УДК 519.651 + 517.518.823

© *Н. В. Родионова*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

В предыдущей работе автора определено параметрическое семейство конечномерных пространств специальных квадратичных сплайнов лагранжевого типа. В каждом пространстве в качестве решения начально-граничной задачи для простейшего волнового уравнения предложен оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от исходных конечных разностей. Формула для невязки представляет собой положительно определенную квадратичную форму от этих же величин, однако из-за своей громоздкости она плохо приспособлена для анализа качества аппроксимации исходной задачи при варьировании параметрами.

Получено альтернативное представление для невязки, представляющее собой положительно определенную квадратичную форму от новых конечных разностей, заданных на границе. Элементы матрицы формы выражаются через многочлены Чебышёва, матрица обратима и такова, что обратная матрица имеет трехдиагональный вид. Эта особенность позволяет получить для спектра матрицы верхние и нижние оценки, не зависящие от размерности N. Данное обстоятельство позволяет провести исследование на качество аппроксимации для разных размерностей N и весовых коэффициентов $\omega \in [-1,1]$. Показано, что наилучшее приближение дает параметр $\omega = 0$, а невязка стремится к нулю с ростом N.

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимирующий сплайн, многочлены Чебышёва.

Введение. Работа продолжает исследования [1]: при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ в качестве приближенного решения задачи

$$\begin{gathered} u_{tt} = \gamma^2 u_{\xi\xi}; \quad u(0,\xi) = \phi(\xi),\ u_t(0,\xi) = \psi(\xi),\ \xi \in [0,1]; \\ u(t,0) = \rho_0(t),\ u(t,1) = \rho_1(t),\ t \in [0, 2\tau], \end{gathered} \tag{1}$$

предлагается использовать оптимальный аппроксимирующий сплайн задачи

$$J \doteq J(\omega) \doteq J(N,\omega) \doteq \left\| u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi} \right\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma_\omega(\Pi) = \sigma_{N,\omega}(\Pi). \tag{2}$$

Предполагаются выполненными естественные условия сопряжения

$$\rho_0(0) = \phi(0), \quad \rho_1(0) = \phi(1), \quad \rho_0'(0) = \psi(0), \quad \rho_1'(0) = \psi(1).$$

При фиксированном $\omega \in [-1,1]$ через $\sigma_{N,\omega}(\Pi)$ обозначено конечномерное пространство, состоящее из сплайнов [2], зависящих от коэффициентов $u_j^i,\ i = 1,2,\ j = 1,\dots,2N-1$ (где N — параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в прямоугольнике $\Pi \doteq [0,2\tau] \times [0,1]$. Применяем обозначения $\lambda \doteq (1+\omega)/2$ и $\mu \doteq (1-\omega)/2$. В работе [1] для параметризации мы использовали параметр λ, а не ω, и применяли обозначение Ω вместо Π.

Пусть, далее, $n \doteq N-1$, $h \doteq \frac{1}{2N}$, $\theta \doteq \gamma^2 \frac{\tau^2}{h^2}$, $\nu \doteq \frac{h}{\tau^3} = \frac{1}{2N\tau^3}$,

$$\begin{gathered} u_0^i \doteq \rho_0^i \doteq \rho_0(i\tau), \quad u_{2N}^i \doteq \rho_1^i \doteq \rho_1(i\tau), \quad i = 0,1,2, \\ \psi_j \doteq \psi(jh), \quad \phi_j \doteq \phi(jh), \quad x_j \doteq u_j^2 - \phi_j, \quad y_j \doteq u_j^2 - 2\,u_j^1 + \phi_j, \quad j = 0,1,\dots,2N, \\ Z_k \doteq \phi_{2k-2} - 2\,\phi_{2k-1} + \phi_{2k}, \quad z_k \doteq \theta Z_k, \quad \mu_k \doteq -\tfrac{1}{\lambda^2}\, z_k, \quad \nu_k \doteq -\tfrac{1}{\mu^2}\, z_k, \quad k = 1,\dots,N, \\ v_k \doteq \mu_k + \nu_{k+1}, \quad k = 1,\dots,n. \end{gathered} \tag{3}$$

Величины μ_k, ν_k, v_k определены при $\lambda\mu \neq 0$ (то есть при $\omega \neq \pm 1$). Заметим, что в работе [1] для величины v_k мы применяли обозначение W_k. Кроме того, при $\lambda\mu \neq 0$ мы используем обозначения

$$x \doteq -1 - \tfrac{1}{2\lambda^2} - \tfrac{1}{2\mu^2} \leqslant -5, \quad \alpha \doteq -1 - \tfrac{1}{\lambda^2}, \quad \beta \doteq -1 - \tfrac{1}{\mu^2}.$$

По сравнению с работой [1] появились новые числа α и β такие, что $\alpha + \beta = 2x$, $\alpha\beta > 1$,

$$\mu_k = (1+\alpha)\, z_k, \quad \nu_k = (1+\beta)\, z_k, \quad v_k = (1+\alpha)\, z_k + (1+\beta)\, z_{k+1}.$$

Анализ функционала (2) породил в [1] уравнения (4.1)–(4.4) итоговой разностной схемы. В свете новых обозначений в случае $\lambda\mu \neq 0$ схема принимает вид

$$x_{2k-1} - \lambda\, y_{2k-2} - y_{2k-1} - \mu\, y_{2k} = 2\tau\, \psi_{2k-1}, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - (1-\lambda\mu)\, \theta\, (x_{2k-2} - 2\, x_{2k-1} + x_{2k}) = z_k, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

$$x_{2k} - 2\, y_{2k} = 2\tau\, \psi_{2k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$y_{2k-2} + 2x\, y_{2k} + y_{2k+2} = v_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

В случае $\lambda\mu = 0$ принципиально меняются уравнения (7): при $\lambda = 0$ уравнения принимают вид $y_{2k} = z_k$, а при $\mu = 0$ имеем $y_{2k} = z_{k+1}$. Таким образом, при $\lambda\mu = 0$ разностная схема принимает явный вид, позволяющий последовательно вычислить значения y_{2k}, x_{2k}, x_{2k-1}, y_{2k-1} и в конечном счете получить все коэффициенты u_j^2, u_j^1 оптимального аппроксимирующего сплайна задачи (2) (см. формулы (3)). В работе [1] для чисел y_{2k} получена явная формула (5.1)

$$y_{2k} = \frac{1}{U_n(x)} \Big[- B_{k1}(x)\, y_0 - B_{kn}(x)\, y_{2N} + \sum_{i=1}^{n} B_{ki}(x)\, v_i \Big], \quad k = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

