УДК 517.518

© *Н. В. Латыпова*

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Рассматриваются несколько способов биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами пятой степени на треугольнике. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны. Оценки погрешности для предложенных элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно–полиномиальная функция, триангуляция, метод конечных элементов.

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i-й производной имели вид CH^{n+1-i}, где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена и этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций (классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции, не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Синджа, Зламала, Женишека, Брэмбла и других). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Сьярле и Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле–Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны.

Так, в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам Зламала, Ю. Н. Субботина, Жаме. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филлимоненковым, Ю. Н. Субботиным [3, 4], Н. В. Байдаковой [5, 6] и автором [7–11]. В работах [5, 7] рассматриваются интерполяционные условия биркгофова типа для построения многочленов нечетных степеней $4k + 1$ и $4k + 3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удается. В работах [4, 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший).

В работах [9–11] рассматриваются способы интерполяции типа Биркгофа многочленами второй, третьей и четвертой степеней соответственно на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим, что построенные кусочно–полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса). Например, использовались линейные по совокупности переменных полиномы, но с определящими параметрами не в вершинах треугольника, а в серединах его сторон, и это приводило к существенно лучшим результатам, так как при этом автоматически учитывалось трудное условие равенства нулю дивергенции.

В настоящей работе предлагаются несколько способов интерполяции типа Биркгофа многочленами пятой степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок.

§ 1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен пятой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle$ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i = 1, 2, 3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_1 — единичную нормаль к стороне $[a_1, a_2]$, через b_1 — середину стороны $[a_1, a_2]$. Пусть точки b_2 и b_3 делят наибольшую сторону $[a_1, a_2]$ на три равные части, а точки b_i при $i = 4, 5, 6$ делят сторону $[a_1, a_2]$ на четыре равные части.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины $\triangle$ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a + b = H$. Тогда середина стороны $[a_1, a_2]$ будет иметь координаты $b_1 = \Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big)$, а остальные точки: $b_2 = \Big(\dfrac{b-2a}{3}, 0\Big)$, $b_3 = \Big(\dfrac{2b-a}{3}, 0\Big)$, $b_4 = \Big(\dfrac{b-3a}{4}, 0\Big)$, $b_5 = \Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big)$, $b_6 = \Big(\dfrac{3b-a}{4}, 0\Big)$, при этом заметим, что $b_5 = b_1$.

Обозначим через

$$D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta = \left(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}\right)$, $\left(\eta^{(1)}\right)^2 + \left(\eta^{(2)}\right)^2 = 1$ и пусть

$$\begin{aligned} W^{s+1}M = \Big\{ f(x,y) : D^l_{\eta_1,\ldots,\eta_l} f(x,y) \in \mathbb{C}(\triangle) \quad (0 \leqslant l \leqslant s+1) \quad \text{и} \\ \forall\, (x,y) \in \triangle, \quad \forall\, \eta_1, \ldots, \eta_{s+1} \quad \Big| D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}} f(x,y) \Big| \leqslant M \Big\}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$.

Через $P_5(x,y) = P_5(f; x,y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит пяти, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m P_5(a_i)}{\partial x^m}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (i = 1, 2); \tag{1}$$

$$D^5_{n_1^5} f(b_1) = D^5_{n_1^5} P_5(b_1); \tag{2}$$

$$D^4_{n_1^4} f(b_i) = D^4_{n_1^4} P_5(b_i) \quad (i = 2, 3); \tag{3}$$

$$D^3_{n_1^3} f(b_i) = D^3_{n_1^3} P_5(b_i) \quad (i = 4, 5, 6); \tag{4}$$

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial y^m} = \frac{\partial^m P_5(a_i)}{\partial y^m}, \quad m = 1, 2 \quad (i = 3); \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{k+1} f(a_i)}{\partial x^k \partial y} = \frac{\partial^{k+1} P_5(a_i)}{\partial x^k \partial y}, \quad k = 0, 1 \quad (i = 1, 2); \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{k+2} f(a_i)}{\partial x^k \partial y^2} = \frac{\partial^{k+2} P_5(a_i)}{\partial x^k \partial y^2}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (i = 3). \tag{7}$$

Второй способ интерполяции получится, если вместо условий (7), взять следующие:

$$\frac{\partial^5 f(a_i)}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{\partial^5 P_5(a_i)}{\partial x^3 \partial y^2} \quad (i = 3); \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_5(a_i)}{\partial y^2} \quad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Положим $e(x, y) = f(x, y) - P_5(x, y); \quad e_{i,j}(x, y) = \dfrac{\partial^{i+j} e(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}; \quad e_{i,j} = e_{i,j}(0, 0).$

§ 2. Оценки погрешности интерполяции

Получим оценки погрешности для предложенных способов интерполяции.

