}_j$, где $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, сопоставляем точку $\omega[z] \in \Omega^{(j)}$, определяющую начало и конец резки. При этом предполагается, что при $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z)$ $c_j^\natural(z) \stackrel{\triangle}{=} \Theta[\rho(\mathrm{pr}_1(z), \omega_j[z]) + \rho(\omega_j[z], \mathrm{pr}_2(z))]$, а в случае $\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z)$

$$c_j(z) \stackrel{\triangle}{=} \Theta\rho(\mathrm{pr}_1(z), \omega_j[z]) + \rho(\omega_j[z], \mathrm{pr}_2(z)) \tag{5.3}$$

(имеется в виду, что возвращение в точку врезки в режиме холостого хода происходит во втором случае). Поскольку обычно $\Theta \gg 1$ (замедление в металле) и $\omega_j[z]$ реально находится вблизи $\mathrm{pr}_2(z)$, то (во втором случае) последним слагаемым в (5.3) можно пренебречь.

Терминальную функцию $f^\natural$ определяем следующим условием: при $x \in \mathfrak{X}$ полагаем $f^\natural(x) \triangleq \rho(x, x_f)$, где $x_f \in \mathfrak{X}$ — заданная точка.

Для получения начального маршрута использовался эвристический алгоритм на основе известного жадного алгоритма «иди в ближайший», соблюдающий условия предшествования. Таким образом, получен некоторый начальный маршрут. Далее будем пытаться улучшить его методом динамического программирования, следуя подходу раздела 5. А именно: для расчета методом ДП будут выбираться «неполные» семейства мегаполисов, так как общая размерность задачи не допускает использование этого метода. На маршруте, построенном с использованием эвристического алгоритма, выберем участок длиной N. Вошедшие в него мегаполисы будут составлять в соответствии с основной постановкой множество мегаполисов для частичной задачи. Начало участка маршрута будет выбираться случайным образом так, чтобы оно лежало в диапазоне $1 \leqslant \nu \leqslant \mathbf{n} - N - 2$. При этом стартовой точкой является выходной порт мегаполиса, лежащего на маршруте непосредственно перед выбранным участком, а финишной — входной порт мегаполиса, расположенного на маршруте сразу за выбранным участком. Для новой частичной задачи производится расчет с использованием метода ДП. Далее полученный маршрут помещается вместо выбранного участка основного маршрута. Таким образом, получается новый маршрут. Описанная выше процедура приводит к тому, что маршрут не ухудшается в смысле достигаемого результата. Разумеется, данную процедуру целесообразно выполнять многократно. Через $\tilde{\mathbf{N}}$ обозначим количество итераций пересчета маршрута с использованием данной «беллмановской» вставки.

Итак, мы используем процедуру локального улучшения маршрута, изложенную в разделе 4 многократно, варьируя параметр ν. При этом в качестве решения $(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}})$ выбираем на каждом этапе уже улучшенную на предыдущей итерации пару «маршрут–трасса»; данное правило не соблюдается, конечно, на первом этапе (шаге) итерационной процедуры, где используется решение, определяемое вышеупомянутой эвристикой практически мгновенно. Итерации на основе ДП оказываются, конечно, более затратными, но параметр N, определяющий размерность экстремального блока, выбирается «умеренным», что позволяет все же «вклиниваться» в предваряющий маршрут и осуществлять его локальное улучшение за приемлемое время.

Используемая модель с мегаполисами представляется оригинальной с точки зрения инженерных задач, связанных с раскроем и маршрутизацией движения инструмента при последовательном осуществлении резки (см. в этой связи [5]). Обычно в постановке упомянутых инженерных задач предполагалось, что каждый контур снабжался одной точкой врезки (которой сопоставлялась точка выключения инструмента). Использование набора точек врезки, объединяемых в мегаполис, доставляет выигрыш в качестве; при этом число «городов» в мегаполисе определяется возможностями вычислительной реализации (в идеале можно говорить о трансформации каждого мегаполиса в континуум возможных точек врезки; однако возникающая экстремальная задача является труднорешаемой, что на сегодняшний день ограничивает размерность мегаполисов). Таким образом, конструкция на основе математической модели с мегаполисами (см. [6,11,14]) в качестве последовательно посещаемых целевых множеств оказалась [5] удачным инструментом при решении актуальной инженерной задачи, содержащей ряд особенностей. При этом размерность задачи определяется (см. (5.2)) не количеством деталей, а количеством контуров, которых на той или иной детали может быть несколько; поэтому, как уже отмечалось ранее, применить ДП для решения полной задачи не удается в силу очевидных трудностей вычислительного характера. Важно отметить, однако, что по самому смыслу задачи о листовой резке с применением машин с ЧПУ здесь возникает большое число условий предшествования (см. замечание 1), обязывающих у каждой из деталей осуществлять резку внутренних контуров раньше, чем резку внешнего.

Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-2630QM с 8 Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 7 (64-bit). Для разработки программы была использована среда Microsoft Visual C++ 2010.

