

УДК 532.5.032

© Ю. Г. Крат, И. И. Потапов

МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ДОННЫХ ВОЛН ¹

В работе предложена русловая модель, позволяющая исследовать процесс развития донных волн с учетом стохастического возмущения потока. Исследовано влияние гидродинамических параметров потока на процесс образования и развития донных волн. Сравнение полученных результатов с натурными данными показало их хорошее качественное и количественное образование.

Ключевые слова: донные формы, стохастические возмущения, русловые процессы.

Введение

Изучение русловых процессов в реках с песчаным дном связано с поиском зависимости между движением донных наносов и движением гидродинамического потока. Подвижность дна реки приводит к появлению неустойчивости донной поверхности и появлению множества донных форм, начиная от донной ряби с сантиметровыми масштабами и заканчивая волнами, имеющими масштаб ширины русла [1, 2]. Донные волны, в свою очередь, влияют на значение гидравлического сопротивления, которое необходимо определить для решения гидродинамической задачи.

Данная задача в общем виде на настоящий момент не имеет замкнутой формальной постановки [3–6]. Существующие теоретические работы по линейной устойчивости русла [3–6] позволяют определить параметры задачи, при которых начинают развиваться донные волны, определить их длину и скорость движения, но не могут ответить на вопросы о полном гидравлическом сопротивлении, характеризуемом реальными масштабами донных волн.

В работе предложена одномерная по пространству математическая модель, включающая в себя линейаризованные уравнения движения водного потока [5] в рамках приближения мелкой воды, уравнение баланса влекомых наносов, определяющее эволюцию донной поверхности, и формулу движения влекомых наносов [6, 7].

В рамках предложенной модели исследуется эволюция донных волн в зависимости от гидродинамических и стохастических свойств русловой системы и физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала и выполняются их сравнения с натурными данными.

§ 1. Математическая модель задачи

Рассматривается задача описания размыва песчаного дна реки. Для определения осредненного по глубине поля скорости жидкости принимаются уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды [3], в которых массовые силы учитывают средний уклон русла и квадратичный закон сопротивления. Поскольку дно изменяется медленно, то используются стационарные уравнения движения. Рассматриваются одномерные по координате x уравнения. Ось x направлена по скорости потока $V(x)$, осредненной по глубине. Декартова координата z направлена перпендикулярно вверх (рис. 1).

Пусть $z = \zeta(t, x)$ — отметка дна, $z = h + \zeta(t, x) = \eta(t, x)$ — отметка свободной поверхности, h — средняя глубина канала. Начало координат канала выбираем так, чтобы средние по координате x функции $\zeta(x)$ и $\eta(x)$ были равны нулю: $\langle \zeta(x) \rangle = 0$ и $\langle \eta(x) \rangle = 0$. Уравнение движения

¹Работа выполнена при поддержке фонда ДВО РАН (грант Х9 12-Ш-А-03-034) и РФФИ (грант № 12-01-98518-р восток(а)).

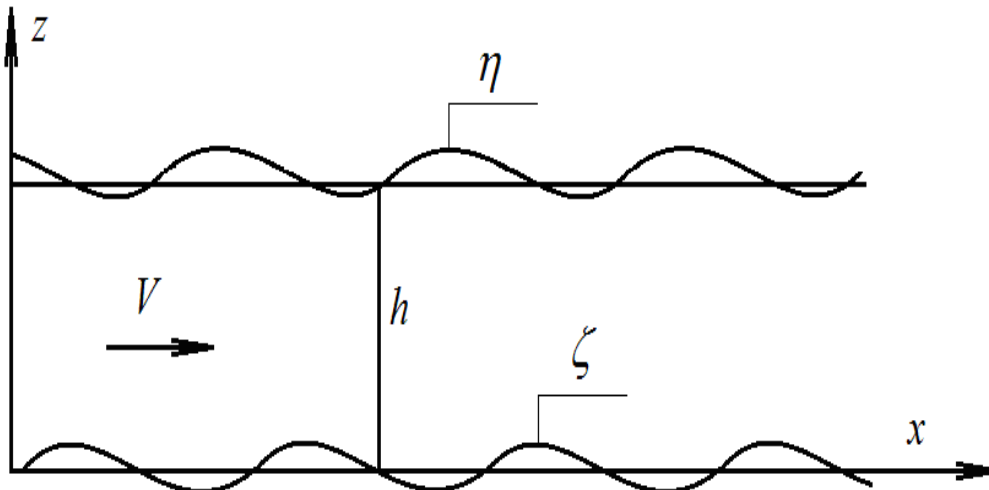


Рис. 1. Расчетная область

имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} - gJ + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\lambda_g V^3}{Q} = 0 \quad (1)$$