которая и при $\lambda\mu \neq 0$ позволяет последовательно вычислить числа x_{2k}, x_{2k-1}, y_{2k-1}, u_j^2, u_j^1. В представлении (8) использованы многочлены Чебышёва 2-го рода $U_n(\cdot)$ и порожденные ими многочлены $B_{ki}(\cdot)$ (см. ниже). Заметим, что $U_n(x) \neq 0$ (поскольку $x \leqslant -5 < -1$, см., например, [3, с. 96]). Кроме того, в представлении (8) фигурируют лишь граничные элементы:

$$y_0 = u_0^2 - 2\, u_0^1 + \phi_0 = \rho_0^2 - 2\, \rho_0^1 + \phi_0 = \rho_0^2 - 2\, \rho_0^1 + \rho_0^0,$$

$$y_{2N} = u_{2N}^2 - 2\, u_{2N}^1 + \phi_{2N} = \rho_1^2 - 2\, \rho_1^1 + \phi_{2N} = \rho_1^2 - 2\, \rho_1^1 + \rho_1^0,$$

$$v_i = (1+\alpha)\, \theta\, (\phi_{2i-2} - 2\, \phi_{2i-1} + \phi_{2i}) + (1+\beta)\, \theta\, (\phi_{2i} - 2\, \phi_{2i+1} + \phi_{2i+2}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений теорема 1 [1] принимает следующий вид.

Теорема 1. *Система уравнений (4)–(7) имеет единственное решение, и оно допускает явное представление через граничные элементы y_0, y_{2N}, $\psi_1, \ldots, \psi_{2N-1}$, $z_1, \ldots, z_N$, $v_1, \ldots, v_n$. Для переменных y_{2k}, входящих в систему (7), при $\omega \in (-1, 1)$ справедливо представление (8), при $\omega = -1$ имеет место равенство $y_{2k} = z_k$, а если $\omega = 1$, то $y_{2k} = z_{k+1}$. Полученные значения позволяют сначала явно вычислить из уравнений (6) величины x_{2k}, из уравнений (5) — величины x_{2k-1}, затем из уравнений (4) — величины y_{2k-1} и, наконец, из уравнений (3) — коэффициенты u_j^2 и u_j^1 оптимального аппроксимирующего сплайна задачи (2).*

Замечание 1. Так как $x \leqslant -5$, то для решения уравнения (7) целесообразно применять метод прогонки — он имеет линейную сложность вычислений и наиболее эффективен в прикладной реализации. С прикладных позиций явная формула (8) обладает следующим недостатком: при $|x| > 1$ величина $|U_n(x)|$ ведет себя примерно как $|2x|^n$, следовательно, модули выражений, входящих в формулу, стремительно растут при увеличении n, что приводит к быстрому переполнению. Однако явная формула (8) имеет важное теоретическое значение: она позволяет в явном виде получить минимальное значение $J^* = J^*(\omega) = J^*(N, \omega)$ функционала (2) и показать, что в случае гладких граничных функций имеет место предельное соотношение $J^* \to 0$ (при $N \to \infty$). Эти исследования и составляют основную часть настоящей работы.

1. Вспомогательные утверждения о многочленах Чебышёва. Зафиксируем числа $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и составим матрицу $A(x) = \big(A_{ki}(x)\big)$ порядка n такую, что

$$A_{ki}(x) = \delta_{k,i+1} + 2x\,\delta_{ki} + \delta_{k,i-1},$$

где δ_{ki} — символ Кронекера. В работе [2] доказано равенство $\det A(x) = U_n(x)$. Совокупность $\{\,U_n(x),\ x \in \mathbb{R}\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$, состоящую из многочленов Чебышёва 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0$, $U_0(x) \doteq 1$, $U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x)$ (рекурсия в оба направления: как при $n \to \infty$, так и при $n \to -\infty$). В настоящей работе мы применяем тождество (1.1) из статьи [4]:

$$U_m(x)\,U_n(x) - U_{m-1}(x)\,U_{n-1}(x) = U_{m+n}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Составим, далее, симметрическую матрицу $B(x) = \big(B_{ki}(x)\big)$ порядка n такую, что

$$B_{ki}(x) \doteq (-1)^{k+i} \begin{cases} U_{k-1}(x)\,U_{n-i}(x), & \text{если } k \leqslant i, \\ U_{n-k}(x)\,U_{i-1}(x), & \text{если } k \geqslant i. \end{cases}$$

Если $\delta^{\geqslant}_{ki}$ — символ Кронекера такой, что $\delta^{\geqslant}_{ki} = 0$ при $k < i$ и $\delta^{\geqslant}_{ki} = 1$ при $k \geqslant i$, то, очевидно,

$$B_{ki}(x) = (-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,U_{k-1}(x)\,U_{n-i}(x) + \delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{n-k}(x)\,U_{i-1}(x)\,\right], \tag{10}$$

$$B_{ki}(x) = (-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,U_{k-1}(x)\,U_{n-i}(x) + \delta^{\geqslant}_{ki}\,U_{n-k}(x)\,U_{i-1}(x)\,\right]. \tag{11}$$

Теорема 2 (см. [2]). *Справедливы равенства $A(x)\,B(x) = U_n(x)\,E_n = B(x)\,A(x)$, где E_n — единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.*

В силу теоремы 2 решением системы (7) являются числа (8).

Далее мы применяем обозначения $U_n \doteq U_n(x)$ и $B_{ki} \doteq B_{ki}(x)$.

Числа $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha + \beta = 2x$ порождают две совокупности чисел

$$P_n \doteq P_n(x) \doteq P_n(x,\beta) \doteq U_n(x) - \beta\,U_{n-1}(x), \quad Q_n \doteq Q_n(x) \doteq Q_n(x,\alpha) \doteq U_n(x) - \alpha\,U_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

(в дальнейшем в обозначениях для P_n и Q_n мы указываем при необходимости зависимость лишь от параметра x). *Справедливы равенства*

$$(\,1+\alpha\,)\,U_m - (\,1+\beta\,)\,U_{m-1} = P_m + P_{m+1}, \tag{12}$$

$$(\,1+\beta\,)\,U_m - (\,1+\alpha\,)\,U_{m-1} = Q_m + Q_{m+1}, \tag{13}$$

$$P_{m+1}\,Q_{n+1} - P_m\,Q_n = (\,\alpha\beta - 1\,)\,U_{m+n}. \tag{14}$$

Действительно,

$$P_m + P_{m+1} = U_m - \beta\,U_{m-1} + U_{m+1} - \beta\,U_m =$$
$$= U_m - \beta\,U_{m-1} + 2x\,U_m - U_{m-1} - \beta\,U_m = (\,1+\alpha\,)\,U_m - (\,1+\beta\,)\,U_{m-1},$$
$$Q_m + Q_{m+1} = U_m - \alpha\,U_{m-1} + U_{m+1} - \alpha\,U_m =$$
$$= U_m - \alpha\,U_{m-1} + 2x\,U_m - U_{m-1} - \alpha\,U_m = (\,1+\beta\,)\,U_m - (\,1+\alpha\,)\,U_{m-1}.$$