Теорема 1. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^6 M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, для интерполяционного многочлена $P_5(x, y)$, заданного условиями* (1)–(7) (*или* (1)–(6), (8)–(9)), *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s e(x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{6-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 5, \quad j \leqslant s \leqslant 5). \tag{10}$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$\begin{gathered} e(x, y) = e_{0,0} + x e_{1,0} + \frac{x^2}{2!} e_{2,0} + \frac{x^3}{3!} e_{3,0} + \frac{x^4}{4!} e_{4,0} + \frac{x^5}{5!} e_{5,0} + \\ + y \left(e_{0,1} + x e_{1,1} + \frac{x^2}{2!} e_{2,1} + \frac{x^3}{3!} e_{3,1} + \frac{x^4}{4!} e_{4,1} \right) + \frac{y^2}{2!} \left(e_{0,2} + x e_{1,2} + \frac{x^2}{2!} e_{2,2} + \frac{x^3}{3!} e_{3,2} \right) + \\ + \frac{y^3}{3!} \left(e_{0,3} + x e_{1,3} + \frac{x^2}{2!} e_{2,3} \right) + \frac{y^4}{4!} (e_{0,4} + x e_{1,4}) + \frac{y^5}{5!} e_{0,5} + R(x, y), \end{gathered} \tag{11}$$

где $R(x, y) = \displaystyle\int_0^y \frac{(y-t)^5}{5!} \frac{\partial^6 f(0, t)}{\partial t^6} \, dt + \sum_{i=0}^{5} \frac{y^i}{i!} \int_0^x \frac{(x-u)^{5-i}}{(5-i)!} \frac{\partial^6 f(u, 0)}{\partial u^{6-i} \partial y^i} \, du.$

Далее через K_i и k_{ij} будем обозначать положительные константы, не обязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1) при $i = 1, 2$ и $m = 0, 1, 2$ определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки (см. [12, с. 173]):

$$|e_{0,0}| \leqslant k_{00} M a^3 b^3, \quad |e_{1,0}| \leqslant k_{10} M a^2 b^3, \quad |e_{2,0}| \leqslant k_{20} M a b^3,$$

$$|e_{3,0}| \leqslant k_{30} M b^3, \quad |e_{4,0}| \leqslant k_{40} M b^2, \quad |e_{5,0}| \leqslant k_{50} M b.$$

Из условия (2) имеем $e_{0,5}\Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big) = 0$. Откуда $e_{0,5} = -\dfrac{\partial^5}{\partial y^5} R\Big(\dfrac{b-a}{2}, 0\Big)$, а значит,

$$|e_{0,5}| \leqslant k_{05} M b.$$

Из условия (3) при $i = 2, 3$ получим

$$\begin{cases} e_{0,4} + \dfrac{2b-a}{3} e_{1,4} = -\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} R\Big(\dfrac{2b-a}{3}, 0\Big), \\ e_{0,4} + \dfrac{b-2a}{3} e_{1,4} = -\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} R\Big(\dfrac{b-2a}{3}, 0\Big). \end{cases}$$

Откуда следует

$$e_{1,4}=\frac{3}{b+a}\left[\frac{\partial^4}{\partial y^4}R\Big(\frac{b-2a}{3},0\Big)-\frac{\partial^4}{\partial y^4}R\Big(\frac{2b-a}{3},0\Big)\right],$$
$$e_{0,4}=\frac{2b-a}{3}\frac{\partial^4}{\partial y^4}R\Big(\frac{b-2a}{3},0\Big)-\frac{b-2a}{3}\frac{\partial^4}{\partial y^4}R\Big(\frac{2b-a}{3},0\Big);$$

здесь

$$|e_{0,4}|\leqslant k_{04}Mb^2,\quad |e_{1,4}|\leqslant k_{14}Mb.$$

Из условия (4) при $i=4,5,6$ получим

$$\begin{cases} e_{0,3}+\dfrac{b-3a}{4}e_{1,3}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-3a}{4}\Big)^2e_{2,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\Big(\dfrac{b-3a}{4},0\Big),\\ e_{0,3}+\dfrac{b-a}{2}e_{1,3}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^2e_{2,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\Big(\dfrac{b-a}{2},0\Big),\\ e_{0,3}+\dfrac{3b-a}{4}e_{1,3}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3b-a}{4}\Big)^2e_{2,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\Big(\dfrac{3b-a}{4},0\Big). \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b-3a}{4} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-3a}{4}\Big)^2\\ 1 & \dfrac{b-a}{2} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^2\\ 1 & \dfrac{3b-a}{4} & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3b-a}{4}\Big)^2 \end{vmatrix}=\frac{(b+a)^3}{64}\neq 0.$$