и дополняется уравнением сохранения расхода Q

$$Q = (h + \eta - \zeta)V, \quad (2)$$

где J — средний уклон русла, λ_g — коэффициент гидравлического сопротивления, g — ускорение свободного падения. Для решения русловой задачи потребуется линейризация этих уравнений. Для ровного дна $\zeta = 0$ решением уравнений (1), (2) является однородный поток со скоростью U и ровной свободной поверхностью $\eta = 0$. Скорость U определяется из баланса сил гидравлического сопротивления и силы тяжести:

$$U = Q/h = \sqrt{ghJ/\lambda_g}.$$

Линеаризуем уравнения (1), (2) по малым возмущениям $u = V - U$, η и ζ . Для разных степеней V имеем

$$V = \frac{Q}{h + \eta - \zeta} = \frac{Q}{h} + \frac{Q}{h^2}(\zeta - \eta),$$

$$V^2 = \frac{Q^2}{h^2} + 2\frac{Q^2}{h^3}(\zeta - \eta), \quad V^3 = \frac{Q^3}{h^3} + 3\frac{Q^3}{h^4}(\zeta - \eta).$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), с помощью (2) получим

$$\frac{Fr - 1}{Fr} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3\lambda_g}{h}(\eta - \zeta) = 0, \quad (3)$$

где $Fr = \frac{U^2}{gh}$ — число Фруда. Учитывая, что $\lambda_g \ll 1$ с точностью до малых второго порядка на интервалах порядка длины донной волны, полученное уравнение (3) можно упростить до вида

$$\frac{Fr - 1}{Fr} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Изменение отметки дна можно найти из уравнения сохранения песчаной массы [3]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s(1 - \varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где ρ_s — плотность частиц песка, ε — коэффициент пористости песчаного дна, t — время.

Для замыкания системы уравнений используется зависимость вектора расхода наносов G от векторов напряжений жидкости на дне, локальных уклонов донной и свободной поверхностей, полученная в работе [5]:

$$G = \begin{cases} C_0 T^{3/2} \left[\operatorname{tg} \varphi (1 - \chi) - \left(1 - \frac{\chi}{2}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1 - \chi}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right], & 1 - \chi > 0, \\ 0, & 1 - \chi \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$C_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s}{k \sqrt{\rho_w} F_a \operatorname{tg} \varphi}, \quad T_0 = \frac{9}{8} \frac{k^2 d F_a}{c_x}, \quad \chi = \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad s = f \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, \quad F_a = \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi (\rho_s - \rho_w) g,$$

где T_0 — напряжение начала движения донных частиц; ρ_w — плотность воды; φ — угол внутреннего трения донных частиц; s — параметр стратификации активного придонного слоя, в котором переносятся частицы; γ — острый угол между нормалью к поверхности смеси и вертикальной линией; f — концентрация донных частиц в активном слое; $k = 0.4$ — постоянная Кармана; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц; d — диаметр частиц потока.

Касательное напряжение у поверхности дна T будем вычислять по формуле

$$T = \rho_w \lambda g \frac{Q^2}{(h + \eta - \zeta)^2} \approx \rho_w \lambda g U^2 \left(1 + 2 \frac{\zeta}{h}\right). \quad (7)$$

Используя асимптотики (4), (7), можно исключить из уравнения (6) функцию η , замыкая систему уравнений (5), (6). Сформулируем на основе уравнений (5), (6) задачу русловых деформаций, доопределив их начальными и граничными условиями

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0, \quad G(0, t) = G_0 + \delta, \quad G(L, t) = G_0, \quad (8)$$

где ζ_0 — начальное значение донной поверхности; G_0 — среднее значение транзитного потока влекомых наносов, полученное для установившегося течения над ровным дном; δ — стохастические пульсации транзитного потока влекомых наносов; L — длина расчетной области.