В доказательстве равенства (14) четырежды применяем формулу (9):

$$P_{m+1}\,Q_{n+1} - P_m\,Q_n = (\,U_{m+1} - \beta\,U_m\,)\,(\,U_{n+1} - \alpha\,U_n\,) - (\,U_m - \beta\,U_{m-1}\,)\,(\,U_n - \alpha\,U_{n-1}\,) =$$
$$= [\,U_{m+1}\,U_{n+1} - U_m\,U_n\,] - \alpha\,[\,U_{m+1}\,U_n - U_m\,U_{n-1}\,] -$$
$$- \beta\,[\,U_m\,U_{n+1} - U_{m-1}\,U_n\,] + \alpha\beta\,[\,U_m\,U_n - U_{m-1}\,U_{n-1}\,] =$$
$$= U_{m+n+2} - \alpha\,U_{m+n+1} - \beta\,U_{m+n+1} + \alpha\beta\,U_{m+n} = U_{m+n+2} - 2x\,U_{m+n+1} + \alpha\beta\,U_{m+n} =$$
$$= -\,U_{m+n} + \alpha\beta\,U_{m+n} = (\,\alpha\beta - 1\,)\,U_{m+n}.$$

Произвольные числа $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha+\beta = 2x$ и $N \geqslant 2$ порождают две матрицы $\widetilde{A}(x) = \big(\widetilde{A}_{ki}(x)\big)$ и $\widetilde{B}(x) = \big(\widetilde{B}_{ki}(x)\big)$, $k, i = 0, 1, \ldots, N$, порядка $N+1$ такие, что

$$\widetilde{A}_{ki} \doteq \widetilde{A}_{ki}(x) \doteq \begin{cases} \alpha, & \text{если } (k,i) = (0,0), \\ \delta_{k,i+1} + 2x\,\delta_{ki} + \delta_{k,i-1}, & \text{если } (0,0) \neq (k,i) \neq (N,N), \\ \beta, & \text{если } (k,i) = (N,N), \end{cases}$$

$$\widetilde{B}_{ki} \doteq \widetilde{B}_{ki}(x) \doteq (-1)^{k+i} \begin{cases} P_k(x)\, Q_{N-i}(x), & \text{если } k \leqslant i, \\ Q_{N-k}(x)\, P_i(x), & \text{если } k \geqslant i, \end{cases}$$

или

$$\widetilde{B}_{ki} = \widetilde{B}_{ki}(x) = (-1)^{k+i} \big[\, \delta^{\geqslant}_{i-1,k}\, P_k(x)\, Q_{N-i}(x) + \delta^{\geqslant}_{ki}\, Q_{N-k}(x)\, P_i(x) \,\big]. \tag{15}$$

Теорема 3 (см. [4]). *Имеют место равенства* $\widetilde{A}(x)\, \widetilde{B}(x) = (\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n(x)\, E^0_N = \widetilde{B}(x)\, \widetilde{A}(x)$, *где* E^0_N *— единичная матрица порядка* $N+1$ *с элементами* $(E^0_N)_{ki} \doteq \delta_{ki}$, $k, i = 0, 1, \ldots, N$.

2. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна. Через $J^* = J^*(\omega)$ обозначим минимум функционала (2) в пространстве $\sigma_\omega(\Pi)$ (см. замечание 1). В соответствии с теоремой 2 [1] для величины $J^*(\omega)$ справедливо одно из трех представлений (6.2)–(6.4) (при $\omega = -1$, $\omega = 1$ и $\omega \in (-1, 1)$ соответственно), причем $J^*(-1) = \frac{1}{N\tau^3}\,(\,z_N - y_{2N}\,)^2$, $J^*(1) = \frac{1}{N\tau^3}\,(\,y_0 - z_1\,)^2$. Формула (6.4), однако, плохо приспособлена для анализа качества аппроксимации задачи (2) при варьировании параметрами $\omega \in (-1, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$, и наша ближайшая цель — это получение альтернативной формулы (22), позволяющей установить, что в случае гладких граничных функций справедливо равенство $J^* = O(\frac{1}{N})$.

В соответствии с обозначениями настоящей работы формула (6.4) приобретает вид

$$(\,\alpha\beta - 1\,)\, U_n\, J^*(\omega)/4\nu = -\beta\, U_n\, y_0^2 - \alpha\, U_n\, y_{2N}^2 + 2\,(\,1+\beta\,)\, U_n\, y_0 z_1 + 2\,(\,1+\alpha\,)\, U_n\, y_{2N} z_N -$$

$$- 2\,(\,1+x\,)\, U_n \sum_{k=1}^{N} z_k^2 + B_{11}\, y_0^2 + B_{1n}\, y_0\, y_{2N} - y_0 \sum_{k=1}^{n} B_{1k} v_k + B_{n1}\, y_0\, y_{2N} + B_{nn} y_{2N}^2 - y_{2N} \sum_{k=1}^{n} B_{nk} v_k -$$

$$- y_0 \sum_{k=1}^{n} B_{k1} v_k - y_{2N} \sum_{k=1}^{n} B_{kn} v_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} v_k v_i. \tag{16}$$

(Умножили обе части формулы на $U_n/\lambda^2\mu^2$ и учли тождество $\alpha\beta - 1 = 2\,(\,1-\lambda\mu\,)/\lambda^2\mu^2$.)

Обозначим двойную сумму через Σ. Поскольку $v_k = \mu_k + \nu_{k+1}$, то

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}\, \mu_k \mu_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}\, \mu_k \nu_{i+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}\, \nu_{k+1} \mu_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}\, \nu_{k+1} \nu_{i+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}\, \mu_k \mu_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} B_{k,i-1}\, \mu_k \nu_i + \sum_{k=2}^{N} \sum_{i=1}^{n} B_{k-1,i}\, \nu_k \mu_i + \sum_{k=2}^{N} \sum_{i=2}^{N} B_{k-1,i-1}\, \nu_k \nu_i$$

(в суммах заменили индексы k и i на $k-1$ и $i-1$ соответственно). Следовательно,

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} \big(\, \delta^{\geqslant}_{i-1,k}\, U_{k-1}\, U_{n-i} + \delta^{\geqslant}_{ki}\, U_{n-k}\, U_{i-1} \,\big)\, \mu_k \mu_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i-1} \big(\, \delta^{\geqslant}_{i-1,k}\, U_{k-1}\, U_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{k-1,i-1}\, U_{n-k}\, U_{i-2} \,\big)\, \mu_k \nu_i +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i-1} \big(\, \delta^{\geqslant}_{i-1,k-1}\, U_{k-2}\, U_{n-i} + \delta^{\geqslant}_{k-1,i}\, U_{N-k}\, U_{i-1} \,\big)\, \nu_k \mu_i +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i} \big(\, \delta^{\geqslant}_{i-2,k-1}\, U_{k-2}\, U_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{k-1,i-1}\, U_{N-k}\, U_{i-2} \,\big)\, \nu_k \nu_i.$$