Пример 1. Общее количество мегаполисов $\mathbf{n} = 47$, размерность «беллмановских» вставок $N = 22$. Количество итераций $\tilde{\mathbf{N}} = 50$. Начальные позиции для «беллмановских» вставок выбирались случайно. Точки $\mathbf{x}_0$ и x_f предполагались совпадающими с началом координат каждая (рис. 1).

Результат счета для эвристического алгоритма 29852,3. Результат с учетом применения «беллмановских» вставок 27721,3. Суммарное время счета 39 минут 5 секунд.

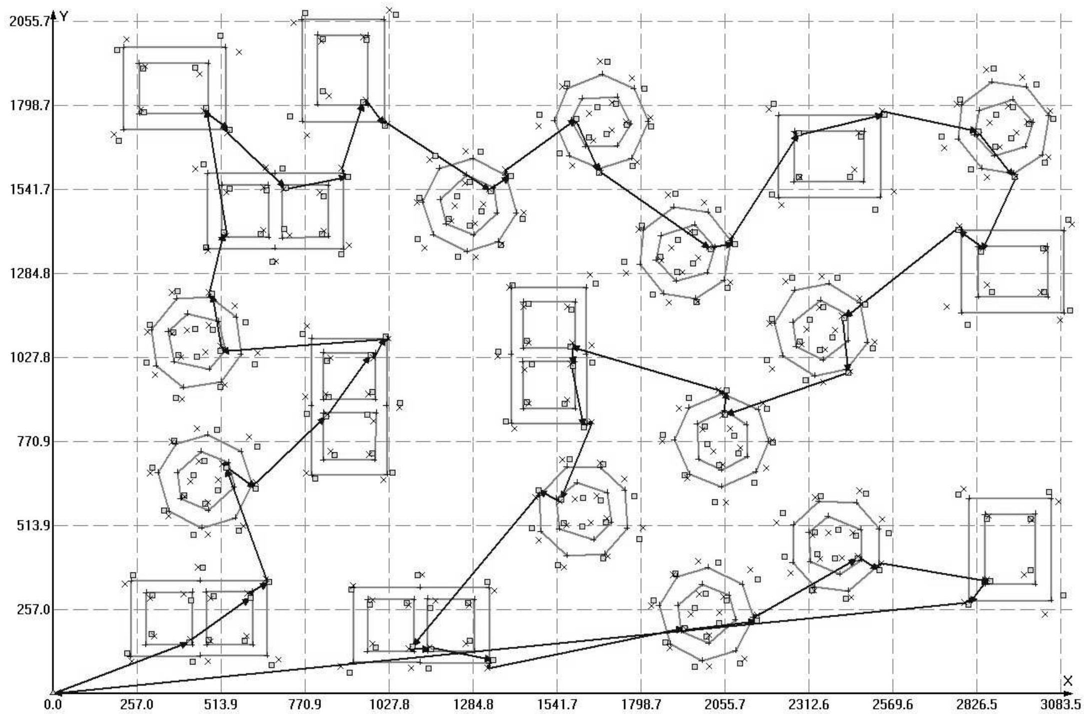

Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств

Пример 2. Второй пример имеет такое же, как и в первом случае, количество мегаполисов, а также те же параметры алгоритмов. Прежними сохраняются и предположения относительно $\mathbf{x}^0$ и x_f. Отличие состоит в более плотной упаковке контуров, соответствующей реальной задаче раскроя (рис. 2).

Результат счета для эвристического алгоритма 26018,02. Результат с учетом применения «беллмановских» вставок 23752,54. Суммарное время счета 39 минут 5 секунд.

Выводы. Применение метода динамического программирования с целью улучшения результата счета эвристических алгоритмов демонстрирует хорошие результаты. Так, в рассмотренных примерах удалось улучшить результат на 7,1 % и 8,7 % соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.