Стохастическое поведение руслового процесса определяется заданием пульсации δ расхода транзитного массового потока наносов на входе в расчетную область. Величина пульсаций определяется с использованием закона нормального распределения [8]:

$$\delta = G_0 10^{-2} \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = 1, \quad x = -10 \dots 10. \quad (9)$$

§ 2. Численный метод решения задачи

Для решения русловой задачи используется явный итерационный метод:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \frac{\Delta t}{(1 - \varepsilon) \rho_s} \frac{G_i^n - G_{i-1}^n}{\Delta x},$$

$$G_i^n = m C_0 \left(T_{i+1/2}^n\right)^{3/2} \left[\operatorname{tg} \varphi (1 - \chi_{i+1/2}^n) - \left(1 - \frac{\chi_{i+1/2}^n}{2} - \frac{1 - \chi_{i+1/2}^n Fr}{1 - Fr} \frac{Fr}{s}\right) \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n}{\Delta x} \right],$$

$$T_{i+1/2}^n = 0.5(T_{i+1}^n + T_i^n), \quad \chi_{i+1/2}^n = 0.5(\chi_{i+1}^n + \chi_i^n), \quad m = \begin{cases} 1, & 1 - \chi_{i+1/2}^n > 0, \\ 0, & 1 - \chi_{i+1/2}^n \leq 0. \end{cases}$$

Решение задачи выполнялось на равномерной по пространству сетке с узлами $x_i = i \Delta x$, $1 \leq i \leq N - 1$ и шагом $\Delta x = L / (N - 1)$. При выборе временного шага Δt выбирался максимально допустимый шаг, удовлетворяющий условию Куранта [12]. Завершение расчета осуществляется

после выхода на квазистационарный режим критерия w , являющегося среднеквадратичным отклонением донной поверхности ζ от средней линии дна $\bar{\zeta}$:

$$w = \left(\frac{1}{N} \sum (\zeta_i - \bar{\zeta})^2 \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где $\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum \zeta_i$, N — количество узлов, ζ_i — значения донной поверхности в i -м узле. Здесь и ниже индекс временного слоя n опущен.

Учет лавинного характера движения наносов на подветренном склоне донных волн производился по алгоритму, предложенному в работах [12, 13]. Для этого на каждом временном слое после вычисления значений ζ_i проводится их лавинная коррекция, когда для каждого i -го узла ($1 \leq i \leq N$) выполняются следующие парные вычисления: $\zeta_i = \zeta_i - \alpha \Delta_L$, $\zeta_{i-1} = \zeta_{i-1} + \alpha \Delta_L$, где значение корректора Δ_L для подветренного склона дюн вычисляются как

$$\Delta_L = \begin{cases} r + \Delta\zeta_i, & r < -\Delta\zeta_i, \\ 0, & r \geq -\Delta\zeta_i, \end{cases} \quad r = \Delta x \operatorname{tg} \varphi, \quad \Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}, \quad (11)$$

аналогично при необходимости обрабатывается наветренный склон дюн. Для предотвращения образования нефизичных осцилляций в основании склонов донных волн был использован метод нижней релаксации лавинной коррекции с параметром релаксации $\alpha = 0.8$.

§ 3. Динамика развития донных волн

На основании предложенной стохастической математической модели (4)–(8) выполнены расчеты по эволюции донных волн во времени для различных чисел Фруда. Расчеты велись при следующих геометрических, физико-механических и гранулометрических параметрах: $L = 10$ м, $U = 0.5$ м/с, 0.05 м $\leq h \leq 0.3$ м, $\rho_s = 1650$ кг/м³, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\varphi = 28$, $d = 0.0001$ м, $\varepsilon = 0.4$, $c_x = 0.5$, $k = 0.4$, $f = 0.1$. Амплитуда стохастических возмущений транзитного потока наносов на входе в расчетную область варьировалась в диапазоне $0.006G_0 \leq \delta \leq 0.1G_0$.

На рисунке 2 представлены графики эволюции относительной длины волны донных возмущений для различных чисел Фруда. Кривые 1–4 соответствуют числам Фруда Fr , равным 0.29, 0.36, 0.51, 0.71. Также на графиках для каждой эволюционной кривой сплошными линиями определены их средние значения, а пунктирными — границы среднеквадратичных отклонений относительной длины волны донных возмущений.