Во второй сумме для величины $B_{k,i-1}$ применили формулу (10), а в остальных случаях — формулу (11). В силу равенства $U_{-1}=0$ и определения чисел $\delta^{\geqslant}_{mj}$ все суммирования можно вести от 1 до N, поэтому $\Sigma=\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Psi_{ki}$, где

$$\Psi_{ki}\doteq\big(\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,U_{k-1}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,U_{n-k}\,U_{i-1}\,\big)\,\mu_k\mu_i\;-\big(\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,U_{k-1}\,U_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,U_{n-k}\,U_{i-2}\,\big)\,\mu_k\nu_i\,-$$

$$-\big(\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,U_{k-2}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{N-k}\,U_{i-1}\,\big)\,\nu_k\mu_i\;+\big(\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,U_{k-2}\,U_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,U_{N-k}\,U_{i-2}\,\big)\,\nu_k\nu_i$$

(применили равенство $\delta^{\geqslant}_{m-1,j-1}=\delta^{\geqslant}_{mj}$). При $k<i$ справедливо

$$\Psi_{ki}=U_{k-1}\,U_{n-i}\,\mu_k\mu_i-U_{k-1}\,U_{N-i}\,\mu_k\nu_i-U_{k-2}\,U_{n-i}\,\nu_k\mu_i+U_{k-2}\,U_{N-i}\,\nu_k\nu_i=$$

$$=\big(\,U_{k-1}\,\mu_k-U_{k-2}\,\nu_k\,\big)\,\big(\,U_{n-i}\,\mu_i-U_{N-i}\,\nu_i\,\big)=$$

$$=\big[\,(\,1+\alpha\,)\,U_{k-1}-(\,1+\beta\,)\,U_{k-2}\,\big]\,\big[\,(\,1+\alpha\,)\,U_{n-i}-(\,1+\beta\,)\,U_{N-i}\,\big]\,z_k\,z_i=$$

$$=-\,(\,P_{k-1}+P_k\,)\,(\,Q_{N-i}+Q_{N+1-i}\,)\,z_k\,z_i$$

(воспользовались равенствами (12) и (13)), а при $k>i$ имеет место симметричная цепочка

$$\Psi_{ki}=U_{n-k}\,U_{i-1}\,\mu_k\mu_i-U_{n-k}\,U_{i-2}\,\mu_k\nu_i-U_{N-k}\,U_{i-1}\,\nu_k\mu_i+U_{N-k}\,U_{i-2}\,\nu_k\nu_i=$$

$$=\big(\,U_{n-k}\,\mu_k-U_{N-k}\,\nu_k\,\big)\,\big(\,U_{i-1}\,\mu_i-U_{i-2}\,\nu_i\,\big)=-\,(\,Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\,)\,(\,P_{i-1}+P_i\,)\,z_k\,z_i.$$

На диагонали (при $k=i$) имеем

$$\Psi_{kk}=U_{n-k}\,U_{k-1}\,\mu_k^2-U_{n-k}\,U_{k-2}\,\mu_k\nu_k-U_{k-2}\,U_{n-k}\,\nu_k\mu_k+U_{N-k}\,U_{k-2}\,\nu_k^2=$$

$$=\big(\,U_{n-k}\,\mu_k-U_{N-k}\,\nu_k\,\big)\,\big(\,U_{k-1}\,\mu_k-U_{k-2}\,\nu_k\,\big)+\big[\,U_{N-k}\,U_{k-1}-U_{n-k}\,U_{k-2}\,\big]\,\mu_k\nu_k=$$

$$=-\,(\,Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\,)\,(\,P_{k-1}+P_k\,)\,z_k^2+(\,1+\alpha\,)\,(\,1+\beta\,)\,U_n\,z_k^2.$$

В последнем равенстве заменили выражение, стоящее в квадратных скобках, в соответствии с формулой (9). Таким образом, если

$$\Phi_{ki}\doteq\begin{cases}(\,P_{k-1}+P_k\,)\,(\,Q_{N-i}+Q_{N+1-i}\,), & \text{если } k\leqslant i,\\ (\,Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\,)\,(\,P_{i-1}+P_i\,), & \text{если } k\geqslant i,\end{cases}$$

или

$$\Phi_{ki}=\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,(\,P_{k-1}+P_k\,)\,(\,Q_{N-i}+Q_{N+1-i}\,)+\delta^{\geqslant}_{ki}\,(\,Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\,)\,(\,P_{i-1}+P_i\,),$$

то $\Psi_{ki}=\big[\,-\,\Phi_{ki}+\delta_{ki}\,(\,1+\alpha\,)\,(\,1+\beta\,)\,U_n\,\big]\,z_k\,z_i$, поэтому

$$\Sigma=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}B_{ki}v_kv_i=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Psi_{ki}=-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z_k\,z_i+(\,1+\alpha\,)\,(\,1+\beta\,)\,U_n\sum_{k=1}^{N}z_k^2,$$

а формула (16) принимает вид

$$(\,\alpha\beta-1\,)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu=-\beta\,U_n\,y_0^2-\alpha\,U_n\,y_{2N}^2+2\,(\,1+\beta\,)\,U_n\,y_0\,z_1+2\,(\,1+\alpha\,)\,U_n\,y_{2N}\,z_N\,+$$

$$+\,U_{n-1}\,y_0^2-2\,(-1)^n\,y_0\,y_{2N}+U_{n-1}\,y_{2N}^2+2\,y_0\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,v_k-2\,y_{2N}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,U_{k-1}\,v_k\,-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z_k\,z_i+(\,\alpha\beta-1\,)\,U_n\sum_{k=1}^{N}z_k^2. \tag{17}$$

Воспользовались равенствами $B_{1k}=(-1)^{k-1}U_{n-k}=B_{k1}$, $B_{nk}=(-1)^{n-k}U_{k-1}=B_{kn}$ и легко проверяемым тождеством $(\,1+\alpha\,)\,(\,1+\beta\,)-2\,(\,1+x\,)=\alpha\beta-1$.