Так как $\left|\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R(b_i)\right|\leqslant KMb^3$ при $i=4,5,6$, то $|\Delta_j|\leqslant KMb^{7-j}$ $(j=1,2,3)$, где Δ_j — это определитель Δ, j-й столбец которого заменен правой частью системы. Тогда, используя формулы Крамера, имеем $e_{j-1,3}=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j=1,2,3$. Откуда следует

$$|e_{0,3}|\leqslant k_{03}Mb^3,\quad |e_{1,3}|\leqslant k_{13}Mb^2,\quad |e_{2,3}|\leqslant k_{23}Mb.$$

Из условий (5) при $m=2,1$ получим

$$\begin{cases} e_{0,2}+he_{0,3}+\dfrac{h^2}{2}e_{0,4}+\dfrac{h^3}{6}e_{0,5}=-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}R\left(0,h\right),\\ e_{0,1}+he_{0,2}+\dfrac{h^2}{2}e_{0,3}+\dfrac{h^3}{6}e_{0,4}+\dfrac{h^4}{24}e_{0,5}=-\dfrac{\partial}{\partial y}R\left(0,h\right). \end{cases}$$

Откуда

$$e_{0,2}=-he_{0,3}-\frac{h^2}{2}e_{0,4}-\frac{h^3}{6}e_{0,5}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\left(0,h\right),$$
$$e_{0,1}=-he_{0,2}-\frac{h^2}{2}e_{0,3}-\frac{h^3}{6}e_{0,4}-\frac{h^4}{24}e_{0,5}-\frac{\partial}{\partial y}R\left(0,h\right).$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{0,3}$, $e_{0,4}$ и $e_{0,5}$, имеем

$$|e_{0,2}|\leqslant k_{02}Mb^3h,\quad |e_{0,1}|\leqslant k_{01}Mb^3h^2.$$

Используя условия (6) при $k = 0, 1$ и при $i = 1, 2$, получим

$$\begin{cases} -ae_{1,1} + \dfrac{a^2}{2}e_{2,1} - \dfrac{a^3}{6}e_{3,1} + \dfrac{a^4}{24}e_{4,1} = -e_{0,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\,(-a, 0) \doteq A_1, \\ be_{1,1} + \dfrac{b^2}{2}e_{2,1} + \dfrac{b^3}{6}e_{3,1} + \dfrac{b^4}{24}e_{4,1} = -e_{0,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\,(b, 0) \doteq A_2, \\ e_{1,1} - ae_{2,1} + \dfrac{a^2}{2}e_{3,1} - \dfrac{a^3}{6}e_{4,1} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}R\,(-a, 0) \doteq A_3, \\ e_{1,1} + be_{2,1} + \dfrac{b^2}{2}e_{3,1} + \dfrac{b^3}{6}e_{4,1} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}R\,(b, 0) \doteq A_4, \end{cases}$$

где значок «$\doteq$» означает «по определению». Определитель системы $D = \dfrac{a^2b^2(b+a)^4}{144} \neq 0$. Так как

$$|A_1| \leqslant K_1M(b^3h^2 + a^5), \quad |A_2| \leqslant K_2Mb^5, \quad |A_3| \leqslant K_3Ma^4, \quad |A_4| \leqslant K_4Mb^4,$$

то

$$|D_j| \leqslant K_jMb^8a^{5-j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad |D_4| \leqslant K_4Mb^7a^2,$$

где D_j — это определитель D, j-й столбец которого заменен правой частью системы. Тогда, используя формулы Крамера, имеем $e_{j,1} = \dfrac{D_j}{D}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Откуда следует

$$|e_{1,1}| \leqslant k_{11}Mb^2a^2, \quad |e_{2,1}| \leqslant k_{21}Mb^2a, \quad |e_{3,1}| \leqslant k_{31}Mb^2, \quad |e_{4,1}| \leqslant k_{41}Mb.$$

Из условия (7) при $k = 3$ получим $e_{3,2} = -\dfrac{\partial^5}{\partial x^3\partial y^2}R(0, h)$. Тогда $|e_{3,2}| \leqslant k_{32}Mh$.

Из условия (7) при $k = 1, 2$ получим

$$e_{1,2} + he_{1,3} + \frac{h^2}{2}e_{1,4} = -\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}R\,(0, h)\,, \qquad e_{2,2} + he_{2,3} = -\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}R\,(0, h)\,.$$

Откуда

$$e_{1,2} = -he_{1,3} - \frac{h^2}{2}e_{1,4} - \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}R\,(0, h)\,, \qquad e_{2,2} = -he_{2,3} - \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}R\,(0, h)\,.$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{1,3}$, $e_{1,4}$ и $e_{2,3}$, имеем

$$|e_{1,2}| \leqslant k_{12}Mb^2h, \quad |e_{2,2}| \leqslant k_{22}Mbh.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (11) и вычисляя частные производные с первого по пятый порядок по переменным x и y, получим справедливость теоремы для условий интерполяции (1)–(7).