Из анализа результатов расчетов следует, что рост амплитуды донных волн и их длины происходит в первые 50–500 с, что хорошо согласуется с известными экспериментальными данными [10, 11]. Из графиков видно, что при временах больших 500 с, несмотря на продолжающееся стохастическое изменение рельефа дна, критерий установления (10) не изменяется, то есть происходит квазипериодическое движение донного рельефа со среднеквадратичными отклонениями: $w_1 = 0.036$, $w_2 = 0.093$, $w_3 = 0.066$, $w_4 = 0.038$. Полученный результат имеет важное методологическое значение и указывает на причины, по которым различные экспериментаторы [10, 11] не могут получить четких детерминированных взаимосвязей между гидродинамическими параметрами потока и геометрическими параметрами донных волн в своих экспериментах. Согласно полученным результатам, даже малое стохастическое изменение расхода $\delta \sim 0.01G_0$, находящееся, как правило, за пределами точности измерительной аппаратуры, может приводить к значительному (до порядка) системному отклонению измеряемых геометрических характеристик донных волн. Вероятно, наличие стохастического возмущения расхода наносов приводит к невозможности получения стационарного руслового решения для донной поверхности.

На рисунке 3 (кривая 1) представлен график связи между числом Фруда невозмущенного потока и средними значениями относительной длины волны донных возмущений. На представленной кривой приведены интервалы, определяемые среднеквадратичными отклонениями.

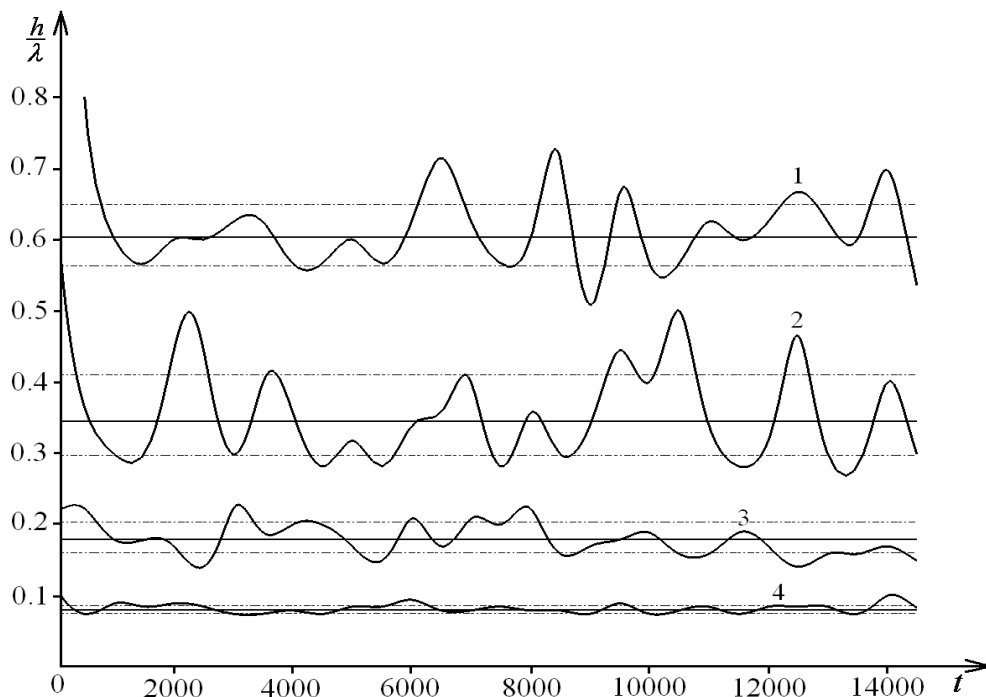


Рис. 2. Эволюция донных волн:

1 — $Fr = 0.29$, 2 — $Fr = 0.36$, 3 — $Fr = 0.51$, 4 — $Fr = 0.71$

— средняя длина волны - - - - среднеквадратичное отклонение

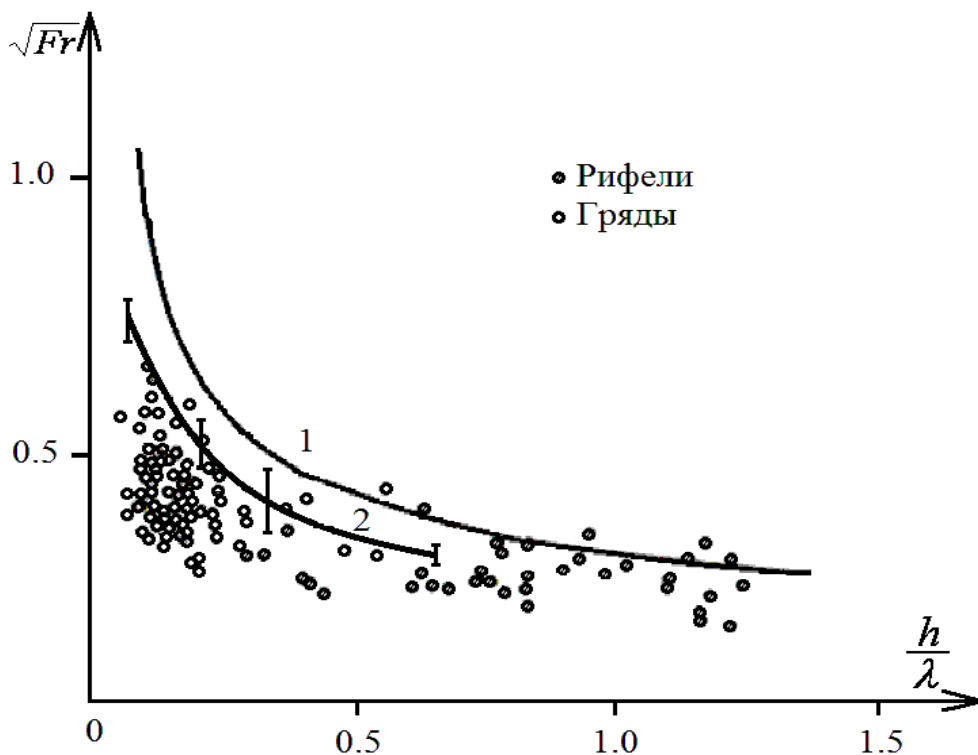


Рис. 3. Связь между числом Фруда невозмущенного потока и относительной длиной волны донных возмущений:

1 — численное решение по предложенной модели,

2 — асимптотическое решение Кеннеди [3]

Интервалы указывают полосу, в которой экспериментальные данные имеют характерное рассеивание относительно среднего значения — относительной длины волны донных возмущений. Полученная расчетная зависимость 1 хорошо согласуется с экспериментальными данными, приведенными в работе [9], и согласуется с линейной оценкой Кеннеди (кривая 2).

Выводы

1. В работе на основе уравнения русловых деформаций предложена нелинейная стохастическая модель формирования донных волн, не содержащая в себе феноменологических параметров.

2. Получены численные закономерности, определяющие рост и эволюцию длины волны донных возмущений во времени, в зависимости от числа Фруда для гидродинамического потока, а также физико-механических и гранулометрических параметров донного материала.

3. Анализ результатов моделирования позволил сделать следующий вывод: в рамках использованной модели исследуемая русловая задача не имеет стационарного решения при малых стохастических возмущениях потока влекомых наносов. Нестационарность решения приводит к невозможности получения в экспериментах детерминированных взаимосвязей (с малыми среднеквадратичными отклонениями) между гидродинамическими параметрами потока и длиной волны донных возмущений. Такой вывод хорошо подтверждается многочисленными экспериментальными данными.

4. Полученные в результате моделирования длины волн согласуются с экспериментальными данными и не противоречат аналитическим зависимостям линейного анализа донной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rubin D.M. Use of forecasting signatures to help distinguish periodicity, randomness, and chaos in ripples and other spatial patterns // *Chaos*. 1992. Vol. 2. P. 525–535.
2. Dodds P.S., Rothman B.H. Scaling, universality and geomorphology // *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 2000. Vol. 28. P. 571–610.
3. Гришанин К.В. Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 143 с.
4. Komarova N.L., Hulscher S.J. Linear instability mechanisms for sand wave formation // *Journal of Fluid Mech.* 2000. Vol. 413. P. 219–246.
5. Петров А.Г., Потапов И.И. Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // *ПМТФ*. 2010. Т. 51. № 1. С. 62–74.
6. Петров А.Г., Потапов И.И. О развитии возмущений песчаного дна канала // *Доклады Академии наук*. 2010. Т. 431. № 2. С. 191–195.
7. Потапов И.И., Щекачева М.А. Определение скорости размыва берегового склона в реках с песчаным дном // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2011. Вып. 4. С. 116–120.
8. Крат Ю.Г., Потапов И.И. Влияние нерегулярного возмущения потока на образование донных волн / *Препринт № 175*. Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2012. 22 с.
9. Guy N.P., Simons D.V., Richardson E.V. Summary of alluvial channel data from flume experiments // *Geol. Survey Profess. Paper 462-I*. Washington, 1967. 96 p.
10. Coleman S.E., Fedele J.J., Garcia M.H. Closed-conduit bed-forms initiation and development // *Journal of Hydraulic Engineering*. 2003. Vol. 129. № 12. P. 956–965.
11. Venditti J.G., Church M. Morphodynamics of small-scale superimposed sand waves over migrating dune bed forms // *Water Resources Research*. 2005. Vol. 41. 14 p.
12. Tjerry S. Morphological calculations of dunes in alluvial rivers // *Ph.D.-thesis / ISVA*, Technical University of Denmark. 1995. 193 p.
13. Sanne L. N. Modeling of sand dunes in steady and tidal flow // *Ph.D.-thesis / MEK-DTU*, Technical University of Copenhagen, Denmark. 2003. 185 p.