Продолжим преобразование двойной суммы из формулы (17):

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z_k\,z_i=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_{k-1}\,Q_{N+1-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N+1-k}\,P_{i-1}\right]z_k\,z_i+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_{k-1}\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N+1-k}\,P_{i}\right]z_k\,z_i+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_{k}\,Q_{N+1-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_{i-1}\right]z_k\,z_i+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_{k}\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_{i}\right]z_k\,z_i\,.$$

Обозначим слагаемые через σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 соответственно. В сумме σ_1 заменим индексы k и i на $k+1$ и $i+1$ соответственно. Тогда

$$\sigma_1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i,k+1}\,P_k\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{k+1,i+1}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right]z_{k+1}\,z_{i+1}=\sigma_1^1+\sigma_1^2,$$

где

$$\sigma_1^1\doteq\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right]z_{k+1}\,z_{i+1},$$
$$\sigma_1^2\doteq z_1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\,Q_{N-k}\,z_{k+1}+z_1\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\,Q_{N-i}\,z_{i+1}+Q_N\,z_1^2.$$

В формуле для σ_1^1 применили равенства $\delta^{\geqslant}_{i,k+1}=\delta^{\geqslant}_{i-1,k}$ и $\delta^{\geqslant}_{k+1,i+1}=\delta^{\geqslant}_{ki}$. Справедливы равенства $\delta^{\geqslant}_{i-1,k}=\delta^{\geqslant}_{ik}-\delta_{ik}$ и $\delta^{\geqslant}_{ki}=\delta^{\geqslant}_{k-1,i}+\delta_{ki}$, следовательно,

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\left(\,\delta^{\geqslant}_{ik}-\delta_{ik}\right)P_{k-1}\,Q_{N-i}+\left(\,\delta^{\geqslant}_{k-1,i}+\delta_{ki}\right)Q_{N+1-k}\,P_i\,\right]z_k\,z_i=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,P_{k-1}\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,Q_{N+1-k}\,P_i\,\right]z_k\,z_i+\varkappa, \tag{18}$$

где

$$\varkappa\doteq\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,-\delta_{ik}\,P_{k-1}\,Q_{N-i}+\delta_{ki}\,Q_{N+1-k}\,P_i\,\right]z_k\,z_i=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left[\,-P_{k-1}\,Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\,P_k\,\right]z_k^2=(\,\alpha\beta-1\,)\,U_n\sum_{k=1}^{N}z_k^2.$$

В конце цепочки воспользовались формулой (14). Заменим в сумме (18) индекс k на $k+1$, тогда

$$\sigma_2-\varkappa=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i+1}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i,k+1}\,P_k\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right]z_{k+1}\,z_i=\sigma_2^1+\sigma_2^2,$$

где

$$\sigma_2^1\doteq-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right]z_{k+1}\,z_i,$$
$$\sigma_2^2\doteq z_N\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,P_k\,z_{k+1}-\,z_1\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\,Q_{N-i}\,z_i+(-1)^n z_1\,z_N.$$

В формуле для σ_2^1 применили равенство $\delta^{\geqslant}_{i,k+1} = \delta^{\geqslant}_{i-1,k}$. В сумме σ_3 заменим индекс i на $i+1$:

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i+1}\left[\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{k,i+1}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right] z_k\,z_{i+1} = \sigma_3^1 + \sigma_3^2,$$

где

$$\sigma_3^1 \doteq -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{ik}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{k,i+1}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right] z_k\,z_{i+1} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\big(\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k} + \delta_{ik}\,\big)\,P_k\,Q_{N-i} + \big(\,\delta^{\geqslant}_{ki} - \delta_{ki}\,\big)\,Q_{N-k}\,P_i\,\right] z_k\,z_{i+1} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right] z_k\,z_{i+1},$$

$$\sigma_3^2 \doteq -\,z_1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\,Q_{N-k}\,z_k + z_N\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\,P_i\,z_{i+1} + (-1)^n z_1\,z_N.$$

В формуле для σ_3^1 применили равенства $\delta^{\geqslant}_{ik} = \delta^{\geqslant}_{i-1,k} + \delta_{ik}$ и $\delta^{\geqslant}_{k,i+1} = \delta^{\geqslant}_{k-1,i} = \delta^{\geqslant}_{ki} - \delta_{ki}$. Наконец, $\sigma_4 = \sigma_4^1 + \sigma_4^2$, где

$$\sigma_4^1 \doteq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right] z_k\,z_i,$$

$$\sigma_4^2 \doteq z_N\sum_{k=1}^{n}(-1)^{N-k}\,P_k\,z_k + z_N\sum_{i=1}^{n}(-1)^{N-i}\,P_i\,z_i + P_N\,z_N^2.$$

Таким образом, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z_k\,z_i = \varkappa + \sigma^1 + \sigma^2 = (\,\alpha\beta - 1\,)\,U_n\sum_{k=1}^{N} z_k^2 \;+\; \sigma^1 + \sigma^2$, где

$$\sigma^1 \doteq \sigma_1^1 + \sigma_2^1 + \sigma_3^1 + \sigma_4^1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right](\,z_k - z_{k+1}\,)\,(\,z_i - z_{i+1}\,),$$

$$\sigma^2 \doteq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 =$$

$$= Q_N\,z_1^2 + 2\,(-1)^n z_1\,z_N + P_N\,z_N^2 - 2\,z_1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}\,) - 2\,z_N\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,P_k\,(\,z_k - z_{k+1}\,),$$

поэтому формула (17) принимает вид

$$(\,\alpha\beta - 1\,)\,U_n\,J^*(\omega)\,/\,4\nu = -Q_N\,y_0^2 - 2\,(-1)^n\,y_0\,y_{2N} - P_N\,y_{2N}^2 + 2\,(\,1+\beta\,)\,U_n\,y_0\,z_1 + 2\,(\,1+\alpha\,)\,U_n\,y_{2N}\,z_N +$$

$$+\,2\,y_0\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,v_k - 2\,y_{2N}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,U_{k-1}\,v_k - \sigma^1 - \sigma^2 \tag{19}$$

(учли, что коэффициенты перед y_0^2 и y_{2N}^2 равны $U_{n-1} - \beta\,U_n = -Q_N$ и $U_{n-1} - \alpha\,U_n = -P_N$ соответственно). Обозначим суммы из последней формулы через σ^3 и σ^4 соответственно, тогда

$$\sigma^3 \doteq \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,v_k = (\,1+\alpha\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,z_k + (\,1+\beta\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,z_{k+1} =$$

$$= (\,1+\alpha\,)\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,U_{n-k}\,z_k - (\,1+\beta\,)\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,U_{N-k}\,z_k.$$

В первой сумме применили равенство $U_{-1} = 0$, а во второй заменили индекс k на $k-1$. Значит,

$$\sigma^3 + (\,1+\beta\,)\,U_n\,z_1 = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left[\,(\,1+\alpha\,)\,U_{n-k} - (\,1+\beta\,)\,U_{N-k}\,\right] z_k = -\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,\big(\,Q_{N-k} + Q_{N+1-k}\,\big)\,z_k$$