Рассмотрим второй способ интерполяции, взяв вместо условий (7) условия интерполяции (8)–(9), а остальные условия оставив без изменений. Покажем, что в этом случае получаются оценки, аналогичные (10).

Заметим, что все выкладки до оценки $|e_{3,2}|$ включительно остаются справедливыми, так как условие (7) при $k = 3$ совпадает с условием (8).

Тогда два условия (9) при $i = 1, 2$ эквивалентны системе

$$\begin{cases} -ae_{1,2} + \dfrac{a^2}{2}e_{2,2} = B_1, \quad \text{где} \quad B_1 = -e_{0,2} + \dfrac{a^3}{6}e_{3,2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}R\,(-a, 0)\,, \\ be_{1,2} + \dfrac{b^2}{2}e_{2,2} = B_2, \quad \text{где} \quad B_2 = -e_{0,2} - \dfrac{b^3}{6}e_{3,2} - \dfrac{\partial^2}{\partial^2 y}R\,(b, 0)\,, \end{cases}$$

причем $|B_1| \leqslant K_1 M(a^4 + b^2 h^2)$, $|B_2| \leqslant KMb^4$. Откуда, решая систему по формулам Крамера, имеем определитель системы $\Delta = -\dfrac{1}{2}ab(b+a) \neq 0$.

$$\Delta_1 = \frac{b^2}{2}B_1 - \frac{a^2}{2}B_2; \quad \Delta_2 = -bB_1 - aB_2; \quad |\Delta_1| \leqslant K_1 M a^2 b^4, \quad |\Delta_2| \leqslant K_2 M a b^4.$$

Тогда получим $e_{i,2} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, а значит,

$$|e_{1,2}| \leqslant k_{12} M a b^2, \quad |e_{2,2}| \leqslant k_{22} M b^2.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (11), получим оценки (10). Таким образом, теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Если вместо условия (5) при $m = 1$ взять условие

$$\frac{\partial^3 f(a_i)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 P_5(a_i)}{\partial x^2 \partial y} \quad (i = 1 \ \text{ или } \ i = 2), \tag{12}$$

то получатся оценки, аналогичные (10), для обоих рассмотренных выше случаев задания интерполяционных условий.

Действительно, условие (12) вместе с условиями (6) определяют одномерный многочлен Эрмита для функции $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ на стороне $[a_1, a_2]$, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки (см. [12, с. 173]): при $i = 1$

$$|e_{0,1}| \leqslant k_{01} M a^2 b^3, \quad |e_{1,1}| \leqslant k_{11} M a b^3, \quad |e_{2,1}| \leqslant k_{21} M b^3, \quad |e_{3,1}| \leqslant k_{31} M b^2, \quad |e_{4,1}| \leqslant k_{41} M b;$$

при $i = 2$ соответственно

$$|e_{0,1}| \leqslant k_{01} M a^3 b^2, \quad |e_{1,1}| \leqslant k_{11} M a^2 b^2, \quad |e_{2,1}| \leqslant k_{21} M a b^2, \quad |e_{3,1}| \leqslant k_{31} M b^2, \quad |e_{4,1}| \leqslant k_{41} M b.$$

Далее, используя условие (5) при $m = 2$, найдем оценку $|e_{0,2}| \leqslant k_{02} M b^3 h$. Остальные выкладки для обоих случаев полностью повторяются. Откуда получаем оценки, аналогичные (10).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^6 M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, для интерполяционного многочлена $P_5(x,y)$, заданного условиями* (1)–(4)*,* (6)–(7)*,* (12) *и* (5) *при $m = 2$ (или* (1)–(4)*,* (6)*,* (8)–(9)*,* (12)*,* (5) *при $m = 2$), имеют место оценки* (10).