Крат Юлия Георгиевна, старший преподаватель, кафедра «Информационные технологии и системы», Дальневосточный государственный университет путей сообщений, 680021, Россия, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47. E-mail: kratyuliya@mail.ru

Потапов Игорь Иванович, д. ф.-м. н., заведующий лабораторией вычислительной механики, Вычислительный центр, Дальневосточное отделение Российской академии наук, 680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. E-mail: potapovii@rambler.ru

Yu. G. Krat, I. I. Potapov

Stochastic model of development of bed forms

Keywords: bed forms, stochastic perturbation, channel processes.

Mathematical Subject Classifications: 76B07

In this paper we have proposed a channel model which allows to explore the process of development of bottom waves with regard for the stochastic perturbation of the flow. The effect of hydrodynamic flow parameters on the process of formation and development of bottom waves is studied. The comparison of the results obtained by using the model with the field data shows good qualitative and quantitative statuses of the model wave formation.

REFERENCES

1. Rubin D.M. Use of forecasting signatures to help distinguish periodicity, randomness, and chaos in ripples and other spatial patterns, *Chaos*, 1992, vol. 2, pp. 525–535.
2. Dodds P.S., Rothman B.H. Scaling, universality and geomorphology, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 2000, vol. 28, pp. 571–610.
3. Grishanin K.V. *Ustoichivost' rusel rek i kanalov* (Sustainability of rivers and canals), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1974, 143 p.
4. Komarova N.L., Hulscher S.J. Linear instability mechanisms for sand wave formation, *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 413, pp. 219–246.
5. Petrov A.G., Potapov I.I. Formulation and solution of the problem of the stability of a cohesionless channel bottom, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2010, vol. 51, no. 1, pp. 51–61.
6. Petrov A.G., Potapov I.I. Development of perturbations on a sandy channel bed, *Doklady Physics*, 2010, vol. 55, no. 3, pp. 145–149.
7. Potapov I.I., Shchekacheva M.A. Determination of the coastal rate of erosion for the rivers with sandy bottom, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 116–120.
8. Krat Yu.G., Potapov I.I. The influence of the irregular flow disturbance on education bottom waves, *Khabarovsk: Computing Center FEB RAS, preprint*, no. 175, 2012, 22 p.
9. Guy N.P., Simons D.V., Richardson E.V. Summary of alluvial channel data from flume experiments, *Geol. Survey Profess*, Paper 462-I, Washington, 1967, 96 p.
10. Coleman S.E., Fedele J.J., Garcia M.H. Closed-conduit bed-forms initiation and development, *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, vol. 129, no. 12, pp. 956–965.
11. Venditti J.G., Church M. Morphodynamics of small-scale superimposed sand waves over migrating dune bed forms, *Water Resources Research*, 2005, vol. 41, 14 p.
12. Tjerry S. Morphological calculations of dunes in alluvial rivers, *Ph.D.-thesis*, ISVA, Technical University of Denmark, 1995, 193 p.
13. Sanne L.N. Modeling of sand dunes in steady and tidal flow, *Ph.D.-thesis*, MEK-DTU, Technical University of Copenhagen, Denmark, 2003, 185 p.

Received 01.12.2012

Krat Yuliya Georgievna, Senior Lecturer, Department of Information Technologies and Systems, Far Eastern State Transport University, ul. Serysheva, 47, Khabarovsk, 680021, Russia. E-mail: kratyuliya@mail.ru

Potapov Igor' Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Computational Mechanics, Computing Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kim Yu Chena, 56, Khabarovsk, 680000, Russia. E-mail: potapovii@rambler.ru