(воспользовались равенством (13)). Следовательно, справедливы равенства

$$\sigma^3 + (\,1{+}\beta\,)\,U_n\,z_1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k Q_{N-k}\,z_k = -\sum_{k=1}^{N}(-1)^k Q_{N+1-k}\,z_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,z_{k+1},$$

$$\sigma^3 = -(\,1{+}\beta\,)\,U_n\,z_1 + Q_N\,z_1 + (-1)^n z_N - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}\,).$$

Аналогичным образом,

$$\sigma^4 \doteq \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}\,v_k = (\,1{+}\alpha\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}\,z_k + (\,1{+}\beta\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}\,z_{k+1} =$$

$$= (\,1{+}\alpha\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}\,z_k - (\,1{+}\beta\,)\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}U_{k-2}\,z_k.$$

Во второй сумме заменили индекс k на $k-1$ и применили равенство $U_{-1}=0$. Значит,

$$\sigma^4 - (\,1{+}\alpha\,)\,U_n\,z_N = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}\big[\,(\,1{+}\alpha\,)\,U_{k-1} - (\,1{+}\beta\,)\,U_{k-2}\,\big]\,z_k = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}\big(\,P_{k-1} + P_k\,\big)\,z_k.$$

Воспользовались равенством (12). Следовательно, справедливы равенства

$$\sigma^4 - (\,1{+}\alpha\,)\,U_n\,z_N - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}P_k\,z_k = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}P_{k-1}\,z_k = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}P_k\,z_{k+1},$$

$$\sigma^4 = (\,1{+}\alpha\,)\,U_n\,z_N - (-1)^n z_1 - P_N\,z_N + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}P_k\,(\,z_k - z_{k+1}\,).$$

Итак, формула (19) принимает вид

$$\sigma^1 + (\,\alpha\beta{-}1\,)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu = -Q_N\,y_0^2 - 2\,(-1)^n y_0 y_{2N} - P_N\,y_{2N}^2 +$$

$$+\,2\,Q_N\,y_0 z_1 + 2\,(-1)^n y_0 z_N - 2\,y_0\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}\,) +$$

$$+\,2\,(-1)^n y_{2N}\,z_1 + 2\,P_N\,y_{2N}\,z_N - 2\,y_{2N}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}P_k\,(\,z_k - z_{k+1}\,) -$$

$$-\,Q_N\,z_1^2 - 2\,(-1)^n z_1 z_N - P_N\,z_N^2 + 2\,z_1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}) + 2\,z_N\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}P_k\,(\,z_k - z_{k+1}),$$

поэтому

$$\sigma^1 + (\,\alpha\beta{-}1\,)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu = -Q_N\,(\,y_0 - z_1\,)^2 + 2\,(-1)^n(\,y_0 - z_1\,)\,(\,z_N - y_{2N}\,) - P_N\,(\,z_N - y_{2N}\,)^2 -$$

$$-\,2\,(\,y_0 - z_1\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}\,) + 2\,(\,z_N - y_{2N}\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}P_k\,(\,z_k - z_{k+1}\,).$$

Значит,

$$(\,\alpha\beta{-}1\,)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu = -Q_N\,(\,y_0 - z_1\,)^2 - 2\,(-1)^N(\,y_0 - z_1\,)\,(\,z_N - y_{2N}\,) - P_N\,(\,z_N - y_{2N}\,)^2 -$$

$$-\,2\,(\,y_0 - z_1\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Q_{N-k}\,(\,z_k - z_{k+1}\,) - 2\,(\,z_N - y_{2N}\,)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{N-k}P_k\,(\,z_k - z_{k+1}\,) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\big[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i} + \delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\big]\,(\,z_k - z_{k+1})\,(\,z_i - z_{i+1})$$

или

$$(\alpha\beta-1)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu = -\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}(-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,P_k\,Q_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{ki}\,Q_{N-k}\,P_i\,\right]\xi_k\,\xi_i,$$

где

$$\begin{gathered}\xi_0 \doteq y_0 - z_1 = (\,\rho_0^2 - 2\rho_0^1 + \rho_0^0\,) - \theta\,(\,\phi_0 - 2\phi_1 + \phi_2\,),\\ \xi_k \doteq z_k - z_{k+1} = \theta\,(\,\phi_{2k-2} - 2\phi_{2k-1} + 2\phi_{2k+1} - \phi_{2k+2}\,), \qquad k = 1,\ldots,n,\\ \xi_N \doteq z_N - y_{2N} = \theta\,(\,\phi_{2N-2} - 2\phi_{2N-1} + \phi_{2N}\,) - (\,\rho_1^2 - 2\rho_1^1 + \rho_1^0\,).\end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, в силу формулы (15) справедливо равенство

$$(\alpha\beta-1)\,U_n\,J^*(\omega)/4\nu = -\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\widetilde{B}_{ki}\,\xi_k\,\xi_i = -\big\langle\,\widetilde{B}(x)\,\xi,\xi\,\big\rangle, \tag{21}$$

где $\xi \doteq \mathrm{col}\,(\,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_N)$, а в силу теоремы 3

$$J^*(\omega) = -\,4\,\nu\,\big\langle\,\widetilde{A}^{-1}(x)\,\xi,\xi\,\big\rangle = \tfrac{2}{N\tau^3}\,\big\langle\,[\,-\widetilde{A}(x(\omega))\,]^{-1}\xi,\xi\,\big\rangle. \tag{22}$$

Учли определение коэффициента ν и указали зависимость величины x от параметра ω.

Следовательно, в терминах введенных обозначений справедлива

Теорема 4. *При любом $\omega \in [-1,1]$ минимум $J^*(\omega)$ функционала* (2) *достигается на решении системы уравнений* (4)–(7), *и при $\omega \in (-1,1)$ для него имеет место представление* (22) *через граничные элементы* (20). *Справедливы равенства $J^*(-1) = \frac{1}{N\tau^3}\,\xi_N^2$, $J^*(1) = \frac{1}{N\tau^3}\,\xi_0^2$.*

Замечание 2. При $\omega \to \pm 1$ имеют место предельные соотношения $J^*(\omega) \to J^*(\pm 1)$. Действительно, пусть, например, $\omega \to 1$, тогда $\lambda \to 1$, $\mu \to 0$, $x \to -\infty$, $\alpha \to -2$, $\beta \to -\infty$. В силу (21) имеют место равенства

$$J^*(\omega)/4\nu = \frac{2x}{1-\alpha\beta}\,\frac{1}{2x\,U_n(x)}\,\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\widetilde{B}_{ki}(x)\,\xi_k\,\xi_i = \varkappa(\omega)\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}b_{ki}(x)\,\xi_k\,\xi_i,$$