§ 3. Неулучшаемость оценок

В этом параграфе покажем, что для рассмотренных способов интерполяции существуют такие константы $C^*_{i,j} > 0$ и функция $f^* \in W^6 M$, что для $e(x,y) = f^*(x,y) - P_5(f^*; x, y)$ справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \geqslant C^*_{s-j,j} M H^{6-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 5, \quad j \leqslant s \leqslant 5). \tag{13}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = \dfrac{H}{2}$. В качестве функции для первого способа, определяемого интерполяционными условиями (1)–(7), возьмем

$$f_1^*(x,y) = M(b+x)^3(b-x)^3 + M(b+x)^3(b-x)^2 y + M(b+x)^2(b-x)^2 y^2 \tag{14}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен

$$P_5(f_1^*;x,y)=p_{0,0}+p_{1,0}x+p_{2,0}x^2+p_{3,0}x^3+p_{4,0}x^4+p_{5,0}x^5+p_{0,1}y+p_{1,1}xy+p_{2,1}x^2y+p_{3,1}x^3y+$$

$$+p_{4,1}x^4y+p_{0,2}y^2+p_{1,2}xy^2+p_{2,2}x^2y^2+p_{3,2}x^3y^2+p_{0,3}y^3+p_{1,3}xy^3+p_{2,3}x^2y^3+p_{0,4}y^4+p_{1,4}xy^4+p_{0,5}y^5.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции.

Из условий (1) при $i=1,2$ и $m=0,1,2$ имеем однородную систему

$$\begin{cases} p_{0,0}+bp_{1,0}+b^2p_{2,0}+b^3p_{3,0}+b^4p_{4,0}+b^5p_{5,0}=0,\\ p_{0,0}-bp_{1,0}+b^2p_{2,0}-b^3p_{3,0}+b^4p_{4,0}-b^5p_{5,0}=0,\\ p_{1,0}+2bp_{2,0}+3b^2p_{3,0}+4b^3p_{4,0}+5b^4p_{5,0}=0,\\ p_{1,0}-2bp_{2,0}+3b^2p_{3,0}-4b^3p_{4,0}+5b^4p_{5,0}=0,\\ 2p_{2,0}+6bp_{3,0}+12b^2p_{4,0}+20b^3p_{5,0}=0,\\ 2p_{2,0}-6bp_{3,0}+12b^2p_{4,0}-20b^3p_{5,0}=0. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta=2^{11}b^9$ отличен от нуля, следовательно, система имеет только нулевое решение

$$p_{0,0}=p_{1,0}=p_{2,0}=p_{3,0}=p_{4,0}=p_{5,0}=0. \qquad (15)$$

Из условия (2), учитывая, что $b_1=\dfrac{b-a}{2}=0$, имеем

$$p_{0,5}=0. \qquad (16)$$

Из условия (3) при $i=2,3$ получим

$$\begin{cases} p_{0,4}+\dfrac{b}{3}p_{1,4}=0,\\ p_{0,4}-\dfrac{b}{3}p_{1,4}=0. \end{cases}$$

Откуда следует $p_{0,4}=p_{1,4}=0$.

Из условия (4) при $i=4,5,6$ получим

$$\begin{cases} p_{0,3}-\dfrac{b}{2}p_{1,3}+\dfrac{b^2}{4}p_{2,3}=0,\\ p_{0,3}=0,\\ p_{0,3}+\dfrac{b}{2}p_{1,3}+\dfrac{b^2}{4}p_{2,3}=0. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta=\dfrac{b^3}{4}\neq 0$. Следовательно, система имеет только нулевое решение

$$p_{0,3}=p_{1,3}=p_{2,3}=0.$$

Из условий (5) при $m=1,2$ получим

$$\begin{cases} p_{0,1}+2hp_{0,2}+3h^2p_{0,3}+4h^3p_{0,4}+5h^4p_{0,5}=Mb^5+2Mhb^4,\\ 2p_{0,2}+6hp_{0,3}+12h^2p_{0,4}+20h^3p_{0,5}=2Mb^4. \end{cases}$$

Откуда, учитывая $p_{0,j}=0$ при $j=3,4,5$, получаем $p_{0,2}=Mb^4$, $\quad p_{0,1}=Mb^5$.

Из условий (6) при $k = 0, 1$ и при $i = 1, 2$, получим систему

$$\begin{cases} -bp_{1,1} + b^2 p_{2,1} - b^3 p_{3,1} + b^4 p_{4,1} = -p_{0,1} = -Mb^5, \\ \;\; bp_{1,1} + b^2 p_{2,1} + b^3 p_{3,1} + b^4 p_{4,1} = -p_{0,1} = -Mb^5, \\ p_{1,1} - 2bp_{2,1} + 3b^2 p_{3,1} - 4b^3 p_{4,1} = 0, \\ p_{1,1} + 2bp_{2,1} + 3b^2 p_{3,1} + 4b^3 p_{4,1} = 0, \end{cases}$$