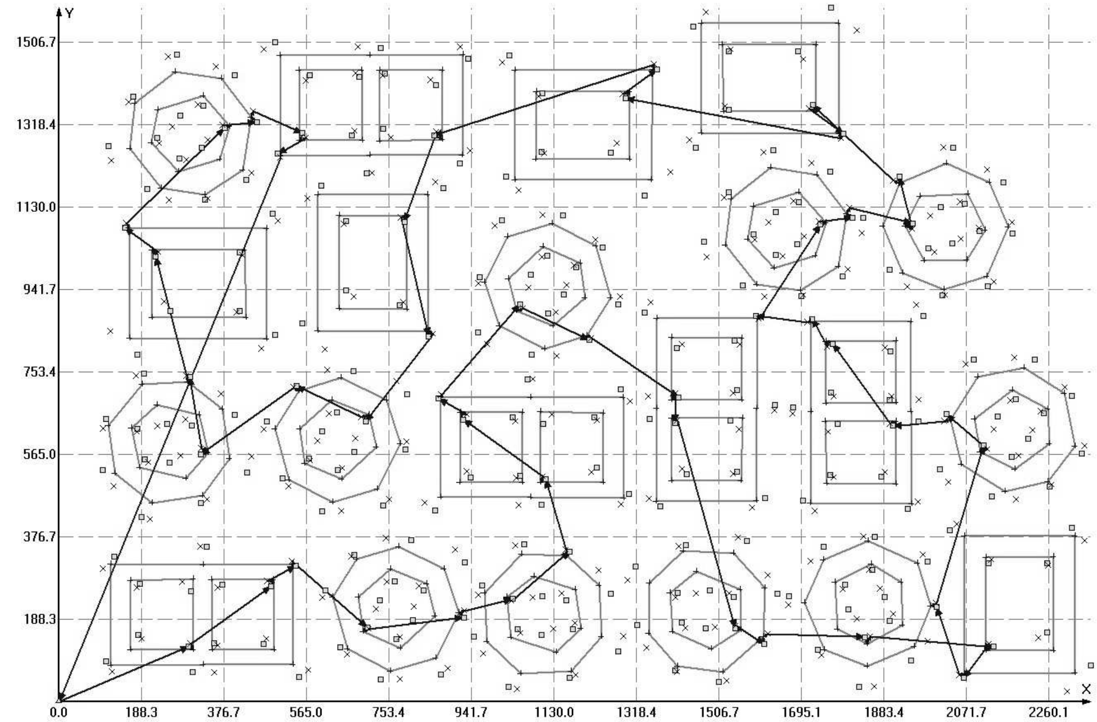

Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств. Близкое расположение контуров

5. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
6. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
7. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
8. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.
11. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
12. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 270–289.
13. Иванко Е.Е. Устойчивость и неустойчивость в дискретных задачах. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. 208 с.
14. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 454–475.

Поступила в редакцию 01.03.2014

Петунин Александр Александрович, д. т. н., профессор, заместитель директора, Механико-машиностроительный институт, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: aapetunin@gmail.com

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Павел Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел вычислительных сетей, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov.p@uran.ru

A. A. Petunin, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov
Local dynamic programming incuts in routing problems with restrictions

Keywords: routing problem, preceding conditions.

MSC: 93CXX, 93C15

The article is concerned with the procedure of insertion of optimizable fragments of route solutions into the global solutions of the «big» problem defined by heuristic algorithms. Setting of the route problem takes into account some singularities of the engineering problem about the sequential cutting of details each having one exterior and probably several interior contours. The latter ones must be subjected to cutting previously in comparison with the exterior contour, which leads to a great number of given preceding conditions. These conditions are actively used to decrease the computational complexity. Nevertheless, the problem dimensionality remains sufficiently large that does not permit to use «global» dynamic programming and forces heuristic algorithms to be used (the problem under investigation is a hard-solvable problem in the traditional sense). Therefore, it is interesting to develop the methods for correction of solutions based on the above-mentioned algorithms. In the present investigation, such correction is realized by the replacement of fragments (of the above-mentioned solutions) having a moderate dimensionality by optimal «blocks» constructed by dynamic programming with local preceding conditions which are compatible with the constraints of the initial «big» problem. The proposed replacement does not deteriorate, but, in typical cases, improves the quality of the initial heuristic solution. This is verified by the computing experiment on multi-core computer.

The proposed algorithm is realized in the iterated regime: the solution (in the form of «route-trace») obtained after the first insertion on the basis of dynamic programming is taken as an initial solution for which the insertion is constructed again. In addition, the beginning of the new insertion is chosen randomly in the bounds defined by the possibilities of formation of a sliding «window» of the appreciable dimensionality which is in fact sufficient for the employment of the economical version of dynamic programming. Further, the procedure is repeated. The operation of the iterated algorithm is illustrated by solution of model problems including the versions with sufficiently dense «packing» of parts on a sheet, which is typical for the engineering production.

REFERENCES

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Problems of the theory, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34 (in Russian).
2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Exact algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29 (in Russian).
3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximation algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26 (in Russian).
4. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
5. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of sheet cutting, *Nauch. Tekhn. Vedom. SPb Gos. Politekh. Univ. Inform. Telekom. Upr.*, St. Petersburg, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
6. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
7. Kuratowski K., Mostowski A. *Teoriya mnozhestv* (Set theory), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
8. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.
9. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 2

10. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to algorithms (1st ed.)*, MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1990, 960 p.

11. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82 (in Russian).

12. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Iteration method in the routing problem with internal losses, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 270–289 (in Russian).

13. Ivanko E.E. *Ustoichivost' i neustoichivost' v diskretnykh zadachakh* (Stability and instability in discrete problems), Ekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013, 208 p.

14. Chentsov A.A., Chentsov A.G. The problem of megalopolises consistent detouring, *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 454–475 (in Russian).

Received 01.03.2014

Petunin Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Engineering, Professor, Deputy Director, Institute of Mechanics and Machine-Building, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: aapetunin@gmail.com

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Pavel Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Computer Networks, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov.p@uran.ru