где

$$\varkappa(\omega) \doteq 2x\,/\,(\,1-\alpha\beta\,) = (\,5 + 2\,\omega^2 + \omega^4\,)\,/\,(\,12 + 4\,\omega^2\,) \to \tfrac{1}{2},$$

а $b_{ki}(x) \doteq \widetilde{B}_{ki}(x)\,/\,[\,2x\,U_n(x)\,]$ — дробно-рациональные функции. Если $k \neq i$, то $\deg \widetilde{B}_{ki}(x) < N$, а $\deg\,[\,2x\,U_n(x)\,] = N$, поэтому $b_{ki}(x) \to 0$. При $k = i$ справедливы равенства

$$b_{kk}(x) = \frac{Q_{N-k}(x)\,P_k(x)}{2x\,U_n(x)} = \frac{[\,U_{N-k}(x) - \alpha\,U_{n-k}(x)\,]\,[\,\alpha\,U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)\,]}{U_N(x) + U_{n-1}(x)}.$$

При $k > 0$ степень числителя равна n, а знаменателя — N, поэтому $b_{kk}(x) \to 0$. Если же $k = 0$, то $b_{00}(x) = Q_N(x)\,/\,[\,2x\,U_n(x)\,] = [\,U_N(x) - \alpha\,U_n(x)\,]\,/\,[\,U_N(x) + U_{n-1}(x)\,] \to 1$. Таким образом, $b_{ki}(x) \to \delta_{k0}\,\delta_{0i}$, поэтому $J^*(\omega) \to 2\nu\,\xi_0^2 = J^*(1)$. Второй предел доказывается аналогично. Значит, функция $\omega \to J^*(\omega)$, $\omega \in [-1,1]$, непрерывна (для внутренних точек это очевидно).

3. О параметре наилучшей аппроксимации. Теорема 4 позволяет провести исследование на качество аппроксимации при разных N и ω. В силу следствия 4 [4] для спектров матриц $[\,-\widetilde{A}(x(\omega))\,]$ и $[\,-\widetilde{A}(x(\omega))\,]^{-1}$ справедливо

$$0 < (\,1-\alpha\beta\,)/2x < \widetilde{\Lambda}_0(\omega) < \beta^{-1}-\alpha < \widetilde{\Lambda}_1(\omega) < \ldots < \widetilde{\Lambda}_N(\omega) < 2-2x,$$

$$0 < [\,2-2x\,]^{-1} < [\,\widetilde{\Lambda}_N(\omega)\,]^{-1} < \ldots < [\,\widetilde{\Lambda}_1(\omega)\,]^{-1} < [\,\beta^{-1}-\alpha\,]^{-1} < [\,\widetilde{\Lambda}_0(\omega)\,]^{-1} < [\,(\,1-\alpha\beta\,)/2x\,]^{-1}$$

(здесь мы имеем $c = -1$ и $\beta < 0$), следовательно, при любом N имеют место оценки

$$\big\langle\,[\,-\widetilde{A}(x(\omega))\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle \leqslant [\,\widetilde{\Lambda}_0(\omega)\,]^{-1}\,\|\,\xi\,\|_N^2 < [\,2x\,/\,(\,1-\alpha\beta\,)\,]\,\|\,\xi\,\|_N^2 = \varkappa(\omega)\,\|\,\xi\,\|_N^2,$$

где $\|\xi\|_N^2 \doteq \sum\limits_{k=0}^{N} \xi_k^2$. Легко установить, что минимум $\varkappa(\omega)$ достигается при $\omega=0$ и равен $\frac{5}{12}$, а супремум равен $\frac{1}{2}$ (при $\omega\to\pm1$). Таким образом, при фиксированном N справедливы универсальные оценки

$$\big\langle\,[-\widetilde{A}(x(\omega))\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle<\tfrac{1}{2}\,\|\xi\|_N^2,\quad J^*(\omega)<\tfrac{1}{N\tau^3}\,\|\xi\|_N^2,\quad \omega\in(-1,1),\tag{23}$$

а в наилучшем случае имеем $\omega=0,\ x=\alpha=\beta=-5$,

$$\big\langle\,[-\widetilde{A}(-5)\,]^{-1}\xi,\,\xi\,\big\rangle<\tfrac{5}{12}\,\|\xi\|_N^2,\quad J^*(0)<\tfrac{5}{6N\tau^3}\,\|\xi\|_N^2.$$

4. Поведение $J^*(N,\omega)$ при $N\to\infty$. Зафиксируем $\omega\in(-1,1)$, и пусть $\{J_N\}$ — это последовательность, в которой $J_N\doteq J^*(N,\omega)$ — минимальное значение функционала (2), вычисленное при заданном N. В силу (23) имеем $J_N<\frac{1}{N\tau^3}\|\xi\|_N^2$. Следовательно, поведение $\{J_N\}$ во многом зависит от поведения последовательности $\big\{\|\xi\|_N^2\big\}_{N=2}^{\infty}$, порожденной функциями $\phi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ и $\rho_0,\rho_1\colon[0,2\tau]\to\mathbb{R}$. Очевидно, $\|\xi\|_N^2=\xi_0^2+S_n+\xi_N^2$, где $S_n\doteq\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2$ — величина, зависящая исключительно от функции ϕ. Полагаем, далее, что $\phi\in\mathrm{C}^3[0,1]$, а $\rho_0,\rho_1\in\mathrm{C}^2[0,2\tau]$.

В силу (20) и формулы Тейлора справедливы равенства

$$\xi_k=\gamma^2\tau^2h^{-2}\,[\,\phi_{2k-2}-2\,\phi_{2k-1}+2\,\phi_{2k+1}-\phi_{2k+2}\,]=$$
$$=\tfrac{1}{6}\,\gamma^2\tau^2h\,\big[-8\,\phi^{(3)}(\vartheta_{-2})+2\,\phi^{(3)}(\vartheta_{-1})+2\,\phi^{(3)}(\vartheta_{+1})-8\,\phi^{(3)}(\vartheta_{+2})\big],\quad k=1,\ldots,n,$$

где $\vartheta_{-2}\in[\,(2k-2)h,2kh\,]$, $\vartheta_{-1}\in[\,(2k-1)h,2kh\,]$, $\vartheta_{+1}\in[\,2kh,(2k+1)h\,]$, $\vartheta_{+2}\in[\,2kh,(2k+2)h\,]$ — некоторые числа (разложили функцию ϕ в окрестности точки $2kh$, аналогичные преобразования осуществлены в пункте 4.2 статьи [4]). Следовательно, если $M\doteq\max\limits_{[0,1]}|\,\phi^{(3)}(\cdot)\,|$, то

$$|\,\xi_k\,|\leqslant\tfrac{10}{3}\,\gamma^2\tau^2h\,M=\tfrac{5}{3N}\,\gamma^2\tau^2M,\qquad S_n<\tfrac{25}{9N}\,\gamma^4\tau^4M^2\to0\ \text{ при }\ N\to\infty.$$