определитель которой $D = -16b^8 \neq 0$. Тогда нетрудно вычислить $D_1 = D_3 = 0$, $D_2 = 32Mb^{11}$, $D_4 = 16Mb^9$, где D_j — это определитель D, j-й столбец которого заменен правой частью системы. Используя формулы Крамера, имеем $p_{j,1} = \dfrac{D_j}{D}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Откуда следует

$$p_{1,1} = p_{3,1} = 0, \quad p_{2,1} = -2Mb^3, \quad p_{4,1} = Mb.$$

Из условия (7) при $k = 3$ получим, что $p_{3,2} = 0$. Из условия (7) при $k = 1, 2$ получим

$$2p_{1,2} + 6hp_{1,3} + 12h^2 p_{1,4} = 0, \quad 4p_{2,2} + 12hp_{2,3} = -8Mb^2.$$

Откуда, учитывая, что $p_{1,3} = p_{1,4} = p_{2,3} = 0$, имеем $p_{1,2} = 0$, $\quad p_{2,2} = -2Mb^2$.

Подставив найденные коэффициенты в $P_5(f_1^*; x, y)$, преобразуем функцию

$$e(x, y) = -M\left(b^2 - x^2\right)^3 - Myx\left(b^2 - x^2\right)^2 - Mx^4 y^2.$$

Оценим значение функции $e(x, y)$ и её частных производных:

$$\|e(x,y)\| \geqslant |e(0,0)| = Mb^6 = \frac{1}{64}MH^6,$$

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial x}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = \frac{27}{16}Mb^5 = \frac{27}{1-24}MH^5,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0,0)\right| = 6Mb^4 = \frac{3}{8}MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = 11Mb^3 = \frac{11}{8}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^4}(0,0)\right| = 72Mb^2 = 18MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^5}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^5}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = 240Mb = 120MH,$$

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial y}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = \frac{81}{32}Mb^5 = \frac{81}{1024}MH^5,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y}(0,0)\right| = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2 \partial y}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = \frac{7}{2}Mb^3 = \frac{7}{16}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^3 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^3 \partial y}(0,0)\right| = 12Mb^2 = 3MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^4 \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^4 \partial y}\Big(\frac{b}{4},0\Big)\right| = \frac{1}{5}Mb = \frac{15}{2}MH,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = \frac{1}{8}Mb^4 = \frac{1}{128}MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x \partial y^2}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = Mb^3 = \frac{1}{8}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial y^2}\Big(\frac{b}{2},y\Big)\right| = 6Mb^2 = \frac{3}{2}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^3 \partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^3 \partial y^2}\Big(\frac{b}{2},y\Big)\right| = 24Mb = 12MH.$$

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\left\|\dfrac{\partial^{k+m} e(x,y)}{\partial x^k \partial y^m}\right\|$ при $m = 3, 4, 5$ и $0 \leqslant k \leqslant 5 - m$. Чтобы их получить, рассмотрим другую функцию

$$f_2^*(x, y) = My^3(b - x)^2(b + x) + My^4(b - x)(b + x) + My^5 x \tag{17}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен $P_5(f_2^*; x, y)$. Из условий (1) аналогичным образом получим выполнение (15), а из условия (2) имеем (16).

Из условий (3) получим следующую систему:

$$\begin{cases} p_{0,4} + \dfrac{b}{3}p_{1,4} = \dfrac{64}{3}Mb^2, \\ p_{0,4} - \dfrac{b}{3}p_{1,4} = \dfrac{64}{3}Mb^2, \end{cases}$$

из которой следует $p_{0,4} = \dfrac{64}{3}Mb^2, \quad p_{1,4} = 0.$

Из условий (4) имеем систему

$$\begin{cases} p_{0,3} - \dfrac{b}{2}p_{1,3} + \dfrac{b^2}{4}p_{2,3} = \dfrac{9}{8}Mb^3, \\ \qquad\qquad\qquad p_{0,3} = Mb^3, \\ p_{0,3} + \dfrac{b}{2}p_{1,3} + \dfrac{b^2}{4}p_{2,3} = \dfrac{3}{8}Mb^3, \end{cases}$$

с определителем $\Delta = \dfrac{b^3}{4} \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение

$$p_{0,3} = Mb^3, \quad p_{1,3} = -\frac{3}{4}Mb^2, \quad p_{2,3} = -Mb.$$

Из условий (5) при $m = 1, 2$ получим

$$\begin{cases} p_{0,1} + 2hp_{0,2} + 3h^2p_{0,3} + 4h^3p_{0,4} + 5h^4p_{0,5} = 3Mh^2b^3 + 4Mh^3b^2, \\ \qquad 2p_{0,2} + 6hp_{0,3} + 12h^2p_{0,4} + 20h^3p_{0,5} = 6Mhb^3 + 12Mh^2b^2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая найденные $p_{0,j}$ при $j = 3, 4, 5$, получаем $p_{0,2} = -122Mb^2h^2$, $p_{0,1} = -\dfrac{280}{3}Mb^2h^3$.

Из условий (6) при $k = 0, 1$ и при $i = 1, 2$, получим систему

$$\begin{cases} -bp_{1,1} + b^2p_{2,1} - b^3p_{3,1} + b^4p_{4,1} = -p_{0,1} = -\dfrac{280}{3}Mb^2h^3, \\ \;\; bp_{1,1} + b^2p_{2,1} + b^3p_{3,1} + b^4p_{4,1} = -p_{0,1} = -\dfrac{280}{3}Mb^2h^3, \\ p_{1,1} - 2bp_{2,1} + 3b^2p_{3,1} - 4b^3p_{4,1} = 0, \\ p_{1,1} + 2bp_{2,1} + 3b^2p_{3,1} + 4b^3p_{4,1} = 0, \end{cases}$$

с определителем $D = -16b^8 \neq 0$. Тогда $D_1 = D_3 = 0$, $D_2 = -\dfrac{8960}{3}Mb^8h^3$, $D_4 = \dfrac{4480}{3}Mb^6h^3$, где D_j — это определитель D, j-й столбец которого заменен правой частью системы. Используя формулы Крамера, имеем $p_{j,1} = \dfrac{D_j}{D}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Откуда следует

$$p_{1,1} = p_{3,1} = 0, \quad p_{2,1} = \frac{560}{3}Mh^3, \quad p_{4,1} = -\frac{280}{3}M\frac{h^3}{b^2}.$$

Из условия (7) при $k = 3$ получим, что $12p_{3,2} = 36Mh$. Откуда $p_{3,2} = 3Mh$. Из условия (7) при $k = 1, 2$ получим

$$2p_{1,2} + 6hp_{1,3} + 12h^2p_{1,4} = -6Mhb^2 + 2Mh^3, \quad 4p_{2,2} + 12hp_{2,3} = -12Mhb - 24Mh^2.$$

Откуда, учитывая найденные значения $p_{1,3}$, $p_{2,3}$ и $p_{1,4} = 0$, имеем

$$p_{1,2} = -\frac{3}{4}Mb^2h + Mh^3, \quad p_{2,2} = -6Mh^2.$$

Подставим найденные коэффициенты в $P_5(f_2^*; x, y)$ и оценим недостающие значения частных производных функции $e(x, y)$. Итак,

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial y^3}\Big(\frac{b}{2}, 0\Big)\right| = \frac{3}{2}Mb^3 = \frac{3}{16}MH^3, \quad \left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x \partial y^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x \partial y^3}(0,0)\right| = \frac{3}{2}Mb^2 = \frac{3}{8}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x^2 \partial y^3}\Big(\frac{b}{2}, 0\Big)\right| = 18Mb = 9MH, \quad \left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial y^4}(0,0)\right| = 488Mb^2 = 122MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial x \partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial x \partial y^4}\Big(\frac{b}{3}, 0\Big)\right| = 48Mb = 24MH, \quad \left\|\frac{\partial^5 e(x,y)}{\partial y^5}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^5 e}{\partial y^5}\Big(\frac{b}{2}, y\Big)\right| = 60Mb = 30MH.$$

Объединяя полученные результаты, видим, что оценки снизу имеют вид (13) и совпадают с оценками сверху.

Получим оценки снизу для случая интерполяции, заданного условиями (1)–(6), (8)–(9). В качестве функций, на которых достигаются оценки, будем рассматривать те же самые функции вида (14) и (17). Сперва построим соответствующий интерполяционный многочлен $P_5(f_1^*; x, y)$ для функции вида (14). Заметим, что все выкладки, кроме последнего шага, сохраняются. Вместо условий (7) при $k = 1, 2$ рассмотрим условия (9):

$$\begin{cases} -bp_{1,2} + b^2 p_{2,2} = -Mb^4, \\ \ \ bp_{1,2} + b^2 p_{2,2} = -Mb^4. \end{cases}$$

Откуда $p_{1,2} = 0, \quad p_{2,2} = -2Mb^2$.

Так как получили такие же коэффициенты $p_{1,2}$ и $p_{2,2}$, как и в первом случае, то все выкладки повторяются, а значит, и оценки $\left\| \dfrac{\partial^{k+m} e(x,y)}{\partial x^k \partial y^m} \right\|$ при $m = 0, 1, 2$ и $0 \leqslant k \leqslant 5 - m$ будут аналогичными.