В силу (20) справедливы равенства

$$\xi_0=\tau^2\Big[\,\frac{\rho_0^2-2\rho_0^1+\rho_0^0}{\tau^2}-\gamma^2\,\frac{\phi_0-2\phi_1+\phi_2}{h^2}\Big],\quad \xi_N=\tau^2\Big[\,\gamma^2\,\frac{\phi_{2N-2}-2\phi_{2N-1}+\phi_{2N}}{h^2}-\frac{\rho_1^2-2\rho_1^1+\rho_1^0}{\tau^2}\Big],$$

следовательно, если $m_\ell\doteq\max\limits_{[0,2\tau]}|\,\rho_\ell''(\cdot)\,|+\gamma^2\max\limits_{[0,1]}|\,\phi''(\cdot)\,|,\ \ \ell=0,1$, то

$$\xi_0^2\leqslant\tau^4m_0^2,\qquad \xi_N^2\leqslant\tau^4m_1^2,\qquad J_N<\tfrac{1}{N\tau^3}\,\|\xi\|_N^2<\tfrac{\tau}{N}\,\big(\,m_0^2+\tfrac{25}{9N}\,\gamma^4M^2+m_1^2\,\big)\to0.$$

Таким образом, для любых $\omega\in(-1,1)$ и $\varepsilon>0$ найдутся $N\in\mathbb{N}$ и сплайн $u\in\sigma_{N,\omega}(\Pi)$ такие, что $\big\|\,u_{tt}-\gamma^2u_{\xi\xi}\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)}<\varepsilon$. Эти объекты могут быть найдены априорно: значение N — исходя из неравенства $\frac{\tau}{N}\,\big(\,m_0^2+\frac{25}{9N}\,\gamma^4M^2+m_1^2\,\big)<\varepsilon$, а коэффициенты сплайна — в силу теоремы 1.

5. К вопросу о численном решении общей первой краевой задачи. Легко проверить, что при $\gamma\neq0$ и $(t,\xi)\in K\doteq[0,1]^2$ решение $u=u(t,\xi)$ задачи

$$u_{tt}=\gamma^2u_{\xi\xi}+f(t,\xi),\quad u(0,\xi)=\phi(\xi),\quad u_t(0,\xi)=\psi(\xi),\quad u(t,0)=r_0(t),\quad u(t,1)=r_1(t),$$

представимо в виде $u=u(t,\xi)=(\,1-\xi\,)\big[\,r_0(t)-\rho_0(t)\big]+\xi\,\big[\,r_1(t)-\rho_1(t)\big]+u^1(t,\xi)+u^2(t,\xi)$, где функции $u^1=u^1(t,\xi),\ u^2=u^2(t,\xi)$ — это решения задач

$$u^1_{tt}=\gamma^2u^1_{\xi\xi},\quad u^1(0,\xi)=\phi(\xi),\quad u^1_t(0,\xi)=\psi(\xi),\quad u^1(t,0)=\rho_0(t),\quad u^1(t,1)=\rho_1(t),\tag{24}$$

$$u^2_{tt}=\gamma^2u^2_{\xi\xi}+F(t,\xi),\quad u^2(0,\xi)=0,\quad u^2_t(0,\xi)=0,\quad u^2(t,0)=0,\quad u^2(t,1)=0,\tag{25}$$

в которых $\rho_0(t)\doteq r_0(0)+t\,r_0'(0)$, $\rho_1(t)\doteq r_1(0)+t\,r_1'(0)$, $F(t,\xi)\doteq f(t,\xi)-(\,1-\xi\,)\,r_0''(t)-\xi\,r_1''(t)$.

Очевидно, задача (24) является частным случаем задачи (1), в котором $\tau = \frac{1}{2}$, а ρ_0, ρ_1 — линейные функции. Эта специфика (линейность функций) гарантирует нам, что любой квадратичный сплайн $u^1 \in \sigma_{N,\omega}(K)$ на границе $\xi = 0$ и $\xi = 1$ целиком совпадает с функциями ρ_0, ρ_1. Значит, чем больше будет узлов на границе $t = 0$ (чем больше N), тем точнее будет приближенное решение u^1 задачи (24), построенное в соответствии с алгоритмами настоящей работы. Заметим также, что в предложенном методе для решения задачи (24) отпадает потребность послойных (итеративных) вычислений по времени, а так как имеет место непрерывная зависимость коэффициентов сплайна u^1 от входных данных, то разностная схема (4)–(7) устойчива.

Что касается задачи (25), описывающей вынужденные колебания струны под воздействием внешней силы при нулевых начальных условиях, то ее решение хорошо известно и допускает явное интегральное представление (см., например, [5, с. 98]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего волнового уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 144–154.
2. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 154–171.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
4. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 141–156.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Поступила в редакцию 21.06.2013

Родионова Надежда Витальевна, старший преподаватель, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: Nadezda240986@yandex.ru

N. V. Rodionova
Exact solution of optimization task generated by simplest wave equation

Keywords: interpolation, approximate spline, Chebyshev's polynomials.

Mathematical Subject Classifications: 41A15

In the previous paper of the author the parameter family of finite-dimensional spaces of special quadratic splines of Lagrange's type has been defined. In each space, as a solution to the initial-boundary problem for the simplest wave equation, we have proposed the optimal spline, which gives the smallest residual. We have obtained exact formulas for coefficients of this spline and its residual. The formula for coefficients of this spline is a linear form of initial finite differences. The formula for the residual is a positive definite quadratic form of these quantities, but because of its bulkiness it is ill-suited for analyzing of the approximation quality of the input problem at the variation with the parameters.

For the purposes of the present paper, we have obtained an alternative representation for the residual, which is the positive definite quadratic form of the new finite differences defined on the boundary. The elements of the matrix of form are expressed in terms of Chebyshev's polynomials, the matrix is invertible and the inverse matrix has a tridiagonal form. This feature allows us to obtain, for the spectrum of the matrix, upper and lower bounds that are independent of the dimension N. Said fact allows us to make a study of the quality of approximation for different dimensions N and weights $\omega \in [-1, 1]$. It is shown that the parameter $\omega = 0$ gives the best approximation and the residual tends to zero as N increasing.

REFERENCES

1. Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 144–154 (in Russian).

2. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 154–171 (in Russian).

3. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical orthogonal polynomials), Moscow: Nauka, 1976, 328 p.

4. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 141–156 (in Russian).

5. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1977, 736 p.

Received 21.06.2013

Rodionova Nadezhda Vital'evna, Senior Lecturer, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: Nadezda240986@yandex.ru