Чтобы оценить значения $\left\| \dfrac{\partial^{k+m} e(x,y)}{\partial x^k \partial y^m} \right\|$ снизу при $m = 3, 4, 5$ и $0 \leqslant k \leqslant 5 - m$, рассмотрим функцию $f_2^*(x, y)$, определяемую (17), и построим соответствующий интерполяционный многочлен $P_5(f_2^*; x, y)$. Аналогично все повторяется, кроме условий (7) при $k = 1, 2$ заменяемых на условия (9):

$$\begin{cases} -bp_{1,2} + b^2 p_{2,2} = -6Mb^2h^2, \\ \ \ bp_{1,2} + b^2 p_{2,2} = -6Mb^2h^2. \end{cases}$$

Откуда $p_{1,2} = 0, \quad p_{2,2} = -6Mh^2$.

Так как нас интересуют оценки для старших производных, начиная с $\left\| \dfrac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3} \right\|$, то полученные коэффициенты на них не влияют, а значит, снова все выкладки и оценки в точности повторяются, как и для первого способа интерполяции.

Таким образом, видим, что оценки снизу имеют вид (13) и совпадают с оценками сверху и для второго способа интерполяции.

Замечание 2. Если вместо условия (5) при $m = 1$ взять условие (12), то получатся оценки снизу, аналогичные (13), для обоих рассмотренных выше случаев задания интерполяционных условий.

§ 4. Основной результат

Результаты, полученные в параграфах 2 и 3, можно объединить и сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^6 M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, для интерполяционного многочлена $P_5(x, y)$, заданного условиями* (1)–(7) *(или* (1)–(6), (8)–(9)*), имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{6-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 5, \quad j \leqslant s \leqslant 5).$$

С точностью до констант, не зависящих от триангуляции, оценки неулучшаемы на рассматриваемом классе функций.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46. № 3. P. 177–199.
2. Субботин Ю.Н. Многомерная кратная полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции: сб. Новосибирск, 1981. С. 148–152.
3. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
4. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 120–130.
5. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. Vol. 14. № 2. P. 87–107.
6. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами 3-й степени на треугольнике // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 47–52.
7. Latypova N.V. Error estimates of approximation by polynomials of degree $4k + 3$ on the triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Suppl. 1. P. S190–S213.
8. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно–кубической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. С. 3–18.
9. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно–параболической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 91–97.
10. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции кубическими многочленами от углов треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 233–241.
11. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции многочленами четвертой степени от углов треугольника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 64–74.
12. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Поступила в редакцию 29.03.2012

Латыпова Наталья Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: nlatypova@udm.ru

N. V. Latypova

Independence of interpolation error estimates by fifth-degree polynomials on angles in a triangle

Keywords: error of interpolation, piecewise polynomial function, triangulation, finite element method.

Mathematical Subject Classifications: 41A05

The paper considers several methods of Birkhoff-type triangle-based interpolation of two-variable function by fifth-degree polynomials. Similar estimates are automatically transferred to error estimates of related finite element method. The error estimates for the given elements depend only on the decomposition diameter, and do not depend on triangulation angles. We show that the estimates obtained are unimprovable. Unimprovability is understood in a following sense: there exists function from the given class and there exist absolute positive constants independent of triangulation such that for any nondegenerate triangle estimates from below are valid.

REFERENCES

1. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1972, vol. 46, no. 3, pp. 177–199.

2. Subbotin Yu.N. Multidimensional multiple polynomial interpolation, *Metody Approksim. Interpol.* (Methods of Approximation and Interpolation: Transactions), Novosibirsk: Computing Centre, Academy of Sciences of the USSR, 1981, pp. 148–152.

3. Subbotin Yu.N. Dependence of the estimates of approximation by interpolating polynomials of 5-th degree upon geometric properties of triangle, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 1992, vol. 2, pp. 110–119.

4. Subbotin Yu.N. A New Cubic Element in the FEM, *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, suppl. 2, pp. S176–S187.

5. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1999, vol. 14, no. 2, pp. 87–107.

6. Baidakova N.V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle, *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, suppl. 2, pp. S49–S55.

7. Latypova N.V. Error estimates of approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle, *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics*, 2002, suppl. 1, pp. S190–S213.

8. Latypova N.V. Error of interpolation by piecewise cubic polynomial on triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, pp. 3–18.

9. Latypova N.V. Error of interpolation by a piecewise parabolic polynomial on a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 91–97.

10. Latypova N.V. Independence of error estimates of interpolation by cubic polynomials from the angles of a triangle, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no 3, pp. 233–241.

11. Latypova N.V. Independence of interpolation error by fourth-degree polynomials on angles in a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 64–74.

12. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* (Computing Methods), vol. 1, Moscow: Fizmatgiz, 1962. 464 p.

Received 29.03.2012

Latypova Natal'ya Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: nlatypova@udm.ru